目　　录

第一章 Nevanlinna 理论[1)]

本章是以后各章的必要准备，简要地介绍Nevanlinna理论的有关部分，其中包括了著名的第一和第二基本定理.这两个定理构成了Nevanlinna理论的基础.1925年，R. Nevanlinna首次发现了这两个定理，从而开创了亚纯函数值分布理论的近代研究.

§1.1. Poisson-Jensen公式

1.1.1. Poisson-Jensen公式

定理1.1 设$f(z)$在圆$|z|\leqslant\rho(0<\rho<+\infty)$上亚纯，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$和$b_j(j=1,2,\cdots,m)$分别是$f(z)$在圆$|z|<\rho$内的零点和极点，其中每个零点或极点出现的次数与其极相同，则对于任意值$z=re^{i\theta}(0\leqslant r<\rho,0\leqslant\theta<2\pi)$有

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\log\left|\frac{\rho(z-a_i)}{\rho^2-\bar{a}_iz}\right|-\sum_{j=1}^{m}\log\left|\frac{\rho(z-b_j)}{\rho^2-\bar{b}_jz}\right|. \qquad (1.1)$$

R. Nevanlinna称(1.1)式为Poisson-Jensen公式[32a].

证. (1)我们首先假设$f(z)$在圆$|z|\leqslant\rho$上无零点和极点.于是，对于任意取定的一个点$z_0=r_0e^{i\theta_0}(0\leqslant r_0<\rho,0\leqslant\theta_0<2\pi)$，函数

$$\log f(z)\cdot\frac{\rho^2-|z_0|^2}{\rho^2-\bar{z}_0z}$$

1)本章基本文献，请参考[32a]和[21c].

在圆 $|z| \leqslant \rho$ 上全纯. 根据 Cauchy 公式, 我们有

$$\log f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \log f(\zeta) \cdot \frac{(\rho^2 - |z_0|^2)}{(\rho^2 - \bar{z}_0\zeta)(\zeta - z_0)} d\zeta. \quad (1.2)$$

在圆周 $|\zeta| = \rho$ 上, 若记 $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, 则有 $d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ 和

$$(\rho^2 - \bar{z}_0\zeta)(\zeta - z_0) = \rho e^{i\varphi}\{\rho^2 - 2\rho r_0 \cos(\theta_0 - \varphi) + r_0^2\}.$$

于是 (1.2) 式给出

$$\log f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(\rho e^{i\varphi}) \cdot \frac{(\rho^2 - r_0^2) d\varphi}{\rho^2 - 2\rho r_0 \cos(\theta_0 - \varphi) + r_0^2}.$$

进一步取等式两边的实部, 则得到

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{(\rho^2 - r_0^2) d\varphi}{\rho^2 - 2\rho r_0 \cos(\theta_0 - \varphi) + r_0^2}.$$

由于 z_0 点的任意性, 我们证明了 (1.1) 式成立.

(2) 如果仅仅假设 $f(z)$ 在圆 $|z| < \rho$ 内无零点和极点, 而在圆周 $|z| = \rho$ 上可能具有有限个零点和极点, 则仍然可以证明 (1.1) 式成立. 事实上, 此时 (1.2) 式中的被积函数仅仅具有对数奇性, 因而积分仍然有意义. 在每个零点和极点处, 只需对积分线圆周 $|\zeta| = \rho$ 稍许作些改动, 然后通过极限过程, 即可证明 (1.2) 式成立, 从而 (1.1) 式也成立.

(3) 现在我们考虑一般情况. 置

$$\psi(z) = f(z) \cdot \prod_{j=1}^{m} \left\{ \frac{\rho(z - b_j)}{\rho^2 - \bar{b}_j z} \right\} \Big/ \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\rho(z - a_i)}{\rho^2 - \bar{a}_i z} \right\}, \quad (1.3)$$

则函数 $\psi(z)$ 在圆 $|z| < \rho$ 内全纯, 且无零点. 我们对 $\psi(z)$ 应用 (1.1) 式, 并且注意到当 $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $|a| < 1$ 时,

$$\left| \frac{\rho(\zeta - a)}{\rho^2 - \bar{a}\zeta} \right| = \left| \frac{\rho e^{i\varphi} - a}{\rho - \bar{a} e^{i\varphi}} \right| = \left| \frac{\rho - a e^{-i\varphi}}{\rho - \bar{a} e^{i\varphi}} \right| = 1,$$

则得到

$$\log|\psi(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{(\rho^2-r^2)d\varphi}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

再利用(1.3)式,即得(1.1)式.于是定理1.1完全得证.

当$f(0)\neq 0,\infty$时,如果在(1.1)式中命$z=0$,则得到

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\rho}{|a_i|}+\sum_{j=1}^{m}\log\frac{\rho}{|b_j|}. \tag{1.4}$$

(1.4)式称为Jensen公式.

1.1.2. Jensen-Nevanlinna公式

我们用

$$n(r,a)=n(r,f=a)=\begin{cases}n(r,f), & a=\infty,\\ n\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right), & a\neq\infty\end{cases}$$

表示方程$f(z)=a$在圆$|z|<r(0<r\leqslant\rho)$内根的个数(按重级计算),用

$$n(0,a)=n(0,f=a)=\begin{cases}n(0,f), & a=\infty,\\ n\left(0,\dfrac{1}{f-a}\right), & a\neq\infty\end{cases}$$

表示方程$f(z)=a$在原点$z=0$处的根的个数(重根按重级计算),并且置

$$N(r,a)=N(r,f=a)$$

$$
= \begin{cases} N(r,f) = \displaystyle\int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt + n(0,a)\log r, \quad a=\infty, \\ N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right) = \displaystyle\int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt + n(0,a)\log r, \\ \qquad\qquad a \neq \infty. \end{cases}
$$

于是，我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\rho}{|a_i|} &= \int_0^\rho \left(\log \frac{\rho}{t}\right) dn(t,0) \\
&= \left(\log \frac{\rho}{t}\right) n(t,0)\Big|_0^\rho + \int_0^\rho \frac{n(t,0)}{t}dt \\
&= \int_0^\rho \frac{n(t,0)}{t}dt = N(\rho,0), \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\sum_{j=1}^{m} \log \frac{\rho}{|b_j|} = \int_0^\rho \frac{n(t,\infty)}{t}dt = N(\rho,\infty). \qquad (1.6)
$$

另一方面，我们定义

$$
\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x \geqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}
$$

于是当 $x \geqslant 0$ 时，有

$$
\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.
$$

置

$$
m(r,a) = m(r, f=a)
$$

$$
=\begin{cases} m(r,f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta, \quad a=\infty, \\ \\ m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+\dfrac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta, \quad a\neq\infty, \end{cases}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|}d\varphi \\
&=m(\rho,\infty)-m(\rho,0).
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

于是(1.4), (1.5), (1.6) 和 (1.7) 式给出

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)}{t}dt
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|}d\varphi \\
&\quad+\int_0^{\rho}\frac{n(t,0)}{t}dt+\log|f(0)|,
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

$$
m(\rho,\infty)+N(\rho,\infty)=m(\rho,0)+N(\rho,0)+\log|f(0)|. \tag{1.9}
$$

当 $f(0)=0$ 或 ∞ 时，我们假设 $f(z)$ 在 $z=0$ 点的邻域内的 Laurent 展式为

$$
f(z)=c_s z^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots, \qquad c_s\neq 0.
$$

置 $f_1(z)=z^{-s}f(z)$,则 $f_1(z)$ 在圆 $|z|\leqslant\rho$ 上亚纯，并且 $f_1(0)=c_s$, 以及

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_1(\rho e^{i\varphi})|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi-s\log\rho,$$

$$s=n(0,0)-n(0,\infty).$$

我们对$f_1(z)$应用(1.8)式，则得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^\rho\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt+n(0,\infty)\log\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\varphi})|}d\varphi+\int_0^\rho\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt+n(0,0)\log\rho+\log|c_s|,$$

$$m(\rho,\infty)+N(\rho,\infty)=m(\rho,0)+N(\rho,0)+\log|c_s|. \tag{1.10}$$

(1.10)式称为 Jensen-Nevanlinna 公式.

§1.2. 特征函数

1.2.1. 特征函数的定义

设$f(z)$是圆$|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$内一个不恒为零的亚纯函数.我们在(1.9)式中易$\rho$为$r(0<r<R)$，并且定义

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f), \tag{1.11}$$

则(1.9)和(1.10)式又可分别写为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|, \tag{1.12}$$

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \tag{1.13}$$

R. Nevanlinna 称 $T(r,f)$ 为 $f(z)$ 的特征函数.[32a]

1.2.2. Cartan 恒等式

我们寻求 $T(r,f)$ 的一个新的表示式,并且证明 $T(r,f)$ 的两个重要性质.根据(1.4)式,对任意一个复数 a[1] 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\begin{cases}\log|a|, & |a|\geqslant 1,\\ \log|a|-\log|a|=0, & |a|<1,\end{cases}$$

即有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|a|. \tag{1.14}$$

我们首先假设 $f(0)\neq\infty$. 当 $f(0)\neq e^{i\theta}$ 时,对 $f(z)-e^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$ 应用(1.7)和(1.9)式,得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}d\varphi$$
$$=N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)-N(r,f)+\log|f(0)-e^{i\theta}|,$$

其中 $0<r<R$. 固定值 r,对 θ 求积分,则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta-N(r,f)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta.$$

1) 在本书中,复数包括 ∞.

进一步根据(1.12)和(1.14)式得到

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right)d\theta + \log^+ |f(0)|. \tag{1.15}$$

这就是所谓的Cartan恒等式.[9b]

其次我们假设$f(0) = \infty$.设c_s是$f(z)$在$z = 0$点邻域内展式中的首项非零系数.我们对$f(z) - e^{i\theta}$应用(1.7)和(1.10)式,则得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}|d\varphi = N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) - N(r, f) + \log|c_s|,$$

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right)d\theta + \log|c_s|. \tag{1.16}$$

当固定θ时,$N(r, e^{i\theta})$是r的非减函数.于是根据(1.15)和(1.16)式,我们判定$T(r,f)$是r的非减函数,并且有

$$\frac{dT(r, f)}{d\log r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta})d\theta.$$

从而进一步判定$T(r,f)$是$\log r$的凸函数.

1.2.3. 关于特征函数的几个不等式

设$a_1, a_2, \cdots, a_p$是任意p个复数,则有

$$\log^+\left|\prod_{\nu=1}^{p} a_\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \log^+|a_\nu|; \tag{1.17}$$

$$\log^+\left|\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \log^+|a_\nu| + \log p. \tag{1.18}$$

相应地,对于圆$|z| < R(0 < R \leqslant +\infty)$内任意$p$个亚纯函数$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_p(z)$有

$$m\left(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu) + \log p,$$

$$m\left(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu),$$

其中$0 < r < R$. 另一方面，当$f_\nu(0) \neq \infty\ (\nu = 1, 2, \cdots, p)$时又有

$$N\left(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu),$$

$$N\left(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu).$$

于是根据(1.11)式，我们得到

$$T\left(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu) + \log p, \tag{1.19}$$

$$T\left(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu). \tag{1.20}$$

当$R > 1$时，如果只考虑$1 \leqslant r < R$时的情况，则条件$f_\nu(0) \neq \infty$ $(\nu = 1, 2, \cdots, p)$可以去掉.

1.2.4. 全纯函数的最大模和特征函数间的关系

设$f(z)$是圆$|z| < R(0 < R \leqslant +\infty)$内的一个全纯函数. 置

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

则有不等式

$T(r, f) \leqslant \log^+ M(r, f)$

$$\leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r} T(\rho, f) \quad (0 < r < \rho < R) \tag{1.21}$$

事实上，根据 $f(z)$ 的全纯性，我们有

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leqslant \log^+ M(r, f),$$

即证明了(1. 21)式左边的不等式.为了证明右边的不等式，我们首先注意到当 $M(r, f) \leqslant 1$ 时，(1. 21)式右边不等式是显然的.于是可以假设 $M(r, f) > 1$. 选取点 $z_0 = re^{i\theta}$, 使得 $|f(z_0)| = M(r, f)$. 然后根据 Poisson-Jensen 公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\log^+ M(r, f) &= \log^+ |f(z_0)| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\varphi})| \frac{(\rho^2 - r^2) d\varphi}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} \\
&\leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \\
&= \frac{\rho + r}{\rho - r} m(\rho, f) = \frac{\rho + r}{\rho - r} T(\rho, f).
\end{aligned}$$

即(1. 21)式右边不等式成立.

§ 1.3. Ahlfors-Shimizu 特征

1. 3. 1. Ahlfors-Shimizu 特征

我们用 $k(a, b)$ 或 $|a, b|$ 表示 a, b 两点间的球面弦距离.具体地说，当 a, b 均为有限点时，

$$k(a, b) = |a, b| = \frac{|a - b|}{\sqrt{1 + |a|^2}\sqrt{1 + |b|^2}};$$

当a, b中有一个点(例如b)是∞时,

$$k(a,\infty)=|a,\infty|=\frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}.$$

设$f(z)$是圆$|z|<R\ (0<R\leqslant+\infty)$内的一个不恒为常数的亚纯函数.当$0<r<R$时,我们记

$$m_0(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{k\{f(re^{i\theta}),a\}}d\theta,$$

$$s(r)=\frac{1}{\pi}A(r)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<r}\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}rdrd\theta,\ z=re^{i\theta},$$

$$T_0(r,f)=\int_0^r\frac{s(t)}{t}dt,$$

其中$A(r)$表示$f(z)$映射圆$|z|\leqslant r$到Riemann球上的像面积,$T_0(r,f)$称为Ahlfors-Shimizu特征.[1a,36a]

定理1.2 对每个复数值a和任意值$r, 0<r<R$, 我们有

$$T_0(r,f)=N(r,a)+m_0(r,a)-m_0(a),\tag{1.22}$$

其中$m_0(a)$是与r无关的常数,精确地定义如下:

$$m_0(a)\begin{cases}m_0(0,a), & f(0)\neq a,\\ \log|c_{-m}|, & f(0)=a=\infty,\\ \log\dfrac{1+|a|^2}{|c_s|}, & f(0)=a\neq\infty,\end{cases}\tag{1.23}$$

此处c_{-m}表示$f(z)$在$z=0$点邻域内展式中的首项非零系数,并且点$z=0$是$f(z)$的m级极点;c_s表示$f(z)-a$在$z=0$点邻域内展式

中的首项非零系数，并且点 $z=0$ 是 $f(z)-a$ 的 s 级零点.

证. 设 a 和 b 是任意两个判别有穷复数.根据幅角原理，我们有

$$\frac{dm_0(r,a)}{dr}-\frac{dm_0(r,b)}{dr}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\log\left|\frac{f-b}{f-a}\right|d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_{|z|=r}d\arg\left(\frac{f-b}{f-a}\right)=\frac{n(r,b)-n(r,a)}{r}.$$

根据 $\dfrac{dN(r,a)}{dr}=\dfrac{n(r,a)}{r}$，进一步导出

$$\frac{dm_0(r,a)}{dr}+\frac{dN(r,a)}{dr}=\frac{dm_0(r,b)}{dr}+\frac{dN(r,b)}{dr}.$$

再对两端求积分，并计及 (1.23) 式得到

$$m_0(r,a)+N(r,a)-m_0(a)=m_0(r,b)+N(r,b)-m_0(b).$$

当 a,b 中有一个是 ∞ 时，不难看出此式仍然成立.于是 $m_0(r,a)+N(r,a)-m_0(a)$ 是一个依赖于 r 而无关于值 a 的量.因此，如果用 $d\omega(a)$ 表示 Riemann 球 K 上的面积元素，$\iint\limits_K d\omega(a)=\pi$，则有

$$N(r,a)+m_0(r,a)-m_0(a)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_K\{N(r,a)+m_0(r,a)$$

$$m_0(a)\}d\omega(a)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_K N(r,a)d\omega(a)$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_K m_0(r,a)d\omega(a)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_K m_0(a)d\omega(a).$$

注意到

$$\iint\limits_K \log \frac{1}{k\{f(z), a\}} d\omega(a)$$

是一个与点 z 和 $f(z)$ 无关的常数，所以

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_K m_0(r, a) d\omega(a) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_K m_0(a) d\omega(a) = 0.$$

另一方面有

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_K N(r, a) d\omega(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^r \frac{dt}{t}\iint\limits_K n(t, a) d\omega(a)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^r \frac{A(t)}{t} dt$$

$$= \int_0^r \frac{s(t)}{t} dt = T_0(r, f).$$

于是 (1.22) 式成立，即定理 1.2得证.

1.3.2. $T(r, f)$和 $T_0(r, f)$间的关系

在 (1.22) 中，置 $a = \infty$，则有

$$T_0(r, f) = N(r, \infty) + m_0(r, \infty) - m_0(\infty). \tag{1.24}$$

注意到

$$\log^+ |f| \leqslant \log\sqrt{1 + |f|^2} \leqslant \log^+ |f| + \frac{1}{2}\log 2,$$

$$m(r,f) \leqslant m_0(r,\infty) \leqslant m(r,f) + \frac{1}{2}\log 2,$$

并且根据 (1.24) 式，则得

$$T(r,f) \leqslant T_0(r,f) + m_0(\infty) \leqslant T(r,f) + \frac{1}{2}\log 2. \tag{1.25}$$

进一步根据 (1.23) 式，我们可以导出当 $f(0) \neq \infty$ 时，

$$|T(r,f) - T_0(r,f) - \log^+|f(0)|| \leqslant \frac{1}{2}\log 2;$$

当 $f(0) = \infty$ 时，

$$|T(r,f) - T_0(r,f) - \log|C_{-m}|| \leqslant \frac{1}{2}\log 2.$$

§1.4. 第一基本定理

1.4.1 第一基本定理

设 $f(z)$ 是圆 $|z| < R(0 < R \leqslant +\infty)$ 内的一个非常数亚纯函数，a 是一个有穷复数，$f(z) - a$ 在 $z = 0$ 点邻域内的展式为

$$f(z) - a = c_s z^s + c_{s+1}z^{s+1} + \cdots, \quad c_s \neq 0.$$

在上述假设下，根据 (1.13) 式，对任意值 r, $0 < r < R$, 我们有

$$T(r,f-a) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \log|c_s|.$$

另一方面，由于

$$m(r,f-a) \leqslant m(r,f) + \log^+|a| + \log 2,$$

$$m(r,f) \leqslant m(r,f-a) + \log^+|a| + \log 2,$$

以及

$$N(r,f-a)=N(r,f),$$

则又有

$$|T(r,f-a)-T(r,f)|\leqslant \log^{+}|a|+\log 2. \tag{1.26}$$

于是我们判定

$$\left|T(r,f)-T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-\log|c_s|\right|\leqslant \log^{+}|a|+\log 2, \tag{1.27}$$

即证明了下述定理1.3.

定理1.3 对于任意一个有穷复数a,我们有

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)-\log|c_s|+\varepsilon(r,a),$$

其中

$$|\varepsilon(r,a)|\leqslant \log^{+}|a|+\log 2.$$

R. Nevanlinna称定理1.3为第一基本定理[32a].

设$a(a\neq 0)$,b是两个常数.置

$$f_1(z)=f(z)-a,\quad f_2(z)=af(z),\quad f_3(z)=\frac{1}{f(z)},$$

则根据(1.13),(1.19)和(1.20)式,特征函数$T(r,f_1)$,$T(r,f_2)$和$T(r,f_3)$与$T(r,f)$相差均为一有界函数.更一般地,我们考虑函数

$$F(z)=\frac{a\,f(z)+b}{c\,f(z)+d},$$

其中a,b,c,d为常数,并且$ad-bc\neq 0$.因为F可以分解成为上述三

种变换形式的复合，所以 $F(z)$ 的特征函数 $T(r,F)$ 与 $T(r,f)$ 的差同样也是一个有界函数.

1.4.2. 超越亚纯函数的增长性

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个超越亚纯函数，即不退化为一个有理函数，则有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=+\infty. \tag{1.28}$$

以下，我们区分两种情况证明：

(1) 设 $f(z)$ 无极点. 于是 $f(z)$ 有展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<+\infty,$$

并且存在无穷多个不为零的系数. 根据 Cauchy 不等式有

$$|a_n|r^n\leqslant M(r,f)\quad (|z|=r>0, n=1,2,\cdots).$$

从而对于任意一个正整数 p，有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r,f)}{r^p}=+\infty.$$

于是

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log r}=+\infty.$$

另一方面，在 (1.21) 式中取 $\rho=2r$，则得

$$\log^+M(r,f)\leqslant 3T(2r,f),$$

从而能够判定 (1.28) 式成立.

(2) $f(z)$ 有极点. 当 $f(z)$ 有无穷多个极点时, 由于

$$
\begin{aligned}
T(r,f) &\geqslant N(r,f) \geqslant N(r,f) - N(\sqrt{r},f) \\
&\geqslant \frac{1}{2} n(\sqrt{r},f) \log r \,(r>1),
\end{aligned}
$$

所以 (1.28) 式成立. 现在假定 $f(z)$ 仅具有有穷个极点 $b_j(j=1,2,\cdots,k)$, 其级分别为 $m_j(j=1,2,\cdots,k)$. 置

$$
p(z) = \prod_{j=1}^{k} (z-b_j)^{m_j}, \quad g(z) = p(z) f(z),
$$

则 $g(z)$ 是一个超越整函数, 且无极点. 于是我们有

$$
\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r,g)}{\log r} = +\infty.
$$

另一方面, 根据 (1.19) 和 (1.20) 式有

$$
\begin{aligned}
T(r,g) &\leqslant T(r,p) + T(r,f) \\
&\leqslant \log^{+} r \sum_{j=1}^{k} m_j + \sum_{j=1}^{k} m_j \log^{+} |b_j| \\
&\quad + \log 2 \sum_{j=1}^{k} m_j + T(r,f)
\end{aligned}
$$

因此 (1.28) 式成立.

1.4.3. 例

(1) 设

$$
f(z) = c \cdot \frac{z^p + \cdots + a_p}{z^q + \cdots + b_q}, \quad (c \neq 0)
$$

是一个有理函数. 如果 $p>q$, 则当 $z\to\infty$ 时, $f(z)\to\infty$. 于是对于任意一个有穷复数 a, 当 r 充分大时有 $m(r,a)=0$. 另一方面, 由于方程 $f(z)=a$ 具有 p 个根, 所以当 t 充分大时有 $n(t,a)=p$. 于是

$$N(r,a)=\int_0^r\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt+n(0,a)\log r$$

$$=p\log r+O(1),$$

$$T(r,f)=m(r,a)+N(r,a)+O(1)=p\log r+O(1).$$

类似地, 当 $p<q$ 时, 对于任意一个复数 $a(a\neq 0)$ 有

$$T(r,f)=q\log r+O(1),$$

$$N(r,f)=q\log r+O(1),\quad m(r,a)=O(1),$$

以及当 $p=q$ 时, 对于任意一个复数 $a(a\neq c)$ 有

$$T(r,f)=q\log r+O(1),$$

$$N(r,a)=q\log r+O(1),\quad m(r,a)=O(1).$$

因此, 只要 $a\neq f(\infty)$, 我们就有

$$T(r,f)=d\log r+O(1),$$

$$N(r,f)=d\log r+O(1),\quad m(r,a)=O(1),$$

其中 $d=\max(p,q)$. 当 $a=f(\infty)$ 时, 如果方程 $f(z)=a$ 在无穷远点处有 $\alpha(0<\alpha<d)$ 级重根, 则有

$$T(r,f)=d\log r+O(1),$$

$$N(r,f)=(d-\alpha)\log r+O(1),\quad m(r,a)=\alpha\log r+O(1).$$

总结上述讨论, 我们看到当 $f(z)$ 是一个有理函数时, 必定有

$$T(r,f)=O(\log r). \tag{1.29}$$

(2) 设$f(z)=e^z$, $z=re^{i\theta}$. 简单的计算给出

$$m(r,0)=m(r,\infty)=\frac{r}{\pi},\quad N(r,0)=N(r,\infty)=0,$$

$$T(r,f)=\frac{r}{\pi}. \tag{1.30}$$

当$a\neq 0,\infty$时,如果点z_0是方程$e^z=a$的一个根,则$z_0+2k\pi i(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$是这个方程的全部根.因此我们有

$$n(t,a)=\frac{t}{\pi}+O(1),\quad N(r,a)=\frac{r}{\pi}+O(\log r).$$

再根据(1.30)式,判定

$$m(r,a)=O(\log r).$$

(3) 设

$$f(z)=\int_0^z e^{-t^q}dt,\quad q\geqslant 2.$$

置

$$a_k=e^{2\pi ki/q}\int_0^{\infty}e^{-t^q}dt,\quad k=1,2,\cdots,q,$$

则当z在角域$|\arg z-(2\pi k)/q|<\frac{\pi}{2q}-\varepsilon(\varepsilon>0)$内趋于$\infty$时,我们有

$$f(z)-a_k=-\int_z^{\infty}e^{-t^q}dt=-\frac{e^{-z^q}}{qz^{q-1}}+\frac{q-1}{q}\int_z^{\infty}\frac{e^{-t^q}}{t^q}dt$$

$$= -\frac{e^{-z^q}}{qz^{q-1}}\{1+o(1)\}.$$

于是

$$m(r,a_k)=\frac{1}{2\pi}\{1+o(1)\}r^q\int_{-\frac{\pi}{2q}}^{\frac{\pi}{2q}}\cos q\theta d\theta$$

$$=\{1+o(1)\}\frac{r^q}{q\pi},\quad k=1,2,\cdots,q.$$

类似地，当 z 在角域 $\left|\arg z-\frac{(2k-1)\pi}{q}\right|<\frac{\pi}{2q}-\varepsilon$ 内趋于 ∞ 时，我们有

$$f(z)=\int_0^z e^{-t^q}dt=\frac{e^{-z^q}\{1+o(1)\}}{qz^{q-1}}+O(1).$$

于是

$$m(r,f)=\{1+o(1)\}\frac{r^q}{\pi}.$$

对于 $a\neq a_k(k=1,2,\cdots,q)$ 和 ∞ 时的情况，根据后面将要证明的第二基本定理可以判定

$$m(r,a)=o(r^q).$$

根据上述讨论和应用第一基本定理，我们最后得到

$$m(r,a)=\{1+o(1)\}\frac{r^q}{\pi},\quad N(r,a)=0,\quad a=\infty;$$

$$m(r,a)=\{1+o(1)\}\frac{r^q}{q\pi},$$

$$N(r,a)=\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{r^q}{\pi},\quad a=a_1,\cdots,a_{qj}$$

$$m(r,a)=o(r^q),\quad N(r,a)=\{1+o(1)\}\frac{r^q}{\pi},\quad a\neq a_1,\cdots,a_q.$$

1.4.4. 级

上述讨论说明特征函数 $T(r,f)$ 的增长性刻划了亚纯函数 $f(z)$ 的某种本质属性.据此, E. Borel 对整函数的最大模引进了级的概念[6a].这里,我们给出 R. Nevanlinna 对亚纯函数的定义:[32a] 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数.如果 λ 和 μ 分别表示 $f(z)$ 的级和下级,则有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+T(r,f)}{\log r}=\begin{cases}\lambda,\\ \mu.\end{cases}$$

明显地, $0\leqslant\mu\leqslant\lambda\leqslant+\infty$. 根据 $\lambda=0$, $0<\lambda<+\infty$ 和 $\lambda=+\infty$, 我们分别称 $f(z)$ 为零级,有穷正级和无穷级亚纯函数. 以后我们可以看到三类不同的亚纯函数在性质上有很大差别. 另外, 在一些问题中,我们还需要对 $T(r,f)$ 的增长性进行更为细致的区分, 例如有型和类的概念.但是由于本书并不需要,所以我们不多作介绍.同样地,我们可以对下级 μ 作相应的区分, 而且本书考虑的多是下级 μ 为有穷的函数类.

根据(1.21)和(1.25)式,我们可以看出在定义 λ 和 μ 时,若用 $T_0(r,f)$ 或当 $f(z)$ 是整函数时用 $\log M(r,f)$ 代替 $T(r,f)$, 则 λ 和 μ 的值保持不变.

最后,对圆 $|z|<1$ 内的亚纯函数 $f(z)$, 定义其级 λ 和下级 μ. 具体地,我们有

$$\varlimsup_{r\to1}\frac{\log^+T(r,f)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\begin{cases}\lambda,\\ \mu.\end{cases}$$

§1.5. 对数导数引理

1.5.1. 两个引理

引理1.1 对任意一个有穷复数z和值r, $0<r<+\infty$, 若用E_k表示满足不等式$|z-re^{i\theta}|<kr(0<k<1)$的全体值$\theta(0\leqslant|\theta|<\pi)$所构成的集合,则有

$$\int_{E_k}\log\frac{r}{|z-re^{i\theta}|}d\theta<\pi k\left\{\log\frac{1}{k}+1\right\}. \tag{1.31}$$

证. 不失一般性,可以假设z是一个实的正数.因此当$\theta\in E_k$时,我们有

$$|z-re^{i\theta}|\geqslant r\sin\theta.$$

设θ_0是方程$\sin\theta=k$的最小正根,则E_k位于区间$[-\theta_0,\theta_0]$之内.注意到当$\frac{\pi}{2}\leqslant|\theta|<\pi$时.有$|z-re^{i\theta}|>r$.于是

$$\int_{E_k}\log\frac{r}{|z-re^{i\theta}|}d\theta\leqslant 2\int_0^{\theta_0}\log\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$\leqslant 2\int_0^{\theta_0}\log\frac{\pi}{2\theta}d\theta=2\theta_0\left\{\log\left(\frac{1}{2\theta_0}\right)+1\right\}.$$

再注意到$\theta_0\left\{\log\frac{\pi}{2\theta_0}+1\right\}$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内是$\theta_0$的增函数,并且$\sin\theta_0=k>\frac{2}{\pi}\theta_0$, $\theta_0<\frac{\pi}{2}k<\frac{\pi}{2}$, 则用$\frac{\pi}{2}k$代替$\theta_0$, 即得(1.31)式.于是引理1.1得证.

引理1.2 设$z_1,z_2,\cdots,z_n$是开平面$|z|<+\infty$上的$n(n\geqslant1)$个点,$\delta(z)$表示点z到这n个点的最小距离,则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}d\theta \leqslant 2\log n + \frac{1}{2}.$$

证． 用E_ν 表示满足不等式$|re^{i\theta} - z_\nu| < \frac{r}{n}$ 的全体值θ ($0 \leqslant |\theta| < \pi$) 构成的集合．置$E = \bigcup_{\nu=1}^{n} E_\nu$．我们定义：当$x \geqslant n$时，$\log_0 x = \log x$；当 $0 < x < n$ 时，$\log_0 x = 0$．于是当$\theta \in E$ 时，有$\delta(re^{i\theta}) < \frac{r}{n}$．因此，

$$\log^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})} = \log_0\frac{r}{\delta(re^{i\theta})} \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\log_0\frac{r}{|re^{i\theta} - z_\nu|}.$$

再应用引理 1.1，置其中的$k = \frac{1}{n}$，则有

$$\int_E \log^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}d\theta \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\int_0^{2\pi}\log_0\left|\frac{r}{re^{i\theta} - z_\nu}\right|d\theta$$
$$\leqslant \pi(\log n + 1). \tag{1.32}$$

另一方面，若用CE 表示E 的补集，则当$\theta \in CE$ 时，有$\delta(re^{i\theta}) \geqslant \frac{r}{n}$．因此

$$\int_{CE}\log^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}d\theta \leqslant \int_{CE}\log n d\theta \leqslant 2\pi\log n.$$

结合 (1.32) 式，我们得到

$$\int_0^{2\pi}\log^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}d\theta \leqslant 2\pi\log n + \pi(\log n + 1) = \pi(3\log n + 1),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}d\theta \leqslant 2\log n + \frac{1}{2},$$

即引理 1.2 得证.

上述两个引理是属于 W. Hayman 的.[21c]

1.5.2. 对数导数引理

对数导数引理即下述引理 1.3, 在 Nevanlinna 理论中起着关键性的作用.

引理1.3 设 $f(z)$ 是圆 $|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$ 内的一个亚纯函数, 并且 $f(0)\neq 0,\infty$, 则当 $0<r<\rho<R$ 时, 有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant 4\log^+ T(\rho,f)+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+5\log^+\rho$$

$$+6\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\frac{1}{r}+14. \qquad (1.33)$$

证. 置 $\rho'=\dfrac{\rho+r}{2}$. 在圆 $|z|<\rho'$ 内任意取一点 z_0, 使得 $f(z_0)\neq 0,\infty$. 于是 $\log f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内全纯. 借助于 Poisson-Jensen 公式和等式

$$\frac{\rho'^2-r^2}{\rho'-2\rho' r\cos(\theta-\varphi)+r^2}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\rho' e^{i\varphi}+z}{\rho' e^{i\varphi}-z}\right\},\quad z=re^{i\varphi},$$

我们在 z_0 点的邻域内有表示式

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho' e^{i\varphi})|\frac{\rho' e^{i\varphi}+z}{\rho' e^{i\varphi}-z}d\varphi$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\rho'(z-a_i)}{\rho'^2-\bar{a}_i z}-\sum_{j=1}^{m}\log\frac{\rho'(z-b_j)}{\rho'^2-\bar{b}_j z}+ic,$$

其中 c 是一个实的常数. 对两边求导数, 则得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho'e^{i\varphi})|\frac{2\rho'e^{i\varphi}}{(\rho'e^{i\varphi}-z)^2}d\varphi$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{a}_i}{\rho'^2-\bar{a}_iz}-\frac{1}{a_i-z}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{b_j-z}-\frac{\bar{b}_j}{\rho'^2-\bar{b}_jz}\right). \tag{1.34}$$

注意(1.34)式在 z_0 点的一个邻域内成立.因此,特别地在 z_0 点成立.由于 z_0 点的任意性,我们判定(1.34)除去 $f(z)$ 的零点和极点外处处成立.进一步,在 $f(z)$ 的零点和极点处,(1.34)式的两边均为 ∞. 于是(1.34)式在圆 $|z|<\rho'$ 内处处成立.置

$$n(\rho')=n(\rho',0)+n(\rho',\infty)$$

和记 $\delta(z)$ 为点 z 到 $f(z)$ 在圆 $|z|<\rho'$ 内的零点和极点的最小距离,则有

$$\frac{1}{|a_i-z|}\leqslant\frac{1}{\delta(z)},\quad \frac{1}{|b_j-z|}\leqslant\frac{1}{\delta(z)}.$$

另外,还有

$$|\rho'^2-\bar{a}_iz|\geqslant\rho'^2-\rho'r=\rho'(\rho'-r),$$

$$\left|\frac{\bar{a}_i}{\rho'^2-\bar{a}_iz}\right|\leqslant\frac{1}{\rho'-r},\quad \left|\frac{\bar{b}_j}{\rho'^2-\bar{b}_jz}\right|\leqslant\frac{1}{\rho'-r}$$

和

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho'e^{i\varphi})|\frac{2\rho'e^{i\varphi}}{(\rho'e^{i\varphi}-z)^2}d\varphi\right|$$

$$\leqslant\frac{2\rho'}{(\rho'-r)^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(\rho'e^{i\varphi})||d\varphi$$

$$= \frac{2\rho'}{(\rho'-r)^2}\left\{m(\rho', f) + m\left(\rho', \frac{1}{f}\right)\right\}.$$

于是(1.34)式给出

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{2\rho'}{(\rho'-r)^2}\left\{m(\rho', f) + m\left(\rho', \frac{1}{f}\right)\right\}$$

$$+ n(\rho')\left\{\frac{1}{\delta(z)} + \frac{1}{\rho'-r}\right\}.$$

再根据(1.11)和(1.12)式导出

$$\left|\frac{f'}{f}\right| \leqslant \frac{4\rho'}{(\rho'-r)^2}\left\{T(\rho', f) + \log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}$$

$$+ \frac{n(\rho')}{r}\left\{\frac{r}{\delta(z)} + \frac{r}{\rho'-r}\right\}.$$

两边取 $\log^+$, 并计及(1.17)和(1.18)式,则得

$$\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \log^+\rho' + 2\log^+\frac{1}{\rho'-r}$$

$$+ 2\log 2 + \log^+ T(\rho', f)$$

$$+ \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + \log 2$$

$$+ \log^+\frac{n(\rho')}{r} + \log^+\frac{r}{\delta(z)}$$

$$+ \log^+\frac{r}{\rho'-r} + 2\log 2. \tag{1.35}$$

以下我们估计 $n(\rho')$. 注意到

$$N(\rho,f) \geqslant \int_{\rho'}^{\rho} \frac{n(t,f)}{t} dt \geqslant n(\rho',f) \cdot \frac{\rho - \rho'}{\rho},$$

$$N\left(\rho, \frac{1}{f}\right) \geqslant n\left(\rho', \frac{1}{f}\right) \cdot \frac{\rho - \rho'}{\rho},$$

则有

$$n(\rho') \leqslant \frac{\rho}{\rho - \rho'}\left\{N(\rho,f) + N\left(\rho, \frac{1}{f}\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{2\rho}{\rho - \rho'}\left\{T(\rho,f) + \log^{+} \frac{1}{|f(0)|}\right\},$$

$$\log^{+} n(\rho') \leqslant \log^{+} \rho + \log^{+} \frac{1}{\rho - \rho'} + \log^{+} T(\rho,f)$$

$$+ \log^{+} \log^{+} \frac{1}{|f(0)|} + 2\log 2.$$

将此式代入(1.35)式，并计及$\rho' = \dfrac{\rho + r}{2}$，则根据引理1.2判定

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant 4\log^{+} T(\rho,f) + 4\log^{+} \log \frac{1}{|f(0)|} + 5\log^{+} \rho$$

$$+ 6\log^{+} \frac{1}{\rho - r} + \log^{+} \frac{1}{r} + 14,$$

即引理1.3成立.

引理1.3本质上是属于R. Nevanlinna的[32a].事实上，在他给出的形式中，原始值项应当含有$\log^{+} \dfrac{1}{|f(0)|}$项.这里代替$\log^{+} \dfrac{1}{|f(0)|}$项，而仅含有$\log^{+} \log^{+} \dfrac{1}{|f(0)|}$项.这种较为精确的形式

是 G. Valiron 证明的,[39d]其重要性可以从下一章关于奇导方向的理论中看出[1].

最后,当$f(0)=0$或∞时,我们补充说明如下:设$f(z)$在原点$z=0$的邻域内的展式为

$$f(z)=c_s z^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots,\quad c_s\neq 0.$$

置$f_1(z)=z^{-s}f(z)$,则$f_1(z)$适合于引理1.3的条件,即当$0<r<\rho<R$时,有

$$m\left(r,\frac{f_1'}{f_1}\right)\leqslant 4\log^+T(r,f_1)+4\log^+\log^+\frac{1}{|f_1(0)|}+5\log^+\rho$$

$$+6\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\frac{1}{r}+14.$$

注意到

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}=-\frac{s}{z}+\frac{f'(z)}{f(z)},$$

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f_1'}{f_1}\right)+\log^+|s|+\log^+\frac{1}{r}+\log 2,$$

以及

$$T(\rho,f_1)\leqslant T(\rho,f)+|s|\log^+\frac{1}{r},$$

我们判定

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant 4\log^+T(\rho,f)+4\log^+\log^+\frac{1}{|c_s|}$$

1) 见定理2.4的证明.

$$+5\log^+\rho+6\log^+\frac{1}{\rho-r}$$

$$+6\log^+\frac{1}{r}+5\log^+|s|+19. \tag{1.36}$$

1.5.3. Borel引理

引理1.4 (1)设$T(r)\geqslant 1$是区间$[r_0,+\infty)(r_0\geqslant 0)$上的一个连续非减函数,则有

$$T\left(r+\frac{1}{T(r)}\right)<2T(r), \tag{1.37}$$

但在区间$[r_0,+\infty)$上可能要除去一个关于值r的例外集合E_0,其线性测度$\operatorname{mes}E_0\leqslant 2$.

(2)设$T(r)\geqslant 1$是区间$[r_0,R]$ $(r_0\geqslant 0, R<+\infty)$上的一个连续非减函数,则有

$$T\left(r+\frac{R-r}{eT(r)}\right)<2T(r), \tag{1.38}$$

但在区间$[r_0,R)$上可能要除去一个关于值r的例外集合E_0,并且$\int_{E_0}\frac{dr}{R-r}\leqslant 2$.特别地,如果$\rho$和$\rho'$适合条件:$r_0<\rho<R$和$R-\rho'<\frac{R-\rho}{e^2}$,则在区间$(\rho,\rho')$内存在某些值$r$,使得(1.37)式成立.

证. 我们首先证明(1).设r_1是区间$(r_0,+\infty)$上不满足(1.37)式的最小值.如果这样的r_1不存在,则(1)显然成立.以下我们使用归纳法:设r_n已被确定.置$r_n'=r_n+\frac{1}{T(r_n)}$.然后定义$r_{n+1}$为区间$[r_n',+\infty)$上不满足(1.37)式的最小值.按此方式,我们得到一个序列$\{r_n\}$. 根据$T(r)$的连续性,当$r=r_n(n=1,2,$

…)时，(1.37) 式不能成立. 因此 $r_n \in E_0$. 再根据 r_{n+1} 的定义，我们判定区间 (r_n', r_{n+1}) 内不含有属于 E_0 的值. 于是 E_0 被包含在区间集合 $\{[r_n, r_n'] \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 之内. 我们现在证明如果序列 $\{r_n\}$ 含有无穷多个元素时，则 r_n 不能趋近于一个有穷值 r. 事实上，如果不然，设 $r_n \to r$，则根据 $r_n < r_n' \leqslant r_{n+1}$，我们有 $r_n' \to r$. 但是，由于 $T(r)$ 是非减函数，我们有

$$r_n' - r_n = \frac{1}{T(r_n)} \geqslant \frac{1}{T(r)} > 0.$$

于是导出矛盾. 最后证明 $\Sigma(r_n' - r_n) \leqslant 2$. 事实上，由于 $r_n \in E_0$，我们有

$$T(r_n') = T\left(r_n + \frac{1}{T(r_n)}\right) \geqslant 2T(r_n).$$

进一步有

$$T(r_{n+1}) \geqslant T(r_n') \geqslant 2T(r_n) \geqslant \cdots \geqslant 2^n T(r_1) \geqslant 2^n.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(r_n' - r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T(r_n)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{1-n} = 2$$

即(1)得证.

其次我们证明(2). 置

$$\rho = \log\frac{1}{R - r}, r = R - e^{-\rho}, \quad \rho_0 = \log\frac{1}{R - r_0},$$

则 $T_1(\rho) = T(R - e^{-\rho})$ 在 $[\rho_0, +\infty)$ 上适合(1). 设 E 是区间 $[\rho_0, +\infty)$ 上满足不等式

$$T_1\left(\rho + \frac{1}{T_1(\rho)}\right) \geqslant 2T_1(\rho)$$

的值 ρ 集合，E_0是对应于 E 的值 r 的集合．根据(1)，我们有

$$\int_{E_0} \frac{dr}{R-r} = \int_E d\rho \leqslant 2.$$

现在设值 r 不属于集合 E_0．于是，我们有

$$T(r') < 2T(r),$$

此处 r' 被下述等式确定：

$$\log \frac{1}{R-r'} = \log \frac{1}{R-r} + \frac{1}{T(r)}.$$

注意到当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，有 $1 - e^{-x} = xe^{-\theta} \geqslant \frac{x}{e}$，我们可以判定

$$r' = r + (R-r)\left\{1 - e^{-\frac{1}{T(r)}}\right\} \geqslant r + \frac{R-r}{eT(r)}.$$

于是(1.36)式成立．如果 $r_0 < \rho < \rho' \leqslant R$ 和 $R - \rho' < \frac{R-\rho}{e^2}$，则有

$$\int_\rho^{\rho'} \frac{dr}{R-r} = \log \frac{R-\rho}{R-\rho'} > 2.$$

于是在区间 (ρ, ρ') 上一定存在不属于 E_0 的值 r 使得

$$T\left(r + \frac{R-r}{eT(r)}\right) < 2T(r),$$

即引理1.4完全得证．

引理1.4本质上是属于 E. Borel 的.[6a]

§1.6 第二基本定理

1.6.1. 第二基本定理

定理1.4 设$f(z)$是圆$|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$内的一个非常数亚纯函数,$f(0)\neq 0,\ \infty$, $f'(0)\neq 0$, 以及$a_1, a_2, \cdots, a_q\ (q\geqslant 2)$是$q$个判别有穷复数,并且$|a_i-a_j|\geqslant\delta(\delta>0, 1\leqslant i\neq j\leqslant q)$,则对任意值$r$, $0<r<R$有

$$m(r,\infty)+\sum_{i=1}^{q}m(r,a_i)\leqslant 2T(r,f)-N_1(r)+S(r,f), \tag{1.39}$$

其中

$$N_1(r)=N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+2N(r,f)-N(r,f'),$$

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\right)+q\log^+\frac{3q}{\delta}$$

$$+2\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}, \tag{1.40}$$

并且$S(r,f)$满足条件:

(1)当$R=+\infty$时,如果$f(z)$是有穷级,则有

$$S(r,f)=O(\log r); \tag{1.41}$$

如果$f(z)$是无穷级,则有

$$S(r,f)=0\{\log[r\tau(r,f)]\}, \tag{1.42}$$

但可能除去一个关于值r的例外集合E_0,其线性测度$\mathrm{mes}\,E_0\leqslant 2$,并且$E_0$仅仅依赖于$T(r,f)$,特别地与$a_i$和$q$无关.

(2)当$0<R<+\infty$时,我们有

$$S(r,f)=0\left\{\log^+\tau(r,f)+\log\frac{1}{R-r}\right\}, \tag{1.43}$$

但可能除去一个关于值 r 的例外集合 E_0, 并且

$$\int_{E_0} \frac{dr}{R-r} < +\infty.$$

R. Nevanlinna 称定理 1.4 为第二基本定理.[32a]

证. 我们考虑函数

$$F(z) = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{f(z)-a_i}.$$

如果存在一个值 $i(1 \leqslant i \leqslant q)$, 使得在一点 z 有 $|f(z)-a_i| < \frac{\delta}{3q}$, 则当 $1 \leqslant j \neq i \leqslant q$ 时, 有

$$|f(z)-a_j| \geqslant |a_i-a_j| - |f(z)-a_i| \geqslant \delta - \frac{\delta}{3q} \geqslant \frac{2}{3}\delta,$$

即有

$$\frac{1}{|f(z)-a_j|} \leqslant \frac{3}{2\delta} \leqslant \frac{1}{2q} \cdot \frac{1}{|f(z)-a_i|}.$$

于是

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geqslant \frac{1}{|f(z)-a_i|} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{|f(z)-a_j|} \\ &\geqslant \frac{1}{|f(z)-a_i|}\left\{1 - \frac{q-1}{2q}\right\} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|f(z)-a_i|}, \end{aligned}$$

$$\log^+ |F(z)| \geqslant \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_i|} - \log 2.$$

注意到当 $1 \leqslant j \neq i \leqslant q$ 时, 有

$$\log^+ \frac{1}{|f(z)-a_j|} \leqslant \log^+ \frac{2}{\delta},$$

于是我们得到

$$\log^+|F(z)| \geqslant \sum_{j=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_j|} - q\log^+ \frac{2}{\delta} - \log 2$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_j|} - q\log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2. \qquad (1.44)$$

另一方面，如果对每个值 $i(1 \leqslant i \leqslant q)$ 均有 $|f(z)-a_i| \geqslant \frac{\delta}{3q}$，则下述估计式

$$\log^+|F(z)| \geqslant \sum_{i=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_i|} - q\log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2$$

显然成立.再结合(1.44)式，我们判定这个估计式在所有情况下成立.于是，我们有

$$m(r, F) \geqslant \sum_{i=1}^{q} m(r, a_i) - q\log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2, \qquad (1.45)$$

即得到了 $m(r, F)$ 的一个下界估计.进一步，我们寻求 $m(r, F)$ 的一个上界估计.首先我们有

$$m(r, F) = m\left(r, \frac{1}{f} \cdot \frac{f}{f'} \cdot f' \cdot F\right)$$

$$\leqslant m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, f' \cdot F).$$

再根据(1.12)式又有

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

$$- N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|,$$

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log \frac{1}{|f(0)|}.$$

于是，我们导出

$$m(r, F) \leqslant T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log \frac{1}{|f(0)|} + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

$$+ N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, f'F) + \log \left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|.$$

结合 (1.45) 式，则得

$$\sum_{i=1}^{q} m(r, a_i) + m(r, \infty)$$

$$\leqslant m(r, F) + m(r, f) + q \log^+ \frac{3q}{\delta} + \log 2$$

$$\leqslant T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f}{f'}\right)$$

$$+ m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r, f'F) + \log \frac{1}{|f'(0)|}$$

$$+ T(r, f) - N(r, f) + q \log^+ \frac{3q}{\delta} + \log 2. \qquad (1.46)$$

根据 Jensen 公式，我们有

$$N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f}{f'}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left|\frac{f(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right| d\theta - \log \left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)|$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f'(re^{i\theta})|d\theta + \log|f'(0)|$$

$$= N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N(r, f').$$

于是 (1.46) 式给出

$$\sum_{i=1}^{q} m(r, a_i) + m(r, \infty) \leqslant 2T(r,f) - \left\{2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right\} + s(r,f),$$

其中

$$S(r,f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{q} \frac{f}{f-a_i}\right) + q\log^+ \frac{3q}{\delta} + \log 2 + \log\frac{1}{|f'(0)|}.$$

以下我们估计 $S(r,f)$. 设 a 是一个有穷复数. 当 $r \to R$ 时, 根据引理 1.3, 我们有

$$m\left(r, \frac{f}{f-a}\right) \leqslant 4\log^+ T(\rho, f-a) + 5\log^+ \rho + 6\log^+ \frac{1}{\rho - r} + O(1)$$

$$\leqslant 4\log^+ T(r, f) + 5\log^+ \rho + 6\log^+ \frac{1}{\rho - r} + O(1),$$

$$(0 < r < \rho < R). \qquad (1.47)$$

进一步的讨论,需要区分两种情况:(1) $R = +\infty$. 设 $f(z)$ 是有穷级,即存在正的实数 k, 使得有 $T(r,f) = O(r^k)$ $(r \to +\infty)$. 在 (1.47) 式中,置 $\rho = 2r$, 则得到

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant O(\log r).$$

于是

$$S(r,f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{q} \frac{f'}{f-a_i}\right) + O(1)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{q} m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right) + O(\log r) = O(\log r).$$

设 $f(z)$ 是无穷级.在 (1.47) 式中置 $\rho = r + \dfrac{1}{T(r,f)}$, 根据引理 1.4, 只要值 r 不属于例外集合 E_0, $\operatorname{mes} E_0 \leqslant 2$, 我们就有

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant 4\log^+ 2T(r,f) + 5\log^+ r + 6\log^+ T(r,f) + O(1)$$

$$= O\{\log[rT(r,f)]\}.$$

于是

$$S(r,f) = O\{\log[rT(r,f)]\}.$$

(2) $R < +\infty$. 在 (1.47) 式中置 $\rho = r + \dfrac{R-r}{eT(r,f)}$, 根据引理 1.4, 只要 r 不属于例外集合 E_0, $\displaystyle\int_{E_0} \frac{dr}{R-r} < +\infty$, 我们就有

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant 4\log^+ 2T(r,f) + 6\log\frac{eT(r,f)}{R-r} + O(1)$$

$$= O\left\{\log\frac{T(r,f)}{R-r}\right\}.$$

于是

$$S(r,f) = O\left\{\log\frac{T(r,f)}{R-r}\right\},$$

即定理1.4完全得证.

当$f(0)=0$或∞或$f'(0)=0$时,我们补充说明如下:设$f(z)$在原点$z=0$邻域内的展式为

$$f(z) = c_s z^s + c_{s+1} z^{s+1} + \cdots,\ c_s \neq 0.$$

于是

$$f'(z) = sc_s z^{s-1} + (s+1)c_{s+1} z^s + \cdots.$$

检验定理1.4的证明,我们可以看到,对于这种情况,$S(r,f)$表示式的唯一改变之处在于用$\log\frac{1}{|sc_s|}$取代$\log\frac{1}{|f'(0)|}$,即我们有

$$S(r,f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\right) + q\log^+\frac{3q}{\delta}$$

$$+ 2\log 2 + \log\frac{1}{|sc_s|}. \tag{1.48}$$

因此,(1.41),(1.42),(1.43)式仍然成立.

1.6.2. 应用

(1)我们证明下述著名的Picard定理.

定理1.5 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个超越亚纯函数,则对任意复数值a, 方程$f(z)=a$均有无穷多个根,但可能至多有两个值a例外.我们称此例外值为Picard例外值.

证. 假设定理1.5不成立,即存在三个判别复数$a_v(v=1,2,3)$, 使得方程$f(z)=a_v$仅有有限个根.于是,我们有

$$N(r,a_v)=O(\log r),\quad v=1,2,3.$$

进一步应用第一和第二基本定理可以导出

$$T(r,f)\leqslant O\{\log[r\cdot T(r,f)]\},$$

但可能除去一个关于值r的例外集合E_0, $\operatorname{mes}E_0\leqslant 2$. 于是,我们判定

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}<+\infty,$$

即$f(z)$退化为有理函数,从而导出矛盾.

(2) 其次,我们证明下述著名的Borel定理.

定理1.6 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数,其级为λ, $0<\lambda<+\infty$, 则对任意复数值a, 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n(r,a)}{\log r}=\lambda,$$

但可能至多有两个例外值a_1和a_2使得

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n(r,a)}{\log r}<\lambda,\quad i=1,2.$$

我们称此例外值为Borel例外值.明显地,Picard例外值一定是Borel例外值.

证. 首先,对任意复数a,有

$$n(r,a) \leqslant \frac{1}{\log 2}\int_r^{2r}\frac{n(t,a)}{t}dt \leqslant \frac{1}{\log 2}N(2r,a)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log 2}\{T(2r,f)+O(1)\},$$

于是

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n(r,a)}{\log r} \leqslant \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(2r,f)+O(1)}{\log 2r} \leqslant \lambda.$$

假设定理 1.6 不成立，即存在三个判别复数 $a_\nu(\nu=1,2,3)$ 使得

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n(r,a_\nu)}{\log r} < \lambda, \quad \nu=1,2,3.$$

于是，当 r 充分大时，我们有

$$N(r,a_\nu)=\int_0^r\frac{n(t,a_\nu)-n(0,a_\nu)}{t}dt+n(0,a_\nu)\log r$$

$$\leqslant n(r,a_\nu)\log r+O(1).$$

进一步应用第一和第二基本定理可以导出

$$T(r,f) \leqslant \sum_{\nu=1}^{3}N(r,a_\nu)+S(r,f)$$

$$\leqslant \log r\cdot\sum_{\nu=1}^{3}n(r,a_\nu)+O(\log r).$$

于是，我们判定

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r} < \lambda,$$

即 $f(z)$ 的级 $<\lambda$，从而导出矛盾.

(3) 现在，我们给出第二基本定理最重要的应用，即建立亏量关系式. 设$f(z)$是圆$|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$内的一个亚纯函数，我们用

$$\bar{n}(r,a)=\bar{n}(r,f=a)=\begin{cases}\bar{n}(r,f), & a=\infty,\\ \bar{n}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right), & a\neq\infty\end{cases}$$

表示方程$f(z)=a$在圆$|z|<r(0<r\leqslant R)$内根的个数(每个根仅仅计算一次)，用

$$\bar{n}(0,a)=\bar{n}(0,f=a)=\begin{cases}\bar{n}(0,f), & a=\infty,\\ \bar{n}\left(0,\dfrac{1}{f-a}\right), & a\neq\infty\end{cases}$$

表示方程$f(z)=a$在原点$z=0$处根的个数(仅仅计算一次)，并且置

$$\overline{N}(r,a)=\overline{N}(r,f=a)$$

$$=\begin{cases}\overline{N}(r,f)=\displaystyle\int_0^r\frac{\bar{n}(t,a)-\bar{n}(0,a)}{t}dt+\bar{n}(0,a)\log r, & a=\infty,\\ \overline{N}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)=\displaystyle\int_0^r\frac{\bar{n}(t,a)-\bar{n}(0,a)}{t}dt+\bar{n}(0,a)\log r, & a\neq\infty.\end{cases}$$

进一步假设当$r\to R$时有$T(r,f)\to+\infty$. 于是根据第一基本定理，对于任意复数a有

$$m(r,a)+N(r,a)=T(r,f)+O(1),$$

$$0\leqslant\varliminf_{r\to R}\frac{m(r,f)}{T(r,f)}=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,f)}{T(r,f)}\leqslant 1. \tag{1.49}$$

R. Nevanlinna 定义[32a]

$$\delta(a)=\delta(a,f)=\varliminf_{r\to R}\frac{m(r,a)}{T(r,f)}=1-\varlimsup_{r\to R}\frac{N(r,a)}{T(r,f)},$$

$$\Theta(a)=\Theta(a,f)=1-\varlimsup_{r\to R}\frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)},$$

$$\theta(a)=\varliminf_{r\to R}\frac{N(r,a)-\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}.$$

于是当 $r\to R$ 时，我们有

$$N(r,a)-\overline{N}(r,a)>\{\theta(a)-o(1)\}T(r,f),$$

$$N(r,a)<\{1-\delta(a)+o(1)\}T(r,f),$$

$$\overline{N}(r,a)<\{1-\delta(a)+\theta(a)+o(1)\}T(r,f).$$

从而判定

$$\Theta(a)\geqslant\delta(a)+\theta(a). \tag{1.50}$$

R. Nevanlinna 称 $\theta(a)$ 为分支指标 (Verzweigungsindex)，称 $\delta(a)$ 为值 a 的亏量 . 根据 (1.49) 式，恒有 $0\leqslant\delta(a)\leqslant 1$. 特别地，当 $\delta(a)>0$ 时，称值 a 为亏值或 Nevanlinna 例外值.

定理 1.7 设 $f(z)$ 是圆 $|z|<R\,(0<R\leqslant+\infty)$ 内的一个亚纯函数，并且当 $R=+\infty$ 时，$f(z)$ 不恒为常数，或者当 $R<+\infty$ 时，$f(z)$ 满足条件

$$\varlimsup_{r\to R}\frac{T(r,f)}{\log\dfrac{1}{R-r}}=+\infty, \tag{1.51}$$

则 $f(z)$ 的全部亏值 $\{a\,|\,\delta(a)>0\}$ 构成一个可数集，并且有

$$\sum_a \{\delta(a)+\theta(a)\} \leqslant \sum_a \Theta(a) \leqslant 2. \tag{1.52}$$

证. 我们首先考虑 $R=+\infty$ 时的情况. 根据假设, $f(z)$ 不恒为常数, 所以 $f(z)$ 或者是一个有理函数, 或者是一个超越亚纯函数. 当 $f(z)$ 是一个有理函数时, 根据(1.29)式, 应有 $T(r,f)=O(\log r)$. 另一方面, 对于任意一个有穷复数 a, 当 $z\to\infty$ 时应有 $\frac{f'}{f-a}\to 0$, 即有 $m\left(r,\frac{f'}{f-a}\right)=0$. 因此(1.40)式给出 $S(r,f)=O(1)$. 于是

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}=0. \tag{1.53}$$

当 $f(z)$ 是一个超越亚纯函数时, 根据(1.28)式有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=+\infty.$$

另一方面, 根据(1.41)和(1.42)式又有

$$S(r,f)=O\{\log[rT(r,f)]\},$$

但可能要除去一个关于值 r 的例外集合 E_0, $\operatorname{mes} E_0\leqslant 2$. 于是

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in} E_0}}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}=0. \tag{1.54}$$

因此, 根据(1.53)和(1.54)式, 我们能够选取序列 $\{r_n\}$, 使得当 $n\to+\infty$ 时有 $r_n\to+\infty$, 并且

$$S(r_n,f)=o\{T(r_n,f)\}.$$

其次我们考虑 $0<R<+\infty$ 时的情况. 根据(1.51)式, 存在序

列 $\{\rho_n\}$，使得当 $n\to+\infty$ 时有 $\rho_n\to R$，并且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T(\rho_n,f)}{\log\dfrac{1}{R-\rho_n}}=+\infty.$$

进一步根据引理 1.4，我们能够在例外集合 E_0 外选取序列 $\{r_n\}$，使得

$$R-\rho_n>R-r_n>\frac{R-\rho_n}{q}.$$

于是当 $n\to+\infty$ 时有 $r_n\to R$，并且

$$\log\frac{1}{R-r_n}=\log\frac{1}{R-\rho_n}+O(1)=o\{T(\rho_n,f)\}=o\{T(r_n,f)\}.$$

因此，(1.43) 式给出

$$S(r_n,f)=o\{T(r_n,f)\}.$$

上述讨论说明，当 $0<R\leqslant+\infty$ 时，我们能够选取序列 $\{r_n\}$，使得当 $n\to+\infty$ 时有 $r_n\to R$，并且

$$S(r_n,f)=o\{T(r_n,f)\}.$$

对于选定的序列 $\{r_n\}$，应用第一和第二基本定理，可以导出

$$(q+1)T(r_n,f)\leqslant\sum_{i=1}^{q}N(r_n,a_i)+N(r_n,\infty)-N_1(r_n)$$
$$+(2+o(1))T(r_n,f),$$

$$(q-1-o(1))T(r_n,f)\leqslant\sum_{i=1}^{q}\overline{N}(r_n,a_i)+\overline{N}(r_n,\infty).$$

进一步得到

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{\lim_{r \to R}} \frac{\overline{N}(r_n, a_i)}{T(r_n, f)} + \overline{\lim_{r \to R}} \frac{\overline{N}(r_n, \infty)}{T(r_n, f)}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{r \to R}} \frac{\Sigma \overline{N}(r_n, a_i) + \overline{N}(r_n, \infty)}{T(r_n, f)} \geqslant q - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{q} \{1 - \Theta(a_i)\} + 1 - \Theta(\infty) \geqslant q - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{q} \Theta(a_i) + \Theta(\infty) \leqslant 2, \tag{1.55}$$

$$\sum_{i=1}^{q} \delta(a_i) \leqslant 2. \tag{1.56}$$

(1.56) 式说明适合 $\delta(a) > \dfrac{1}{N}$ 的有限值 a 至多有 $2N-1$ 个. 于是若命 $N = 2, 3, \cdots$, 我们可以对全部亏值集合 $\{a | \delta(a) > 0\}$ 给出一个排列, 即说明了全部亏值构成一个可数集. 注意到 (1.55) 式中的上界 2 与 q 无关, 所以 (1.52) 式成立, 即定理 1.7 完全得证.

(4) 最后, 我们对单位圆 $|z| < 1$ 内的亚纯函数给出一个应用. 设 $T(r) \geqslant 0$ 是区间 $[0, 1)$ 上的一个非减函数. 如果

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\log^+ T(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} \leqslant \lambda \qquad \lambda < +\infty, \tag{1.57}$$

则对任意小的数 $\varepsilon > 0$, 下述积分

$$\int^1 T(r)(1-r)^{\lambda+\varepsilon-1} dr < +\infty. \tag{1.58}$$

事实上, 根据 (1.57) 式, 存在值 $r_\varepsilon \geqslant 0$, 使得当 $r \geqslant r_\varepsilon$ 时, 有

$$T(r) < \left\{\frac{1}{1-r}\right\}^{\lambda+\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$T(r)(1-r)^{\lambda+\varepsilon-1} < (1-\lambda)^{\frac{\varepsilon}{2}-1}.$$

于是

$$\int^{1} T(r)(1-r)^{\lambda+\varepsilon-1} dr < \int_{r_\varepsilon}^{1} (1-r)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} dr + O(1)$$

$$= \frac{2}{\varepsilon}\left\{-(1-r)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}_{r_\varepsilon}^{1} + O(1) < +\infty.$$

反之，如果对某个值$k(k < +\infty)$，下述积分

$$\int^{1} T(r)(1-r)^{k-1} dr < +\infty, \tag{1.59}$$

则有

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\log^{+} T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqslant k. \tag{1.60}$$

事实上，由于有

$$+\infty > \int^{1} T(r)(1-r)^{k-1} dr \geqslant T(r)\int_{r}^{1} (1-r)^{k-1}$$

$$= T(r)\cdot\left\{-\frac{1}{k}(1-r)^{k}\right\}_{r}^{1}$$

$$= \frac{1}{k} T(r)(1-r)^{k},$$

我们判定(1.60)式成立.

定理1.8 设$f(z)$是圆$|z| < 1$内的一个亚纯函数.如果存在三

个判别复数a_1, a_2, a_3使得

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\log^+ n(r,X)}{\log\dfrac{1}{1-r}}\leqslant\lambda,\quad 1<\lambda<+\infty,\quad X=a_1,a_2,a_3,\tag{1.61}$$

则$f(z)$的级$\leqslant \lambda-1$.

证． 不妨假定$a_3=\infty$. 否则只需作变换$f_1(z)=\dfrac{1}{f(z)-a_3}$.根据第一基本定理，$f(z)$和$f_1(z)$有相同的级.

我们应用第二基本定理，置其中的$R=1$和$q=2$, 则有

$$m(r,\infty)+\sum_{i=1}^{2}m(r,a_i)\leqslant 2T(r,f)+S(r,f),\tag{1.62}$$

其中

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{i=1}^{2}\frac{f'}{f-a_i}\right)+O(1).$$

根据(1.47)式，当$\dfrac{1}{2}<r<\rho<1$时，有

$$S(r,f)\leqslant O\left\{\log^+ T(\rho,f)+\log\frac{1}{\rho-r}\right\}.\tag{1.63}$$

我们先任意取一个值r', $\dfrac{1}{2}<r'<1$, 然后再取一个值r, $\dfrac{1}{2}<r<r'$和置$\rho=\dfrac{r'+r}{2}$. 于是当$\eta\geqslant 1$时，有

$$(1-r)^{\eta-1}=(1+r'-2\rho)^{\eta-1}\leqslant 2^{\eta-1}(1-\rho)^{\eta-1},$$

$$(1-r)^{\eta-1}\leqslant 2^{\eta-1};$$

而当$0<\eta<1$时，有

$$(1-r)^{\eta-1}\leqslant(1-\rho)^{\eta-1},\quad (1-r)^{\eta-1}\leqslant(r'-r)^{\eta-1}.$$

因此，当$\eta>0$时，我们判定

$$\int_{\frac{1}{2}}^{r'}\log^+ T(\rho,f)(1-r)^{\eta-1}dr$$

$$\leqslant 2^{\eta+1}\int_{\frac{1}{2}}^{r'}\log^+ T(\rho,f)(1-\rho)^{\eta-1}d\rho$$

$$\leqslant 2^{\eta+1}\int_{\frac{1}{2}}^{r'}\log^+ T(r,f)(1-r)^{\eta-1}dr,$$

以及

$$\int_{\frac{1}{2}}^{r'}\log\frac{1}{\rho-r}(1-r)^{\eta-1}dr=\int_{\frac{1}{2}}^{r'}\log\frac{2}{r'-r}(1-r)^{\eta-1}dr$$

$$\leqslant\begin{cases}2^{\eta-1}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{r'}\log\frac{2}{r'-r}dr<+\infty, & \eta\geqslant 1,\\ \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{r'}\log\frac{2}{r'-r}(r'-r)^{\eta-1}dr<+\infty, & 0<\eta<1.\end{cases}$$

进一步根据(1.63)式判定

$$\int_{r_0}^{r}S(t,f)(1-t)^{\eta-1}dt$$

$$\leqslant O\left\{\int_{r_0}^{r}\log^+ T(t,f)(1-t)^{\eta-1}dt\right\}+O(1),$$

$$r_0>0. \tag{1.64}$$

另一方面，根据(1.57)和(1.58)式，对任意小的数$\varepsilon>0$，我们有

$$\int^1 n(r,X)(1-r)^{\lambda+\varepsilon-1}dr < +\infty, \quad X = a_1, a_2, a_3.$$

由于

$$(\lambda-1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} N(t,X)(1-t)^{\lambda+\varepsilon-2}dt$$

$$= -(1-t)^{\lambda-1+\varepsilon}N(t,X)\Big|_{r_0}^{r} + \int_{r_0}^{r} n(t,X)(1-t)^{\lambda-1+\varepsilon}\cdot\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant (1-r_0)^{\lambda-1+\varepsilon}N(r_0,X) + \frac{1}{r_0}\int_{r_0}^{r} n(t,X)(1-t)^{\lambda-1+\varepsilon}dt$$

$$< +\infty,$$

所以我们得到

$$\int^1 N(t,X)(1-t)^{\lambda+\varepsilon-2}dt < +\infty, \quad X = a_1, a_2, a_3. \qquad (1.65)$$

现在利用(1.62)式和第一基本定理导出

$$T(r,f) \leqslant N(r,a_1) + N(r,a_2) + N(r,a_3) + S(r,f).$$

进一步根据(1.64)和(1.65)式，我们有

$$\int^1 T(t,f)(1-t)^{\lambda+\varepsilon-2}dt < +\infty.$$

于是，根据(1.60)式，最后判定

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\log^+ T(r,f)}{\log\dfrac{1}{1-r}} \leqslant \lambda+\varepsilon-1.$$

由于ε的任意性，所以$f(z)$的级$\leqslant \lambda-1$，即定理1.8得证.

§ 1.7. 注记

1925 年 Nevanlinna 理论的创立标志着亚纯函数值分布理论近代研究的开始.经过五十多年的发展, Nevanlinna 理论已经取得了长足的进步,在许多方面都获得了十分深刻的结果.在这里,我们就基本不等式(1. 39)的重要发展予以简单的介绍.

1.7.1. Milloux 不等式

在 Nevanlinna 第二基本定理中,仅仅涉及到亚纯函数$f(z)$本身的取值情况.如果同时考虑导数$f^{(k)}(z)$ $(k\geqslant 1)$ 的取值情况,则基本不等式(1. 39)式有重要的推广.在这方面 H. Milloux[30c]和熊庆来[22a]等作了深入的研究.我们叙述 H. Milloux 给出的一种最简单的形式如下[30c]:

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个超越亚纯函数,则对任意值r, $0<r<+\infty$有

$$T(r,f)\leqslant \overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

其中

$$S(r,f)=o\{T(r,f)\},\quad r\to+\infty,$$

但可能要除去一个关于值r的例外集合E_0, $\operatorname{mes}E_0<+\infty$.

根据 Milloux 不等式,我们容易判定:如果$f(z)$只具有有限个零点和极点,则$f^{(k)}(z)$取每个有穷复数值无穷多次,但值零可能例外.

1.7.2. Hayman 不等式

1959年，W. Hayman 发现了惊人的结果，建立了下述不等式[21b]:

$$T(r,f)\leqslant\left(2+\frac{1}{f}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+S(r,f),\quad k\geqslant 1,$$

其中

$$S(r,f)=o(T(r,f)),\quad r\to+\infty.$$

事实上，在以往建立的各种不等式中，界囿特征函数 $T(r,f)$ 都至少需要涉及到三个复数值的取值情况．但是，在 Hayman 不等式中，仅仅涉及到两个值的取值情况，因此，这是一个十分本质的改进．另外，通过简单的例子（如函数 e^z）说明，如果只考虑函数 $f(z)$ 本身的取值情况，则仅仅涉及到两个复数值的取值情况是不可能界囿 $T(r,f)$ 的．Hayman 不等式大大强于 Milloux 不等式，所以也就有更强的推论：

一个超越亚纯函数 $f(z)$ 或者取每个有穷复数值无穷多次，或者其 $k(k\geqslant 1)$ 级导数 $f^{(k)}(z)$ 取每个有穷复数（值零可能例外）无穷多次．

1.7.3. 庄圻泰不等式

1929年 R. Nevanlinna 提出下述问题[32a]：在不等式

$$(q-2)T(r,f)\leqslant\sum_{i=1}^{q}N(r,a_i)-N_1(r)+S(r,f)$$

中的 q 个常数 $a_i(i=1,2,\cdots,q)$ 是否可以置换为 q 个适合条件

$$T(r,a_i(z))=o\{T(r,f)\}\quad(i=1,2,\cdots,q)$$

的亚纯函数 $a_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots, q)$?当 $q=3$ 时,这个问题容易解决.事实上,利用辅助函数

$$F(z)=\frac{f(z)-a_1(z)}{f(z)-a_2(z)}\cdot\frac{a_3(z)-a_2(z)}{a_3(z)-a_1(z)}$$

和不等式

$$T(r, F)\leqslant N(r, F)+N\left(r, \frac{1}{F}\right)+N\left(r, \frac{1}{F-1}\right)+S(r, F)$$

可以得出

$$(1-o(1))T(r, f)<\sum_{i=1}^{3}N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right)+S(r, f).$$

但是,当 $q>3$ 时,这个问题的解决相当困难.在很长时期内,除去 $a_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots, q)$ 退化为多项式的情况外,这个问题一直没有任何进展.1964 年庄圻泰利用 Wronski 行列式巧妙地解决了整函数的情况,而对于亚纯函数,则须对极点个数附加适当的限制.因此,这个问题至今未彻底解决,仍然值得研究.我们叙述庄圻泰的结果如下[10b]:

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个非常数亚纯函数,$a_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots, q)$ 是 q $(q\geqslant 2)$ 个适合条件

$$T(r, a_i)=o\{T(r, f)\}\qquad(i=1, 2, \cdots, q)$$

的相互判别的亚纯函数,则对任意值 r, $0<r<+\infty$ 有不等式

$$(q-1-o(1))T(r, f)<\sum_{i=1}^{q}\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right)$$

$$+q\overline{N}(r, f)+S(r, f),$$

其中

$$S(r, f)=O\{\log[rT(r, f)]\}\qquad(r\to+\infty),$$

但可能除去一个关于值r的例外集合E_0，其线性测度$\operatorname{mes} E_0 < +\infty$.

1.7.4. Ahlfors理论

当初，R. Nevanlinna使用了纯分析的技巧建立了著名的两个基本定理. 后来，L. Ahlfors更通过发展一种几何方法，即所谓的有限覆盖曲面论建立了平行于Nevanlinna理论的结果[1d]. 在这里，我们仅仅叙述一种最特殊的形式[21c]:

设$w=f(z)$是圆$|z|\leqslant R\,(0<R\leqslant+\infty)$上的一个非常数亚纯函数，$a_1, a_2, \cdots, a_q\,(q\geqslant 3)$是$w$-Riemann球面上的$q$个判别点. 则对任意值$r$, $0<r<R$有

$$(q-2)S(r)\leqslant\sum_{i=1}^{q}n(r,a_i)+hL(r), \tag{1.66}$$

其中h是仅仅依赖于$a_1, a_2, \cdots, a_q$的常数，以及

$$S(r)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<r}\frac{|f'(re^{i\theta})|^2}{\{1+|f(re^{i\theta})|^2\}^2}rdrd\theta, \quad z=re^{i\theta},$$

$$L(r)=\int_0^{2\pi}\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2}rd\theta.$$

我们可以证明$L(r)$起着和第二基本定理中的$S(r,f)$相类似的作用. 即当$R=+\infty$时，只要$f(z)$不退化为一个常数；或者当$R<+\infty$时，只要$f(z)$适合条件

$$\varlimsup_{r\to R}(R-r)S(r)=+\infty$$

或

$$\overline{\lim_{r\to R}}\frac{T_0(r,f)}{\log\dfrac{R}{R-r}}=+\infty,$$

则必定存在序列$\{r_n\}$，使得当$n\to+\infty$时，有$r_n\to R$和

$$\frac{L(r_n)}{S(r_n)}\to 0. \tag{1.67}$$

事实上，如果(1.67)式不成立，则存在一个值$r_0(r_0<R)$和一个常数$c(0<c<+\infty)$，使得当$r_0\leqslant r<R$时，有

$$S(r)\leqslant cL(r).$$

根据Cauchy不等式，我们导出

$$L^2(r)\leqslant\int_0^{2\pi}rd\theta\int_0^{2\pi}\frac{|f'(re^{i\theta})|^2}{\{1+|f(re^{i\theta})|^2\}^2}rd\theta=2\pi^2rS'(r).$$

于是

$$S^2(r)\leqslant 2\pi^2c^2rS'(r).$$

再通过积分，我们得到

$$\frac{1}{S(r_0)}-\frac{1}{S(r)}=\int_{r_0}^{r}\frac{S'(t)}{S(t)}dt\geqslant\frac{1}{2\pi^2c^2}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t},$$

$$S(r_0)\leqslant\frac{2\pi^2c^2}{\log\dfrac{r}{r_0}}. \tag{1.68}$$

当$R=+\infty$时，若命$r\to+\infty$，则判定$S(r_0)=0$. 由此得到$f(z)$是一个常数，但是这矛盾于假设. 另一方面，当$R<+\infty$时，类似于(1.68)式，我们有

$$S(r) \leqslant \frac{2\pi^2 c^2}{\log \frac{R}{r}} \leqslant \frac{2\pi^2 c^2 R}{R-r} \quad (r_0 \leqslant r < R)$$

$$T_0(r, f) = \int_0^r \frac{S(t)}{t} dt = T_0(r_0 f) + \int_{r_0}^r \frac{S(t)}{t} dt$$

$$\leqslant T_0(r_0, f) + 2\pi^2 c^2 \log \frac{R^2}{r_0(R-r)} \quad (r_0 \leqslant r < R).$$

于是

$$\overline{\lim_{r \to R}} (R-r) T_0(r_0 f) < +\infty,$$

$$\overline{\lim_{r \to R}} \frac{T_0(r, f)}{\log \frac{R}{R-r}} < +\infty.$$

但是这矛盾于假设.

我们称上述Ahlfors结果是一种非常特殊的形式，这是因为在Ahlfors理论中，通常考虑的不是w-Riemann球面上的q个判别点，而是这个球面上的q个互不相交的单连通闭区域$\overline{D_1}, \overline{D_2}, \cdots, \overline{D_q}$，并且在不等式中用$n(r, D_i)$代替$n(r, a_i)$. 此时$n(r, D_i)$表示当$w = f(z)$映射圆$|z| < r$到$w$-Riemann球面上时，在对区域$D_i$构成的完全覆盖中，其单连通完全覆盖的总个数. Ahlfors结果的精确陈述，请读者参见Ahlfors的原文[1d]或其它有关的著作[21c][38a]. 最后，我们应当说明Ahlfors理论不仅适用于亚纯函数类，而且适用于更广泛的函数类，例如拟保角变换类.

第二章　奇异方向[1)]

亚纯函数值分布理论包括模分布和幅角分布两个方面．模分布论研究亚纯函数在开平面上的取值情况．第一章的Picard定理、Borel定理和Nevanlinna亏量关系式都是模分布论方面的基本性结果．幅角分布论始于1919年G. Julia的工作[25a]，他证明对于一个超越整函数，在开平面上至少存在一条始自原点的半直线，使得以此半直线作分角线的任意角域内，Picard定理仍然成立．具有这种性质的半直线称为Julia方向．因此，幅角分布论研究亚纯函数在一条始自原点的半直线附近的取值情况．相应于Borel定理，1928年G. Valiron证明了Borel方向的存在性[39b]．本章不仅简单地介绍了幅角分布论方面的已有基本性结果，如Julia方向和Borel方向，而且相应于Nevanlinna亏量关系式，还初步讨论了Nevanlinna方向的存在性问题，同时本章也是以后各章的必要准备．

§2.1.关于单调函数的几个性质

整函数的最大模和亚纯函数的特征函数都是整函数和亚纯函数理论研究中的主要工具．它们都是单调增函数．因此，研究单调函数的性质具有重要的意义．以下几个关于单调函数的引理在本章或以后各章起着重要的作用．

引理2.1[2)]　设$T(r)$是区间$(r_0, +\infty)$ $(r_0 \geqslant 1)$上的一个连续非

1）本章基本文献，请参阅[10c]和[39d]．

2）引理2.1源于Hayman的一项工作[21e]，当$h_1=0$时，即得到Hayman的结果．

减趋于 ∞ 的正值函数. 并且存在一个单调趋于 ∞ 的序列 $\{r_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n)}{\log r_n}\leqslant v<+\infty. \tag{2.1}$$

对于任意取定的数 $h(0<h<+\infty)$, $h_1(0\leqslant h_1<h)$ 和 $H(v<H)$, 置

$$K=h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)H,\ K_1=h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)H,$$

$$E=E\{t\mid T(te^h)\leqslant e^K T(t)\text{ 和 }T(te^{h_1})\leqslant e^{K_1}T(t),\ t\geqslant r_0\},$$

$$E[r_0,r_n]=E\cap[r_0,r_n],$$

则有

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\log r_n}\int_{E[r_0,r_n]}\frac{dt}{t}\geqslant 1-\frac{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)v}{K}=1-\frac{v}{H}.$$

证. 任意取定数 $\eta>0$, 则根据 (2.1) 式, 存在正整数 $N=N(\eta)$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有 $T(r_n)<r_n^{v+\eta}$. 考虑不等式

$$T(te^h)<e^K T(t). \tag{2.2}$$

设 t_1 是区间 $[r_0,+\infty)$ 上不满足 (2.2) 式的最小值, t_2 是区间 $[t_1e^h,+\infty)$ 上不满足 (2.2) 式的最小值, t_3 是区间 $[t_2e^h+\infty)$ 上不满足 (2.2) 式的最小值, …, t_{m+1} 是区间 $[t_me^h,+\infty)$ 上不满足 (2.2) 式的最小值, 并且 $t_me^h\leqslant r_n$ 和 $t_{m+1}e^h\geqslant r_n$. 于是根据 (2.2) 式, 我们有

$$\begin{aligned}r_n^{v+\eta}&\geqslant T(r_n)\geqslant T(t_me^h)\geqslant e^K T(t_m)\geqslant e^K T(t_{m-1}e^h)\\&\geqslant e^{2K}T(t_{m-1})\geqslant\cdots\geqslant e^{mK}T(t_1)\geqslant e^{mK}T(r_0).\end{aligned}$$

因此

$$mK\leqslant(v+\eta)\log r_n-\log T(r_0),$$

$$m\leqslant\frac{(v+\eta)}{K}\log r_n-\frac{1}{K}\log T(r_0). \tag{2.3}$$

记$r_0 = t_0 e^h$和假设$h_1 \neq 0$. 我们考虑区间$[t_k e^h, +\infty)$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$和不等式

$$T(te^{h_1}) < e^{K_1} T(t). \tag{2.4}$$

设τ_{k1}是区间$[t_k e^{h_1}, +\infty)$上不满足(2.4)式的最小值,τ_{k2}是区间$[\tau_{k1} e^{h_1}, +\infty)$上不满足(2.4)式的最小值,$\cdots$, τ_{kl_k+1}是区间$[\tau_{kl_k} e^{h_1}, +\infty)$上不满足(2.4)式的最小值, 并且$\tau_{kl_k} e^{h_1} < t_{k+1}$, $\tau_{kl_k+1} e^{h_1} \geqslant t_{k+1}$. 最后考虑区间$[t_m e^h, +\infty)$, 并且相应地定义$\tau_{m1}, \tau_{m2}, \cdots, \tau_{ml_m}$和$\tau_{ml_m+1}$使得$\tau_{ml_m} e^{h_1} < \min\{r_n, t_{m+1}\}$和$\tau_{ml_m+1} e^{h_1} \geqslant \min\{r_n, t_{m+1}\}$. 于是我们有

$$\begin{aligned} r_n^{\nu+\eta} &\geqslant T(r_n) \geqslant T(\tau_{ml_m} e^{h_1}) \geqslant e^{K_1} T(\tau_{ml_m}) \geqslant \cdots \geqslant e^{l_m K_1} T(\tau_{m1}) \\ &\geqslant e^{l_m K_1} T(t_m e^h) \geqslant e^{l_m K_1 + K} T(t_m) \geqslant \cdots \geqslant e^{\sum_{k=0}^{m} l_k K_1 + mK} T(r_0). \end{aligned}$$

因此

$$mK + \sum_{k=0}^{m} l_k K_1 \leqslant (\nu + \eta) \log r_n - \log T(r_0),$$

$$mh + \sum_{k=0}^{m} l_k \cdot \frac{K_1}{K} \cdot h \leqslant \frac{h}{K} (\nu + \eta) \log r_n - \frac{h}{K} \log T(r_0),$$

$$\begin{aligned} &(m+1)h + \sum_{k=0}^{m} l_k h_1 + (m+1) h_1 \\ &\qquad \leqslant \frac{h}{K} (\nu + \eta) \log r_n - \frac{h}{K} \log T(r_0) + h + (m+1) h_1. \end{aligned}$$

进一步根据(2.3)式, 我们判定

$$(m+1)h + \sum_{k=0}^{m} l_k h_1 + (m+1) h_1$$

$$\leqslant \frac{h+h_1}{K}(\nu+\eta)\log r_n - \frac{h+h_1}{K}\log T(r_0) + h + h_1$$

$$= \left\{ \frac{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)}{K}(\nu+\eta) - \frac{h+h_1}{K}\cdot\frac{\log T(r_0)}{\log r_n} + \frac{h+h_1}{\log r_n} \right\}\log r_n.$$

注意到

$$\int_{E[r_0,r_n)} \frac{dt}{t} \geqslant \log\frac{r_n}{r_0} - \left\{(m+1)h + \sum_{k=0}^{m} l_k h_1 + (m+1)h_1\right\}$$

$$\geqslant \left\{ 1 - \frac{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)}{K}(\nu+\eta) + \frac{h+h_1}{K}\cdot\frac{\log T(r_0)}{\log r_n} - \frac{h+h_1}{\log r_n} - \frac{\log r_0}{\log r_n} \right\}\log r_n,$$

则得

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{\log r_n}\int_{E[r_0,r_n]} \frac{dt}{t} \geqslant 1 - \frac{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)}{K}(\nu+\eta).$$

由于η的任意性，所以当假设$h_1\neq 0$时引理2.1得证.

假设$h_1=0$. 则根据(2.3)式有

$$(m+1)h \leqslant \frac{h(\nu+\eta)}{K}\log r_n - \frac{h}{K}\log T(r_0) + h$$

$$\leqslant \left\{ \frac{h(\nu+\eta)}{K} - \frac{h}{K}\cdot\frac{\log T(r_0)}{\log r_n} + \frac{h}{\log r_n} \right\}\log r_n.$$

注意到

$$\int_{E[r_0,r_n]}\frac{dt}{t}\geqslant\log\frac{r_n}{r_0}-(m+1)h$$
$$\geqslant\left\{1-\frac{h(v+\eta)}{K}+\frac{h}{K}\cdot\frac{\log T(r_0)}{\log r_n}-\frac{h}{\log r_n}-\frac{\log r_0}{\log r_n}\right\}\log r_n,$$

则得

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\log r_n}\int_{E[r_0,r_n]}\frac{dt}{t}\geqslant1-\frac{h}{K}(v+\eta).$$

由于η的任意性,所以引理2.1完全得证.

引理2.2　设$T(r)$是一个定义在正实轴上的连续非减趋于∞的正值函数,并且满足条件:

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\mu<+\infty,\tag{2.5}$$

则对任意取定的数$h(0<h<+\infty)$和$h_1(0\leqslant h_1<h)$,必定存在序列$\{R_n\}$,使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n)}{\log R_n}=\mu\tag{2.6}$$

以及

$$T(R_ne^h)<e^{h(1+\frac{h_1}{h})^\mu}T(R_n)(1+o(1)),\ (n\to+\infty),$$

$$T(R_ne^{h_1})<e^{h_1(1+\frac{h_1}{h})^\mu}T(R_n)(1+o(1))\quad(n\to+\infty).$$

证.　置$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$,$\eta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$,根据(2.5)式,存在序列$\{r_n\}$使得

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n)}{\log r_n}=\mu,\\&r_n^{\mu-\varepsilon_n}\leqslant T(r_n)\leqslant r_n^{\mu+\varepsilon_n},\\&T(r_n^{1-\eta_n})\geqslant\{r_n^{1-\eta_n}\}^{\mu-\varepsilon_n},\\&\log r_n\geqslant\frac{n}{\eta_n}(h+h_1)\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

以下，我们只需要证明在闭区间$[r_n^{1-\eta_n},r_n]$中存在值R_n，使得(2.6)式以及

$$T(R_ne^h)\leqslant e^kT(R_n),\quad K=h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\tag{2.8}$$

和

$$T(R_ne^{h_1})\leqslant e^{K_1}T(R_n),\quad K_1=h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\tag{2.9}$$

成立.考虑不等式

$$T(R_ne^h)<e^KT(R_n).\tag{2.10}$$

设t_1是区间$[r_n^{1-\eta_n},r_n]$上不满足(2.10)式的最小值，t_2是区间$[t_1e^h,r_n]$上不满足(2.10)式的最小值，t_3是区间$[t_2e^h,r_n]$上不满足(2.10)式的最小值，…，t_{m+1}是区间$[t_me^h,r_n]$上不满足(2.10)式的最小值，并且$t_me^h<r_n$，$t_{m+1}e^h\geqslant r_n$. 于是根据(2.7)式，我们有

$$\begin{aligned}r_n^{\mu+\varepsilon_n}&\geqslant T(r_n)\geqslant T(t_me^h)\geqslant e^KT(t_m)\geqslant e^KT(t_{m-1}e^h)\\&\geqslant e^{2K}T(t_{m-1})\geqslant\cdots\geqslant e^{mK}T(r_n^{1-\eta_n})\geqslant e^{mK}r_n^{(1-\eta_n)(\mu-\varepsilon_n)}.\end{aligned}$$

因此

$$mK \leqslant \left\{\mu + \frac{2\varepsilon_n}{\eta_n} - \varepsilon_n\right\}\eta_n \log r_n,$$

$$m \leqslant \frac{1}{K}\left\{\mu + \frac{2\varepsilon_n}{\eta_n} - \varepsilon_n\right\}\eta_n \log r_n. \qquad (2.11)$$

记$r_n^{1-\eta_n} = t_0 e^h$，并且假定$h_1 \neq 0$，我们考虑闭区间$[t_k e^h, +\infty)(0 \leqslant k \leqslant m-1)$和不等式

$$T(R_n e^{h_1}) < e^{K_1} T(R_n). \qquad (2.12)$$

设τ_{k1}是区间$[t_k e^h, +\infty)$上不满足(2.12)式的最小值，τ_{k2}是区间$[\tau_{k1} e^{h_1}, +\infty)$上不满足(2.12)式的最小值，…，$\tau_{kl_k+1}$是区间$[\tau_{kl_k} e^{h_1}, +\infty)$上不满足(2.12)式的最小值，并且$\tau_{kl_k} e^{h_1} < t_{k+1}$，$\tau_{kl_k+1} e^{h_1} \geqslant t_{k+1}$. 最后考虑区间$[t_m e^h, +\infty)$并相应地定义$\tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{ml_m}, \tau_{ml_m+1}$，使得$\tau_{ml_m} e^{h_1} < \min\{r_n, t_{m+1}\}$，$\tau_{ml_m+1} e^{h_1} \geqslant \min\{r_n, t_{m+1}\}$. 于是由(2.7)式，我们有

$$\begin{aligned}
r_n^{\mu+\varepsilon_n} &\geqslant T(r_n) \geqslant T(\tau_{ml_m} e^{h_1}) \geqslant e^{K_1} T(\tau_{ml_m}) \geqslant \cdots \\
&\geqslant e^{l_m K_1} T(\tau_{m1}) \geqslant e^{l_m K_1} T(t_m e^h) \geqslant e^{l_m K_1 + K} T(t_m) \geqslant \cdots \\
&\geqslant e^{\sum_{k=0}^{m} l_k K_1 + mK} T(r_n^{1-\eta_n}) \\
&\geqslant e^{\sum_{k=0}^{m} l_k K_1 + mK} (r_n)^{(1-\eta_n)(\mu-\varepsilon_n)}.
\end{aligned}$$

因此

$$mK + \sum_{k=0}^{m} l_k K_1 \leqslant \left\{\mu + \frac{2\varepsilon_n}{\eta_n} - \varepsilon_n\right\}\eta_n \log r_n,$$

$$mh + \sum_{k=0}^{m} l_k \frac{K_1}{K} h \leqslant \frac{h}{K}\left\{\mu + \frac{2\varepsilon_n}{\eta_n} - \varepsilon_n\right\}\eta_n \log r_n,$$

$$(m+1)h+\sum_{k=0}^{m} l_k h_1+(m+1)h_1 \leqslant \left\{\frac{h}{K}\left(\mu+\frac{2\varepsilon_n}{\eta_n}-\varepsilon_n\right)\right.$$

$$\left.+\frac{h}{\eta_n \log r_n}+\frac{(m+1)h_1}{\eta_n \log r_n}\right\}\eta_n \log r_n.$$

进一步根据(2.8), (2.9)和(2.11)式,我们有

$$(m+1)h+\sum_{k=0}^{m} l_k h_1+(m+1)h_1$$

$$\leqslant \left\{1-\frac{1}{n\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}+\frac{h+h_1}{\eta_n \log r_n}\right\}\eta_n \log r_n.$$

再根据(2.7)式,得到

$$(m+1)h+\sum_{k=0}^{m} l_k h_1+(m+1)h_1 \leqslant \eta_n \log r_n.$$

于是在区间$[r_n^{1-\eta_n}, r_n]$中存在R_n使得(2.8)和(2.9)式成立.

假设$h_1=0$, 则根据(2.12)式有

$$(m+1)h<\eta_n \log r_n\left\{\frac{h}{K}\left(\mu+\frac{2\varepsilon_n}{\eta_n}-\varepsilon_n\right)+\frac{h}{\eta_n \log r_n}\right\}.$$

进一步由(2.7)和(2.8)式得到

$$(m+1)h<\eta_n \log r_n.$$

于是在区间$[r_n^{1-\eta_n}, r_n]$中也存在R_n使得(2.8)和(2.9)式成立.最后,由不等式

$$(1-\eta_n)\frac{\log T(r_n^{1-\eta_n})}{(1-\eta_n)\log r_n} \leqslant \frac{\log T(R_n)}{\log R_n} \leqslant \frac{\log T(r_n)}{(1-\eta_n)\log r_n}$$

和(2.7)式，我们判定

$$\mu=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n)}{\log R_n}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n)}{\log R_n}$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n)}{(1-\eta_n)\log r_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n)}{(1-\eta_n)\log r_n}=\mu.$$

从而$\{R_n\}$满足(2.6)式.于是引理2.2完全得证.

类似地可以证明

引理2.3 设$T(r)$是一个定义在正实轴上的连续非减趋于∞的正值函数，并且满足条件：

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\lambda<+\infty,$$

则对任意取定的数$h(0<h<+\infty)$和$h_1(0\leqslant h_1<h)$，必定存在序列$\{R_n\}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n)}{\log R_n}=\lambda,$$

以及

$$T(R_ne^h)<e^{h(1+\frac{h_1}{h})\lambda}T(R_n)(1+o(1)),\quad(n\to+\infty),$$

$$T(R_ne^{h_1})<e^{h_1(1+\frac{h_1}{h})\lambda}T(R_n)(1+o(1)),\quad(n\to+\infty).$$

引理2.4 设$T(r)$是一个定义在正实轴上的连续非减趋于∞的正值函数，并且满足条件：

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r)}{(\log r)^2}=+\infty,\tag{2.13}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\mu<+\infty,\tag{2.14}$$

则对任意取定的数 $h(0<h<+\infty)$, 必定存在序列 $\{R_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T(R_n)}{(\log R_n)^2}=+\infty\tag{2.15}$$

以及

$$T(R_ne^h)\leqslant e^{h\mu}T(R_n)(1+o(1)),\quad (n\to+\infty).$$

证． 置 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$ 和 $\eta_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}(n=2,3,\cdots)$, 则根据(2.13)和(2.14)式, 存在两个序列 $\{t_n\}$ 和 $\{r_n'\}$, $t_n<t_{n+1}\to+\infty$, $r_n'<r_{n+1}'\to+\infty(n\to+\infty)$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T(r_n')}{(\log r_n')^2}=+\infty,$$

$$(\log r_n')^{\eta_n}>\frac{n^2h}{\eta_n}\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{n}}\right),\tag{2.16}$$

$$t_n^{1-\eta_n}\geqslant r_n',\tag{2.17}$$

$$T(t_n^{1-\eta_n})\geqslant\{t_n^{1-\eta_n}\}^{\mu-\varepsilon_n},\tag{2.18}$$

$$t_n^{\mu-\varepsilon_n}\leqslant T(t_n)\leqslant t_n^{\mu+\varepsilon_n}.\tag{2.19}$$

进一步, (2.16)和(2.17)式给出

$$\log t_n\geqslant\frac{nh}{\eta_n}\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{n}}\right).\tag{2.20}$$

现在我们注意到这里的(2.18), (2.19)和(2.20)式恰好有相应于引理2.2证明中的(2.7)式($h_1=0$), 因此, 在区间 $[t_n^{1-\eta_n}, t_n]$ $(n$

$= 1, 2, \cdots$)内存在值 R_n' 使得

$$T(R_n'e^h) \leqslant e^K T(R_n'),$$

$$K = h\left(\mu + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = h\mu + o(1) \quad (n \to +\infty). \tag{2.21}$$

这说明在区间 $[r_n', t_n]$ 上满足不等式

$$T(Re^h) \leqslant e^K T(R) \tag{2.22}$$

的值 R 非空. 设 R_n 是区间 $[r_n', t_n]$ 上满足(2.22)式的最小值. 如果存在无穷多个值 n, 使得 $R_n = r_n'$, 则只要定义 $r_n' = R_n$, 即得适合引理2.4要求的一个序列 $\{R_n\}$. 因此, 我们只需要考虑对于充分大的 n, 恒有 $r_n' < R_n$ 时的情况. 当 $r_n' \leqslant R < R_n$ 时, 有

$$T(Re^h) > e^K T(R). \tag{2.23}$$

以下区分两种情况论之:

(1) 我们有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{T(R_n)}{(\log R_n)^2} = +\infty.$$

不失一般性, 可以假定

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T(R_n)}{(\log R_n)^2} = +\infty,$$

否则只须选取一个适当的子序列. 明显地, 序列 $\{R_n\}$ 即适合引理2.4的要求.

(2) 我们有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{T(R_n)}{(\log R_n)^2} < +\infty.$$

于是当 n 充分大时，有

$$T(R_n) < c(\log R_n)^2,$$

此处 $c(0 < c < +\infty)$ 是一个常数．我们定义值 k，使得

$$R_n e^{-kh} \geqslant r_n' \geqslant R_n e^{-(k+1)h}.$$

根据(2.23)式，得到

$$c(\log R_n)^2 \geqslant T(R_n) \geqslant e^K T(R_n e^{-h}) \geqslant e^{2K} T(R_n e^{-2h}) \cdot$$

$$\geqslant \cdots \geqslant e^{kK} T(R_n e^{-kh}) \geqslant e^{kK} T(r_n') \geqslant c e^{kK}.$$

于是

$$kK \leqslant 2\log\log R_n,$$

$$\log\frac{R_n}{r_n'} \leqslant (k+1)h \leqslant \left\{\frac{2h}{K} \cdot \frac{\log\log R_n}{\log R_n} + \frac{h}{\log R_n}\right\}$$

$$\cdot \frac{\log R_n}{\log R_n/r_n'} \cdot \log\frac{R_n}{r_n'}. \tag{2.24}$$

另一方面，(2.16)和(2.21)式分别给出

$$(\log r_n')^{\eta_n} > \frac{2hn}{\eta_n^2}, \quad K \geqslant \frac{2h}{\sqrt{n}}.$$

因此

$$K \geqslant \frac{4h^2 n}{\sqrt{n}\ \eta_n^2} \frac{1}{(\log r_n')^{\eta_n}} > \frac{4h^2}{\eta_n^3 (\log R_n)^{\eta_n}}.$$

将此式代入(2.24)式得到

$$1 \leqslant \left\{ \frac{\eta_n^3}{2h} \cdot \frac{\log\log R_n}{(\log R_n)^{1-\eta_n}} + \frac{h}{\log R_n} \right\} \frac{\log R_n}{\log \dfrac{R_n}{r_n'}}.$$

于是

$$R_n^{1-o(1)} \leqslant r_n' \qquad (n \to +\infty).$$

因此,我们判定

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{T(R_n)}{(\log R_n)^2} \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{T(r_n)}{(\log r_n')^2}(1-o(1))^2 = +\infty.$$

这说明情况(2)不能发生.于是引理2.4完全得证.

引理2.5 设$T(r)$是一个定义在正实轴上的连续非减趋于∞的正值函数,并且满足条件:

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r)}{\log r} = \lambda < +\infty. \tag{2.25}$$

则对任意取定的数$\eta(0<\eta<1)$,h和$h_1(0 \leqslant h_1 < h < +\infty)$,必定存在一个值$r_0$,使得当$r \geqslant r_0$时,在闭区间$[r, r^{1+\eta}]$上存在值$R$,使得

$$T(Re^h) \leqslant e^K T(R),\ K = 2h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)(\lambda+1)(1+\eta)\eta^{-1} \tag{2.26}$$

和

$$T(Re^{h_1}) \leqslant e^{K_1} T(R),\ K_1 = 2h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)(\lambda+1)(1+\eta)\eta^{-1}. \tag{2.27}$$

证.首先,根据(2.25)式,存在值r_0,使得当$r \geqslant r_0$时,有

$$1 \leqslant T(r) \leqslant r^{\lambda+1}, \tag{2.28}$$

$$h_1 < h < \frac{1}{4}\eta \log r. \tag{2.29}$$

其次，考虑不等式

$$T(Re^h) < e^K T(R). \tag{2.30}$$

设 t_1 是区间 $[r, +\infty)$ 上不满足(2.30)式的最小值，t_2 是区间 $[t_1 e^h, +\infty)$ 上不满足(2.30)式的最小值，t_3 是区间 $[t_2 e^h, +\infty)$ 上不满足(2.30)式的最小值，…，t_{m+1} 是区间 $[t_m e^h, +\infty)$ 上不满足(2.30)式的最小值，并且 $t_m e^h < r^{1+\eta}$ 和 $t_{m+1}e^h \geqslant r^{1+\eta}$. 于是，根据(2.30)式，有

$$(r^{1+\eta})^{\lambda+1} \geqslant T(r^{1+\eta}) \geqslant T(t_m e^h) \geqslant e^K T(t_m) \geqslant e^K T(t_{m-1}e^h)$$

$$\geqslant e^{2K} T(t_{m-1}) \geqslant \cdots \geqslant e^{mK} T(t_1) \geqslant e^{mK} T(r) \geqslant e^{mK}.$$

因此

$$mK \leqslant (\lambda + 1)(1 + \eta)\log r,$$

$$m \leqslant \frac{(\lambda + 1)(1 + \eta)}{K} \log r. \tag{2.31}$$

记 $r = t_0 e^h$ 和假设 $h_1 \neq 0$. 我们考虑区间 $[t_k e^h, +\infty)$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ 和不等式

$$T(Re^{h_1}) < e^{K_1} T(R). \tag{2.32}$$

设 τ_{k1} 是区间 $[t_k e^h, +\infty)$ 上不满足(2.32)式的最小值，τ_{k2} 是区间 $[\tau_{k1}e^{h_1}, +\infty)$ 上不满足(2.32)式的最小值，τ_{k3} 是区间 $[\tau_{k2}e^{h_1}, +\infty)$ 上不满足(2.32)式的最小值，…，τ_{kl_k+1} 是区间 $[\tau_{kl_k}e^{h_1}, +\infty)$ 上不满足(2.32)式的最小值，并且 $\tau_{kl_k}e^{h_1} < t_{k+1}$ 和 $\tau_{kl_k+1}e^{h_1} \geqslant t_{k+1}$. 最后考虑区间 $[t_m e^h, +\infty)$，并且相应地定义 $\tau_{m1}, \tau_{m2}, \cdots, \tau_{ml_m}$ 和 τ_{ml_m+1}，使得 $\tau_{ml_m}e^{h_1} < \min\{r^{1+\eta}, t_{m+1}\}$ 和 $\tau_{ml_m+1}e^{h_1} \geqslant \min\{r^{1+\eta},$

$t_{m+1}\}$.

于是我们有

$$
\begin{aligned}
(r^{1+\eta})^{\lambda+1} &\geqslant T(r^{1+\eta}) \geqslant T(\tau_m e^{h_1}) \geqslant e^{K_1} T(\tau_{ml_m}) \geqslant \cdots \\
&\geqslant e^{l_m K_1} T(\tau_{m1}) \geqslant e^{l_m K_1} T(t_m e^h) \geqslant e^{l_m K_1 + K} T(t_m) \geqslant \cdots \\
&\geqslant e^{\sum_{k=0}^{m} l_k K_1 + mK} T(\tau_{01}) \geqslant e^{\sum_{k=0}^{m} l_k K_1 + mK} T(r) \geqslant e^{\sum_{k=0}^{m} l_k K_1 + mK}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
mK + \sum_{k=0}^{m} l_k K_1 \leqslant (\lambda + 1)(1 + \eta)\log r,
$$

$$
mh + \sum_{k=0}^{m} l_k \frac{K_1}{K} h \leqslant \frac{h}{K}(\lambda + 1)(1 + \eta)\log r,
$$

$$
\begin{aligned}
&(m+1)h + \sum_{k=0}^{m} l_k h_1 + (m+1)h_1 \\
&\leqslant \frac{h}{K}(\lambda + 1)(1 + \eta)\log r + h + (m+1)h_1.
\end{aligned}
$$

进一步根据(2.31)式有

$$
\begin{aligned}
&(m+1)h + \sum_{k=0}^{m} l_k h_1 + (m+1)h_1 \\
&\leqslant \left\{ \frac{h\left(1 + \dfrac{h_1}{h}\right)(\lambda + 1)(1 + \eta)}{K} + \frac{h_1 + h}{\log r} \right\} \log r.
\end{aligned}
$$

再根据(2.26)和(2.29)式，我们判定

$$
(m+1)h + \sum_{k=0}^{m} l_k h_1 + (m+1)h_1 < \left\{ \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} \right\} \log r = \eta \log r.
$$

于是在区间$[r, r^{1+\eta}]$上存在值R使得(2.26)和(2.27)式成立.即当$h_1 \neq 0$时,引理2.5得证.

假设$h_1 = 0$. 则根据(2.31)式有

$$(m+1)h \leqslant \frac{h}{K}(\lambda+1)(1+\eta)\log r + h$$

$$= \left\{ \frac{h(\lambda+1)(1+\eta)}{K} + \frac{h}{\log r} \right\} \log r.$$

进一步根据(2.26)和(2.29)式,我们判定

$$(m+1)h \leqslant \left(\frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} \right) \log r < \eta \log r.$$

于是在区间$[r, r^{1+\eta}]$上存在值R使得(2.26)和(2.27)式成立,即引理2.5完全得证.

以下,我们证明一个属于另外类型的引理.这个引理源于E. Borel[6a], F. Bureau[7a]和H. Milloux[30a]的工作.

引理2.6 设$T(r)$是区间$(0, R)$上的一个非减正值函数,a和b是两个正数,并且$b \geqslant 2a$和$b \geqslant 8a^2$. 如果对于任意值r和ρ, $0 < r < \rho < R$,成立着不等式

$$T(r) < a\log^+ T(\rho) + a\log\frac{\rho}{\rho - r} + b, \tag{2.33}$$

则进一步有不等式

$$T(r) < 2a\log\frac{\rho}{\rho - r} + 2b. \tag{2.34}$$

证.首先证明下述不等式

$$e^{\frac{b}{a}} x > 8a\log x + 8b \quad (x \geqslant 2). \tag{2.35}$$

置

$$\varphi(x) = e^{\frac{b}{a}} x - 8a\log x - 8b,$$

则只需证明 $\varphi(2) > 0$, 以及当 $x \geqslant 2$ 时，有

$$\varphi'(x) = e^{\frac{b}{a}} - \frac{8a}{x} > 0.$$

事实上，由于有

$$2e^{\frac{b}{a}} > 2\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right) > \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2,$$

以及 $b > 8a^2$, 我们得到

$$1 + \frac{b}{a} > 8a,$$

$$2e^{\frac{b}{a}} > 8a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 8a + 8b > 8a\log 2 + 8b.$$

于是 $\varphi(2) > 0$, 以及当 $x \geqslant 2$ 时，有 $\varphi'(x) > 0$.

以下我们证明 (2.34) 式成立. 如果 (2.34) 式不成立，则存在两个值 r 和 ρ $(0 < r < \rho < R)$ 使得

$$T(r) \geqslant 2a\log\frac{\rho}{\rho - r} + 2b. \tag{2.36}$$

置 $r' = \frac{1}{2}(r + \rho)$. 根据 (2.33) 式有

$$T(r) < a\log^+ T(r') + a\log\frac{r'}{r' - r} + b$$

$$< a\log^+ T(r') + a\log\frac{\rho}{\rho - r'} + b.$$

另一方面，可写 (2.36) 式为

$$T(r) \geqslant 2a\log\frac{\rho}{\rho - r'} - 2a\log 2 + 2b.$$

于是

$$\log^+ T(r') > \log\frac{\rho}{\rho - r'} - 2\log 2 + \frac{b}{a} = \log\left(\frac{1}{4}e^{\frac{b}{a}}\frac{\rho}{\rho - r'}\right).$$

由于 $b \geqslant 2a$, 我们判定

$$\frac{1}{4}e^{\frac{b}{a}}\frac{\rho}{\rho - r'} > \frac{1}{4}e^{\frac{b}{a}} > \frac{1}{4}e^2 > 1.$$

因此

$$T(r') > \frac{1}{4}e^{\frac{b}{a}}\frac{\rho}{\rho - r'}.$$

进一步应用 (2.35) 式，置其中的 $x = \frac{\rho}{\rho - r'} \geqslant 2$, 则有

$$e^{\frac{b}{a}}\frac{\rho}{\rho - r'} > 8a\log\frac{\rho}{\rho - r'} + 8b.$$

于是

$$T(r') > 2a\log\frac{\rho}{\rho - r'} + 2b.$$

同理，若置 $r_n = \frac{1}{2}(r_{n-1} + \rho)\,(n = 1, 2, \cdots; r_0 = r)$, 则有

$$T(r_n) \geqslant 2a\log\frac{\rho}{\rho - r_n} + 2b,\ \rho - r_n = 2^{\frac{1}{n}}(\rho - r), \quad (2.37)$$

以及

$$T(r_n) \leqslant T(\rho) \quad (0 < r_n < \rho < R). \tag{2.38}$$

注意到当 $n \to +\infty$ 时，根据(2.37)式，$T(r_n)$ 应当趋于$+\infty$，而根据(2.38)式，$T(r_n)$ 应当有界．于是我们导出一个矛盾．从而引理2.6完全得证．

§2.2. Boutroux-Cartan 定理

2.2.1. Boutroux-Cartan 定理

定理2.1 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的几个有穷点列，则满足不等式

$$\prod_{i=1}^{n} |z - z_i| < h^n$$

的点 z 所成的集合可被包含在至多几个圆 (γ) 内，其半径之和不超过 $2eh$.

定理2.1称为 Boutroux-Cartan 定理[9a]. 以后我们简称 (γ) 为相应于这 n 个点及数 h 的欧氏除外圆.

证．记 $E = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 和用 C_{zK} 表示一个以点 z 为心，以 $K\dfrac{eh}{n}$（K 是正整数）为半径的开圆域，同时用 P_{zK} 表示 C_{zK} 包含 E 中点的个数．如果 $P_{zK} > K$，则必定存在一个正整数 K'，$K' > K$，使得 $P_{zK'} = K'$. 事实上，如果不然，则有 $P_{zK+1} > K+1$，$P_{zK+2} > K+2$，$\cdots$，$P_{zn} > n$. 但是恒有 $P_{zn} \leqslant n$. 于是得到一个矛盾．特别地，我们考虑圆 $C_{z_1 1}$，则存在正整数 K'，使得 $P_{z_1 K'} = K'$. 于是，我们证明了必定存在正整数 K $(1 \leqslant K \leqslant n)$，使得以某点 z 为心，以 $K\dfrac{eh}{n}$ 为半径的圆 C_{zK} 恰好包含 E 中 K 个点，即有 $P_{zK} = K$. 我们记具有这种性质的最

大正整数为 K_1, 相应的圆为 C_1, 再用 S_1 表示位在 C_1 中的 K_1 个点所构成的集合, 并且置 $E_1=E-S_1$. 对 E_1 作同样的讨论, 可以确定一个正整数 K_2 和相应的圆 C_2. 如此继续, 我们得到 (K_j, C_j, S_j) $(j=1, 2, \cdots, m)$, 使得

$$m \leqslant n, \ \sum_{j=1}^{m} K_j = n, \ E = \bigcup_{j=1}^{m} S_j,$$

并且有 $K_1 \geqslant K_2 \geqslant \cdots \geqslant K_m$.

以下, 我们证明, 如果 $P_{zK} \geqslant K$, 则必定存在一个点 $z_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 和一个正整数 $j (1 \leqslant j \leqslant m)$, 使得

$$z_i \in C_{zK} \cap S_j, \ K_j \geqslant K. \tag{2.39}$$

当 $K_m \geqslant K$ 时, 我们只需先取一点 $z_i \in E \cap C_{zK}$, 然后确定 z_i 所属的集合 S_j 即可. 当 $K_m < K$ 时, 设 $K_{p+1} < K \leqslant K_p \leqslant K_1$, 我们如果用 S 表示位在 C_{zK} 中的 P_{zK} 个点所构成的集合, 则不可能有 $S \subset E - \bigcup_{j=1}^{p} S_j$. 事实上, 如果不然, 必有 $K_{p+1} \geqslant K > P_{K+1}$, 即得到一个矛盾. 于是我们可以取到一点 $z_i \in S \cap \left\{ \bigcup_{j=1}^{p} S_j \right\}$, 然后确定 z_i 所属的集合 $S_j (1 \leqslant j \leqslant p)$, 如此确定的 Z_i 和 j 适合 (2.39) 式.

我们现在用 $\Gamma_j (1 \leqslant j \leqslant m)$ 表示 C_j 的同心圆, 其半径为 $2K_j \dfrac{eh}{n}$.

如果 C_{zK} 的圆心 z 不属于 $\bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j \equiv (\gamma)$, 则 C_{zK} 最多包含 E 中的 $K-1$ 个点. 事实上, 如果不然, 则存在一点 z_i 和一个整数 j 使得 (2.39) 式成立. 于是, 一方面因为点 $z_i \in C_{zK}$, 所以我们有 $|z-z_i| < K \dfrac{eh}{n}$, 另一方面因为点 $z_i \in C_j$ 和点 z 位在圆 Γ_j 外, 所以我们有 $|z-z_i| \geqslant K_j \dfrac{eh}{n}$.

于是, 进一步有

$$K_j < K. \tag{2.40}$$

但这矛盾于 (2. 39) 式.

最后, 我们任取 (r) 外的一点 z, 再将 E 中的点列依次排列为 $z'_1, z'_2, \cdots, z'_n$, 使得

$$|z - z'_1| \leqslant |z - z'_2| \leqslant \cdots \leqslant |z - z'_n|.$$

注意到 C_{z1} 不包含 E 中的点, 所以有

$$|z - z_1| \geqslant \frac{eh}{n}.$$

同样地, C_{z2} 最多包含 E 中的一个点, 所以有

$$|z - z_2| \geqslant 2\frac{eh}{n}.$$

一般地有

$$|z - z'_K| \geqslant K\frac{eh}{n}, \quad (1 \leqslant K \leqslant n).$$

于是

$$\prod_{i=1}^{n} |z - z_i| \geqslant n! \left(\frac{eh}{n}\right)^n > h^n.$$

即定理 2. 1 得证.

我们再对定理 2. 1 作一点补充说明. 在 (γ) 所表示的 m 个除外圆 $\Gamma_j (1 \leqslant j \leqslant m)$ 中, 可以认为这 m 个闭圆域 $\overline{\Gamma}_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 彼此互不相交. 事实上, 如果不然, 设 $\overline{\Gamma}_j$ 和 $\overline{\Gamma}_{j'} (1 \leqslant j \neq j' \leqslant m)$ 相交, 我们可以作一个包含 Γ_j 和 $\Gamma_{j'}$ 在自己内部的开圆域 Γ. 明显地, Γ 的半径不超过 Γ_j 和 $\Gamma_{j'}$ 的半径之和. 于是, 若用 Γ 代替 (γ) 中的 Γ_j 和 $\Gamma_{j'}$, 则定理 2. 1 的结论仍然成立. 在以后, 当应用定理 2. 1 时, 我们总是认

为(γ)所表示的除外圆之间互不相交也不相外切.

2.2.2. 推广

在球面距离意义之下,Boutroux-Cartan 定理显然也是成立的.

定理2.2 设$z_1, z_2, \cdots, z_n$是 Riemann 球面上的n个点,则满足不等式

$$\prod_{i=1}^{n} |z, z_i| < h^n$$

的点z所成的集合,可被包含在至多几个互不相交也不相外切的圆(γ)内,其球面半径之和不超过$2eh$.

H. Milloux 引进了一种伪非欧距离的概念[30b],并进而推广了 Boutroux-Cartan 定理.设z和z'是单位圆$|z|<1$内的两个点,H. Milloux 定义它们间的伪非欧距离

$$|(z, z')| = \left|\frac{z-z'}{1-\bar{z}'z}\right|.$$

明显地有$0 \leqslant |(z, z')| \leqslant 1$,以及伪非欧距离$|(z, z')|$在变单位圆为其自身的分式线性变换之下保持不变.我们任取一个点z_0, $|z_0|<1$和一个值r, $0<r<1$.若用C表示适合条件$|(z, z_0)|<r$的点z所成的集合,我们称C是一个以z_0为伪非欧圆心,以r为伪非欧半径的伪非欧圆.事实上,容易验证如此定义的伪非欧圆C恰好也是一个通常意义下的欧氏圆.当然,两种意义下的圆心和半径并不相同,只有圆心位在原点$z=0$时,两者才无区别.

在上述意义下,H. Milloux 对 Boutroux-Cartan 定理作了如下推广[30b].

定理2.3 设$z_1, z_2, \cdots, z_n$是单位圆$|z|<1$内的n个点.则满足不等式

$$\prod_{i=1}^{n} |(z, z_i)| < h^n, \quad \left(h < \frac{1}{2e}\right)$$

的点 z（位在单位圆 $|z|<1$ 内）所构成的集合，可包含在至多 n 个圆 (γ) 内（这些圆亦都位在圆 $|z|<1$ 内），其伪非欧半径之和不超过 $2eh$.

以后，我们简称 (γ) 是相应于这 n 个点及数 h 的伪非欧除外圆.

事实上为了证明定理2.3，我们只需要重复定理2.1的证明过程.但是，为了导出相应的(2.40)式，我们需要作一点说明.这是因为在伪非欧距离意义下，下述事实并不显然：当 $z_i \in C_j$ 和 z 位在圆 Γ_j 外时有 $|(z, z_j)| \geq K_j \frac{eh}{n}$. 因此，我们需要证明，如果 C 表示一个以 z_0（$|z_0|<1$）为伪非欧圆心，以 $\gamma\left(\gamma<\frac{1}{2}\right)$ 为伪非欧半径的圆，以及 C' 表示一个以 z_0 为伪非欧圆心，以 $2r$ 为伪非欧半径的同心圆，则 C' 外任意一点 z 到圆 C 内或者到圆 C 的边界上一点 z' 的伪非欧距离 $|(z, z')| \geq r$. 为此，我们只需要证明，如果 Γ 表示一个以 z 为伪非欧圆心，以 r 为伪非欧半径的圆，则圆 Γ 和圆 C 不相交也不相外切.进一步，如果注意到 $|(z, z_0)| \geq 2r$，则只需要证明，若 Γ 和 C 相交，则必有 $|(z, z_0)|<2r$. 现在，我们证明一个更为一般的事实：

设 Γ' 和 Γ'' 分别是以 z' 和 z'' 为伪非欧圆心，以 r_1 和 r_2（$r_1+r_2<1$）为伪非欧半径的两个伪非欧圆.如果 Γ' 和 Γ'' 相交或者 Γ' 和 Γ'' 相外切，则有 $|(z', z'')|<r_1+r_2$.

首先，我们证明 Γ' 和 Γ'' 相互外切时的情况.不失一般性，可以设 $z'=0$ 和 z'' 位在正实轴上.否则，只须作一个适当的保持单位圆 $|z|<1$ 不变的分式线性变换.再设正实轴上的点 x 是 Γ' 和 Γ'' 的切点.于是我们判定

$$|(z', x)| = x = r_1,$$

$$|(x, z'')| = \frac{z''-x}{1-xz''} = r_2,$$

$$|(z', z'')| = z'' = \frac{r_1 + r_2}{1 + r_1 r_2} < r_1 + r_2.$$

其次，我们证明 Γ' 和 Γ'' 相交时的情况．同样地，可以设 $z' = 0$ 和 z'' 位在正实轴上．再设 Γ' 与正实轴的交点为 x_1，以及 Γ'' 与正实轴的一个交点为 x_2，并且 x_2 位在 z'' 的左方．于是我们判定

$$x_2 < x_1,\ |(z', x_1)| = x_1 = r_1,\ |(x_2, z'')| = \frac{z'' - x_2}{1 - x_2 z''} = r_2,$$

$$|(z', z'')| = z'' = \frac{r_2 + x_2}{1 + r_2 x_2} \leqslant \frac{r_2 + x_1}{1 + x_1 r_2} = \frac{r_1 + r_2}{1 + r_1 r_2} < r_1 + r_2.$$

上述讨论说明定理2.3成立．

同样地，我们也总可以认为定理2.3中的(γ)所表示的这些伪非欧除外圆之间互不相交也不相外切．但是，我们需要补充说明下述事实：

设 Γ' 和 Γ'' 分别是以 z' 和 z'' 为伪非欧圆心，以 r_1 和 r_2 $(r_1 + r_2 < 1)$ 为伪非欧半径的两个伪非欧圆，如果 Γ' 和 Γ'' 相交或者 Γ' 和 Γ'' 相互外切，则一定存在一个圆 Γ'''，使得 Γ''' 包含 Γ' 和 Γ'' 在自己内部，并且其伪非欧半径 $r_3 < r_1 + r_2$.

事实上，根据初等几何的知识，我们知道在单位圆 $|z| < 1$ 内存在一个与圆 Γ' 和 Γ'' 均相内切的 Γ'''．记 Γ''' 的伪非欧半径为 r_3 $(r_3 < 1)$．以下，只需证明 $r_3 < r_2 + r_1$．我们不妨认为 Γ''' 的伪非欧圆心位在原点 $z = 0$，z' 和 z'' 位在实轴上，并且 $z' < z''$.

再设 Γ' 与实轴相交，其位在 z' 右边的交点为 x_1，Γ'' 与实轴相交，其位在 z'' 左边的交点为 x_2．根据假设，Γ' 和 Γ'' 相交或 Γ' 和 Γ'' 相外切，所以有 $x_2 \leqslant x_1$．进一步，按照定义，我们有

$$x_1 = \frac{r_1 + z'}{1 + r_1 z'},\ x_2 = \frac{z'' - r_2}{1 - r_2 z''},\ z' = \frac{r_1 - r_3}{1 - r_1 r_3},\ z'' = \frac{r_3 - r_2}{1 - r_2 r_3}.$$

于是

$$\frac{z''-r_2}{1-r_2z''}\leqslant\frac{r_1+z'}{1+r_1z'},$$

$$(r_1+r_2)(1+r_1r_2)r_3^2-[(1+r_1^2)(1+r_2^2)+4r_1r_2]r_3$$

$$+(r_1+r_2)(1+r_1r_2)\geqslant 0.$$

现在,我们考虑如下的一个关于 R 的二次三项式:

$$f(R)=(r_1+r_2)(1+r_1r_2)R^2-[(1+r_1^2)(1+r_2^2)$$

$$+4r_1r_2]R+(r_1+r_2)(1+r_1r_2).$$

设 $f(R)$ 的两个根为 R_1 和 R_2. 容易看出 $R_1=\frac{1}{R_2}$. 于是可设 $R_1\leqslant 1\leqslant R_2$. 当 $R\leqslant R_1$ 或 $R\geqslant R_2$ 时,有 $f(R)\geqslant 0$. 另一方面,根据 $f(r_3)\geqslant 0$ 和 $r_3<1$, 我们判定 $r_3\leqslant R_1$. 再注意到 $f(r_1+r_2)<0$, 则有 $r_3<r_1+r_2$.

最后,我们讨论一个在应用上十分重要的问题:如果把(γ)中的每个圆都通过旋转使其圆心位在正实轴上,那么,如此得到的这组圆覆盖正实轴上的一个最大区间的长度可能是多少?设这个最大区间是 (r',r'') $(r''<1)$ 和以 $|(r',r'')|$ 为伪非欧直径的圆域是 Γ, 则 Γ 的伪非欧半径

$$R=\frac{\dfrac{r''-r'}{1-r'r''}}{1+\sqrt{1-\left(\dfrac{r''-r'}{1-r'r''}\right)^2}}.$$

明显地有 $R<2eh$. 因此,如果 r' 和 r'' 满足条件

$$\frac{r''-r'}{1-r'r''+\sqrt{(1-r'r'')^2-(r''-r')^2}}\geqslant 2eh, \qquad (2.41)$$

则在圆环 $r' \leqslant |z| \leqslant r''$ 中，必定存在一个与 (γ) 无交的圆周 $|z| = r$, $r' \leqslant r \leqslant r''$. 事实上，我们可以给出一个更为实用的充分条件：

$$(1 - r') \geqslant (1 - r'')\left(\frac{1 + 2eh}{1 - 2eh}\right)^2 \tag{2.42}$$

为此，我们需要证明(2.42)式蕴含着(2.37)式. 首先我们有

$$(1 - 2eh)^2 (r'' - r') \geqslant (1 - r'') 8eh,$$

$$(1 + 2eh)^2 (r'' - r') \geqslant (1 - r') 8eh \geqslant (1 - r') r'' 8eh.$$

进而导出

$$[(1 - 2eh)^2 + (1 + 2eh)^2](r'' - r') \geqslant (1 - r'r'') 8eh,$$

$$\frac{r'' - r'}{1 - r'r''} \geqslant \frac{4eh}{1 + 4e^2h^2}. \tag{2.43}$$

于是

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r'' - r'}{1 - r'r''}\right)^2} \leqslant \sqrt{1 - \left(\frac{4eh}{1 + 4e^2h^2}\right)^2},$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{r'' - r'}{1 - r'r''}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{4eh}{1 + 4e^2h^2}\right)^2}} = \frac{1 + 4e^2h^2}{2}$$

再根据(2.43)式，我们得到

$$\frac{r'' - r''}{1 - r'r'' + \sqrt{(1 - r'r'')^2 - (r'' - r')^2}} \geqslant 2eh,$$

即(2.41)式成立.

§2.3. 圆内亚纯函数值分布的基本定理

2.3.1. 界囿定理

1928 年 G. Valion 应用 Nevanlinna 理论，证明了 Borel 方向的存在性. 为此，他首先建立了下述界囿定理[39d]:

定理2.4 设$f(z)$是圆$|z|<R(0<R<+\infty)$上的一个亚纯函数，并且

$$f(0)\neq 0,1,\infty,\quad f'(0)\neq 0.$$

则对于任意值$r(0\leqslant r<R)$，有

$$\begin{aligned}T(r,f)\leqslant &2\{N(R,0)+N(R,1)+N(R,\infty)\}\\&+4\log^+|f(0)|+2\log^+\frac{1}{R|f'(0)|}\\&+36\log\frac{R}{R-r}+5220.\end{aligned}\tag{2.44}$$

证. 首先，我们证明如果$a>e$和$x>0$，则有

$$\log x+a\log^+\log^+\frac{1}{x}\leqslant a(\log a-1)+\log^+x.\tag{2.45}$$

事实上，当$x\geqslant\frac{1}{e}$时，显然有$\log^+\log^+\frac{1}{x}=0$. 于是(2.45)式成立；当$x<\frac{1}{e}$时，(2.45)式可写为

$$\log x+a\log\log\frac{1}{x}\leqslant a(\log a-1).\tag{2.46}$$

置

$$\varphi(y)=a\log y-y-a(\log a-1)\ (y>0),$$

则有

$$\varphi'(y)=\frac{a}{y}-1,\ \varphi''(y)=-\frac{a}{y^2}.$$

于是

$$\varphi'(a)=0,\ \varphi''(a)<0.$$

由此我们判定

$$\varphi(y)=a\log y-y-a(\log a-1)\leqslant\varphi(a)=0.$$

将$\log\frac{1}{x}$代替y即得(2.46)式.

其次，我们证明(2.44)式成立.根据定理1.4，置其中的$a_1=0$, $a_2=1$，则对任意值$r(0<r<R)$有

$$m(r,0)+m(r,1)+m(r,\infty)\leqslant 2T(r,f)+S(r,f),$$

其中

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}+\frac{f'}{f-1}\right)$$

$$+2\log 6+\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}.$$

再利用(1.11)和(1.12)式，我们导出

$$T(r,f-1)\leqslant N(r,0)+N(r,1)+N(r,\infty)$$

$$+\log|f(0)(f(0)-1)|+S(r,f),$$

$$T(r,f)\leqslant N(r,0)+N(r,1)+N(r,\infty)$$

$$+\log|f(0)(f(0)-1)|+S(r,f)+\log 2. \tag{2.47}$$

进一步，根据引理1.3，对任意值$\rho\,(0<r<\rho<R)$有

$$S(r,f)\leqslant 2m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+8\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}$$

$$\leqslant 8\log^+T(\rho,f)+8\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+10\log^+\rho$$

$$+12\log^+\frac{1}{\rho-r}+2\log^+\frac{1}{r}+28+4\log^+T(\rho,f-1)$$

$$+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-1|}+5\log^+\rho+5\log^+\rho$$

$$+6\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\frac{1}{r}+14+8\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}$$

$$\leqslant 12\log^+T(\rho,f)+8\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}$$

$$+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-1|}+15\log^+\rho+18\log^+\frac{1}{\rho-r}$$

$$+3\log^+\frac{1}{r}+42+15\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}.$$

于是(2.47)式给出

$$T(r,f)\leqslant N(r,0)+N(r,1)+N(r,\infty)$$

$$+\log|f(0)(f(0)-1)|+12\log^+T(\rho,f)$$

$$+8\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-1|}$$

$$+15\log^+\rho+18\log^+\frac{1}{\rho-r}+3\log^+\frac{1}{r}$$

$$+42+16\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}.$$

注意到(2.46)式,则得

$$\log|f(0)|+8\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}$$

$$\leqslant 8(\log 8-1)+\log^+|f(0)|$$

$$\leqslant 24\log 2+\log^+|f(0)|,$$

$$\log|f(0)-1|+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-1|}$$

$$\leqslant 4(\log 4-1)+\log^+|f(0)-1|$$

$$\leqslant 9\log 2+\log^+|f(0)|.$$

因此,我们判定

$$T(r,f)\leqslant N(r,0)+N(r,1)+N(r,\infty)+2\log^+|f(0)|$$

$$+\log\frac{1}{|f'(0)|}+91+3\log^+\frac{1}{r}+18\log^+\frac{1}{\rho}$$

$$+15\log^+\rho+18\log^+\frac{\rho}{\rho-r}+12\log^+T(\rho,f).$$

特别地,当$\frac{R}{2}\leqslant r<\rho<R$时,有

$$T(r,f)<12\log^+T(\rho,f)+18\log\frac{\rho}{\rho-r}+H,$$

其中

$$H = N(R,0) + N(R,1) + N(R,\infty) + 21\log^+\frac{1}{R}$$

$$+ 15\log^+ R + 112 + 2\log^+|f(0)| + \log^+\frac{1}{|f'(0)|}.$$

现在，为了能够应用引理2. 6, 我们定义

$$T(r) = \begin{cases} T(r,f), & \dfrac{R}{2} \leqslant r < R, \\ 0, & 0 < r < \dfrac{R}{2} \end{cases}$$

和取 $a = 18$, $b = H + 2480$, 则当 $\frac{R}{2} \leqslant r < \rho < R$ 时，有

$$T(r) < 36\log\frac{\rho}{\rho - r} + 2H + 4960,$$

命 $\rho \to R$, 则得

$$T(r) \leqslant 36\log\frac{R}{R - r} + 2H + 4960.$$

然后特别地取 $r = \frac{R}{2}$, 则有

$$T\left(\frac{R}{2}, f\right) \leqslant 36\log 2 + 2H + 4960.$$

于是，当 $0 < r < R$ 时，我们判定

$$T(r, f) \leqslant 36\log\frac{R}{R - r} + 2H + 4996$$

$$\leqslant 2\{N(R,0)+N(R,1)+N(R,\infty)\}$$

$$+42\log^{+}\frac{1}{R}+30\log^{+}R+4\log^{+}|f(0)|$$

$$+2\log^{+}\frac{1}{|f'(0)|}+36\log\frac{R}{R-r}+5220. \tag{2.48}$$

为了消去$\log^{+}\frac{1}{R}$和$\log^{+}R$项，置$g(z)=f(Rz)$，则$g(z)$在圆$|z|<1$上亚纯，并且

$$g(0)=f(0),\quad g'(0)=Rf'(0),\quad T\left(\frac{r}{R},g\right)=T(r,f)$$

$$(0<r<R).$$

于是，通过对$g(z)$应用(2.48)式，我们得到

$$T(r,f)=T\left(\frac{r}{R},g\right)\leqslant 2\{N(R,0)+N(R,1)+N(R,\infty)\}$$

$$+36\log\frac{R}{R-r}+4\log^{+}|f(0)|+2\log^{+}\frac{1}{|Rf'(0)|}+5220,$$

即(2.44)式得证.

检验定理2.4的证明，我们可以看出，如果去掉$f'(0)\neq 0$的假设，则定理2.4有较一般的形式.

定理 2.5 设$f(z)$是圆$|z|<R(0<R<+\infty)$上的一个亚纯函数，并且在原点$z=0$的邻域内有展式

$$f(z)=f(0)+C_s z^s+\cdots,\quad f(0)\neq 0,1,\infty;\ C_s\neq 0,\quad S\geqslant 1.$$

则对于任意值$r(0\leqslant r<R)$有

$$T(r,f) \leqslant 2\{N(R,0)+N(R,1)+N(R,\infty)\}+36\log\frac{R}{R-r}$$

$$+4\log^+|f(0)|+2\log^+\frac{1}{R|sc_s|}+5220.$$

2.3.2. 基本定理

G. Valiron 进一步应用定理 2.4 证明了下述圆内亚纯函数值分布的基本定理[39d]. 这个基本定理在奇异方向存在性证明中起关键性作用.

定理 2.6 设$f(z)$是圆$|z|<1$内的一个非常数亚纯函数,并且

$$n(1,0)\leqslant n,\quad n(1,1)\leqslant n,\quad n(1,\infty)\leqslant n,$$

则对任意复数值 X 和任意值 $r(0<r<1)$, 有

$$n(r,\overline{x}) \leqslant \frac{1}{(1-r)^2}\left\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}\right.$$

$$\left.+C\log^+\frac{1}{|X,X(r)|}\right\}, \tag{2.49}$$

其中$0<h\leqslant 0.01$, A、B 和 C 是数字常数, 以及$x(r)$是依赖于$f(z)$和值r的一个复数值.

证. 我们首先证明如果z_1和z_2是两个有穷复数,则有

$$\log^+|z_1|+\log^+|z_2|+\log\frac{1}{|z_1-z_2|}\leqslant\log\frac{1}{|z_1,z_2|}. \tag{2.50}$$

事实上,一方面根据球面距离的定义有

$$\log\frac{1}{|z_1,z_2|}=\log\frac{1}{|z_1-z_2|}+\frac{1}{2}\log(1+|z_1|^2)$$

$$+\frac{1}{2}\log(1+|z_2|^2),$$

另一方面，当 $x \geqslant 0$ 时，我们一般地有不等式

$$\log(1+x^2) \geqslant 2\log^+ x.$$

于是(2.50)式成立.

其次，我们证明(2.49)式成立.设(γ)是相应于这$n(1,0)+n(1,1)+n(1,\infty)$个点及数$h(0<h\leqslant 0.01)$的伪非欧除外圆.根据(2.42)式，我们判定在圆$|z|\leqslant 8eh$内并在圆$(\gamma)$外存在一点$z_0$.继续作变换

$$\zeta = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

其逆变换为

$$z = \frac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}.$$

则函数$F(\zeta)=f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right)$在圆$|\zeta|<1$内亚纯，并且有

$$n(1, F=0) \leqslant n, \quad n(1, F=1) \leqslant n, \quad n(1, F=\infty) \leqslant n. \tag{2.51}$$

同时，圆(γ)变为ζ平面上相应于这

$$n(1, F=0) + n(1, F=1) + n(1, F=\infty) \tag{2.52}$$

个点及数h的伪非欧除外圆$(\gamma)_\zeta$.注意到点$\zeta=0\bar{\in}(\gamma)_\zeta$.根据不等式

$$|\zeta| \leqslant \frac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|},$$

可以判定圆$|z|<r$在ζ平面上的像域含于圆$|\zeta|\leqslant\tau$内，而

$$\tau = \frac{r+|z_0|}{1+|z_0|r}. \tag{2.53}$$

进一步根据(2.42)式，我们可以判定存在值ρ，$\frac{1+\tau}{2}\leqslant\rho\leqslant\frac{3+\tau}{4}$，使得圆周 Γ: $|\zeta|=\rho$ 与$(\gamma)_\zeta$无交.

以下我们区分三种情况讨论：

(1) 在 Γ上恒有$|F(\zeta)|>1$. 于是，明显地有

$$m\left(\rho,\frac{1}{F}\right)=0.$$

另一方面，注意到点$\zeta=0\bar{\in}(\gamma)_\zeta$，则根据(1.5)式以及(2.51)和(2.52)式有

$$\begin{aligned}
N\left(\rho,\frac{1}{F}\right)&\leqslant N\left(1,\frac{1}{F}\right)\\
&\leqslant N\left(1,\frac{1}{F}\right)+N\left(1,\frac{1}{F-1}\right)+N(1,F)\\
&\leqslant\{n(1,F=0)+n(1,F=1)\\
&\qquad+n(1,F=\infty)\}\log\frac{1}{h}\\
&\leqslant 3n\log\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

于是

$$T(\rho,F)=T\left(\rho,\frac{1}{F}\right)+\log|F(0)|\leqslant 3\mathrm{n}\log\frac{1}{h}+\log^+|F(0)|.$$

因此，当$X\neq F(0)=f(z_0)$时，我们有下述估计

$$n(r,f=X)\leqslant n(\tau,F=X)\leqslant\frac{\rho}{\rho-\tau}N\left(\rho,\frac{1}{F-X}\right)$$

$$\leqslant \frac{\rho}{\rho-\tau} T\left(\rho, \frac{1}{F-X}\right)$$

$$= \frac{\rho}{\rho-\tau}\left\{T(\rho, F-X)+\log\frac{1}{|F(0)-X|}\right\}$$

$$\leqslant \frac{2}{1-\tau}\left\{T(\rho, F)+\log^{+}|X|+\log\frac{1}{|F(0)-X|}+\log 2\right\}$$

$$\leqslant \frac{2}{1-\tau}\left\{3n\log\frac{1}{h}+\log^{+}|f(z_0)|+\log^{+}|X|\right.$$

$$\left.+\log\frac{1}{|f(z_0)-X|}+\log 2\right\}.$$

进一步根据(2.50)和(2.53)式，以及$|z_0|\leqslant 8eh(h\leqslant 0.01)$，我们判定

$$n(r,f=X)\leqslant\frac{6}{1-r}\left\{3n\log\frac{1}{h}+\log^{+}\frac{1}{|f(z_0),X|}+\log 2\right\}. \tag{2.54}$$

当$X=f(z_0)$时，(2.50)式明显地成立.

(2) 在Γ上存在一点ζ_1，使得$|F(\zeta_1)|\leqslant 1$，并且在Γ上，恒有$|F'(\zeta)|\leqslant 1$. 于是，自点ζ_1始，沿着Γ积分，我们有

$$F(\zeta)-F(\zeta_1)=\int_{\Gamma}F'(\zeta)d\zeta,$$

$$|F(\zeta)|\leqslant|F(\zeta_1)|+\int_{\Gamma}|F'(\zeta)||d\zeta|\leqslant 1+2\pi,$$

$$m(\rho, F)\leqslant\log(1+2\pi).$$

另一方面，注意到点$\zeta=0\bar{\in}(\gamma)_\zeta$，则根据(1.5)式，以及(2.51)

和(2.52)式有

$$N(\rho, F) \leqslant 3n\log\frac{1}{h}.$$

于是

$$T(\rho, F) \leqslant 3n\log\frac{1}{h} + \log(1+2\pi).$$

类似地，我们判定

$$n(r, f=X) \leqslant \frac{6}{1-r}\left\{3n\log\frac{1}{h} + \log^{+}\frac{1}{|f(z_0), X|}\right.$$

$$\left. + \log 2(1+2\pi)\right\}. \tag{2.55}$$

(3) 在 Γ 上存在两个点 ζ_1 和 ζ_2 使得 $|F(\zeta_1)| \leqslant 1$ 和 $|F'(\zeta_2)| \geqslant 1$，并且自点 ζ_1 始沿着 Γ 至点 ζ_2 恒有 $|F'(\zeta)| \leqslant 1$.

于是我们有

$$|F(\zeta_2)| \leqslant 1+2\pi.$$

作变换

$$\xi = \frac{\zeta - \zeta_2}{1 - \overline{\zeta_2}\zeta},$$

其逆变换为

$$\zeta = \frac{\xi + \zeta_2}{1 + \overline{\zeta_2}\xi},$$

则函数 $G(\xi) = F\left(\dfrac{\xi + \zeta_2}{1 + \overline{\zeta_2}\xi}\right)$ 在圆 $|\xi| < 1$ 内亚纯，并且有

$$n(1, G=0) \leqslant n, n(1, G=1) \leqslant n, n(1, G=\infty) \leqslant n.$$

同时圆$(\gamma)_\xi$变为ξ平面上相应于这

$$n(1, G=0) + n(1, G=1) + n(1, G=\infty)$$

个点及数h的伪非欧除外圆$(\gamma)\xi$. 注意点$\xi=0\bar{\in}(\gamma)\xi$, 并且有

$$|G(0)| = |F(\zeta_2)| \leqslant 1 + 2\pi,$$

$$|G'(0)| = |F'(\zeta_2)| \left\{\frac{1-|\zeta_2|^2}{|1+\bar{\zeta}_2\xi|^2}\right\}_{\xi=0}$$

$$\geqslant |F'(\zeta_2)|(1-\rho^2) \geqslant 1-\rho.$$

根据不等式

$$|\xi| \leqslant \frac{|\zeta| + |\zeta_2|}{1 + |\zeta_2||\zeta|},$$

我们可以判定圆$|\zeta| < \tau$在ξ平面上的像域含于圆$|\xi| < s$内，而

$$s = \frac{\tau+\rho}{1+\tau\rho}. \tag{2.56}$$

进一步根据(2.42)式，我们可以判定存在值ρ', $\frac{1+s}{2} \leqslant \rho' \leqslant \frac{3+s}{4}$, 使得圆周$\Gamma': |\xi| = \rho'$与$(\gamma)_\xi$无交. 现在，对$G(\xi)$应用定理**2.4**，则得

$$T(\rho', G) \leqslant 2\{N(1, G=0) + N(1, G=1) + N(1, G=\infty)\} +$$

$$4\log^+|G(0)| + 2\log^+\frac{1}{|G'(0)|} + 36\log\frac{1}{1-\rho'} + 5220$$

$$\leqslant 6n\log\frac{1}{h} + 4\log(1+2\pi) + 36\log\frac{1}{1-\rho'} + 2\log\frac{1}{1-\rho}$$

$$+5220.$$

于是

$$n(r,f=X)\leqslant n(s,G=X)\leqslant\frac{\rho'}{\rho'-s}\int_s^{\rho'}\frac{n(t,G=X)}{t}dt$$

$$\leqslant\frac{\rho'}{\rho'-s}N\left(\rho',\frac{1}{G-X}\right)\leqslant\frac{1}{\rho'-s}T\left(\rho',\frac{1}{G-X}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\rho'-s}\left\{T(\rho',G)+\log^+|G(0)|+\log\frac{1}{|G(0)-X|}+\log 2\right\}$$

$$\leqslant\frac{2}{1-s}\left\{6n\log\frac{1}{h}+36\log\frac{1}{1-\rho'}+2\log\frac{1}{1-\rho}+\log^+|G(0)|\right.$$

$$\left.+\log\frac{1}{|G(0)-X|}+4\log(1+2\pi)+\log 2+5220\right\}$$

$$\leqslant\frac{2}{1-s}\left\{6n\log\frac{1}{h}+36\log\frac{1}{1-\rho'}+2\log\frac{1}{1-\rho}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{|G(0),X|}+4\log(1+2\pi)+\log 2+5220\right\}.$$

再注意到(2. 53)和(2. 56)式有

$$1-\rho\geqslant 1-\frac{3+\tau}{4}=\frac{1-\tau}{4}\geqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-|z_0|)(1-r)}{2}\geqslant\frac{1-r}{16},$$

$$1-s=\frac{(1-\tau)(1-\rho)}{1+\tau\rho}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r}{16}\cdot(1-\tau)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r}{16}\cdot\frac{1-r}{4}=\frac{(1-r)^2}{8\times 16}.$$

$$1-\rho'\geqslant 1-\frac{3+s}{4}=\frac{1-s}{4}\geqslant\frac{(1-r)^2}{32\times 16},$$

则进一步判定

$$n(r, f=X) \leqslant \frac{16^2}{(1-r)^2}\left\{6n\log\frac{1}{h} + 36\log\frac{32\times 16}{(1-r)^2} + 2\log\frac{16}{1-r}\right.$$

$$\left. + \log^+\frac{1}{|f(z_2), X|} + 4\log(1+2\pi) + \log 2 + 5220\right\}$$

$$= \frac{16^2}{(1-r)^2}\left\{6n\log\frac{1}{h} + 74\log\frac{2}{1-r} + \log^+\frac{1}{|f(z_2), X|}\right.$$

$$\left. + 72\log 16 + 2\log 8 + 4\log(1+2\pi) + \log 2 + 5220\right\}, \qquad (2.57)$$

其中 z_2 是点 ζ_2 在 z 平面上的对应点.

注意到当 $0\leqslant r<1$ 时,恒有 $\log\frac{2}{1-r}>\log 2>0$. 于是我们可以加大 $\log\frac{2}{1-r}$ 项的系数,用以消去不等式中的常数项.于是(2.54),(2.55)和(2.57)式给出(2.49)式,即定理2.6完全得证.

借助于变换

$$F(z) = \frac{(f(z)-a)(c-b)}{(f(z)-b)(c-a)}, \qquad (2.58)$$

我们可以得到更一般的形式:

定理 2.7 设 $f(z)$ 是圆 $|z|<1$ 内的一个非常数亚纯函数, a, b, c 是三个判别复数,其相互球距离 $\geqslant d\left(0<d\leqslant\frac{1}{2}\right)$, 并且

$$n(1,a)\leqslant n, n(1,b)\leqslant n, n(1,c)\leqslant n,$$

则对任意复数值 X 和任意值 $r(0<r<1)$ 有

$$n(r,X)\leqslant\frac{1}{(1-r)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-r} + C\log\frac{1}{d}\right.$$

$$+D\log^+\frac{1}{|X,X(r)|}\Big\}.$$

其中 $0<h\leqslant 0.01$, A, B, C 和 D 是数字常数, 以及 $X(r)$ 是依赖于 $f(z)$ 及值 r 的一个复数值.

事实上, 在 a, b, c 三个值中, 至多有一个值、不妨设为 c, 使得 $|c,\infty|<\frac{d}{3}$. 如果不然, 则 a 和 c 分别有 $|a,\infty|<\frac{d}{3}$ 和 $|c,\infty|<\frac{d}{3}$. 于是

$$\begin{aligned}|a,c|&=\frac{|a-c|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|c|^2}}\\&\leqslant\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right|\leqslant\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|c|}\\&=\frac{|a,\infty|}{\sqrt{1-|a,\infty|^2}}+\frac{|c,\infty|}{\sqrt{1-|c,\infty|^2}}\\&\leqslant 2\cdot\frac{d/3}{\sqrt{1-d^2/9}}\leqslant\frac{4}{\sqrt{35}}d.\end{aligned}$$

但是这矛盾于 $|a,c|\geqslant d$ 的假设. 因此, 我们可以假设 $|a,\infty|\geqslant\frac{d}{3}$ 和 $|b,\infty|\geqslant\frac{d}{3}$, 从而有下述估计: $|a|<\frac{3}{d}$ 和 $|b|<\frac{3}{d}$. 我们进一步不妨假设 $\left|\frac{c-b}{c-a}\right|\leqslant 1$, 否则在(2.58)中只须对调 a, b 的位置. 现在对 $F(z)$ 应用定理2.6, 则得

$$n(r,f=X)=n(r,F=y)$$

$$\leqslant\frac{1}{(1-r)^2}\left\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}+C'\log^+\frac{1}{|Y,Y(r)|}\right\},$$

其中

$$Y=\frac{X-a}{X-b}\cdot\frac{c-b}{c-a},\qquad Y(r)=\frac{X(r)-a}{X(r)-b}\cdot\frac{c-b}{c-a}.$$

以下我们只需说明

$$C'\log^+\frac{1}{|Y,Y(r)|}\leqslant C\log\frac{1}{d}+D\log^+\frac{1}{|X,X(r)|}.$$

事实上，我们有

$$|Y,Y(r)|=\frac{\left|\frac{X-a}{X-b}-\frac{X(r)-a}{X(r)-b}\right|\left|\frac{c-b}{c-a}\right|}{\sqrt{1+\left|\frac{c-b}{c-a}\right|^2\left|\frac{X-a}{X-b}\right|^2}\sqrt{1+\left|\frac{c-b}{c-a}\right|^2\left|\frac{X(r)-a}{X(r)-b}\right|^2}}$$

$$\geqslant\frac{|X-X(r)|\,|a-b|\cdot\left|\frac{c-b}{c-a}\right|}{\sqrt{|X-b|^2+|X-a|^2}\sqrt{|X(r)-b|^2+|X(r)-a|^2}}.$$

注意到

$$|X-b|^2\leqslant|X|^2+|b|^2+2|X|\,|b|\leqslant 2+|X|^2+|b|^2$$

$$+2|X|^2|b|^2\leqslant 2(1+|X|^2)(1+|b|^2)$$

$$|X-b|^2+|X-a|^2\leqslant 2(1+|X|^2)\{1+|a|^2+1+|b|^2\}$$

$$\leqslant 4(1+|X|^2)(1+|a|^2)(1+|b|^2),$$

以及

$$|X(r)-b|^2+|X(r)-a|^2$$

$$\leqslant 4(1+|X(r)|^2)(1+|a|^2)(1+|b|^2),$$

则得

$$|Y, Y(r)| \geqslant \frac{1}{4} \cdot |X, X(r)||a, b| \cdot \frac{\left|\dfrac{c-b}{c-a}\right|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}.$$

于是

$$C' \log^+ \frac{1}{|Y, Y(r)|} \leqslant C' \left\{ \log^+ \frac{1}{|X, X(r)|} + \log^+ \frac{1}{d} \right.$$

$$\left. + \log^+ \left|\frac{c-a}{c-b}\right| + 2\log 2 + \log^+ \sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)} \right\}.$$

再注意到

$$\log^+ \left|\frac{c-a}{c-b}\right| \leqslant \log^+ \frac{1}{|c-b|} + \log^+ |a| + \log^+ |b| + 2\log 2$$

$$\leqslant \log^+ \frac{1}{d} + 2\log^+ \frac{3}{d} + 2\log 2$$

$$\leqslant 3\log \frac{1}{d} + 2\log 6,$$

以及

$$\log \sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)} \leqslant \log^+ |a| + \log^+ |b| + \log 2$$

$$\leqslant 2\log \frac{1}{d} + 2\log 6,$$

则导出

$$C' \log \frac{1}{|Y, Y(r)|} \leqslant C' \log^+ \frac{1}{|X, X(r)|} + 6C' \log \frac{1}{d}$$

$$+ 6C' \log 6.$$

由于 $\log\frac{1}{d} \geqslant \log 2$, 我们只要适当加大 $\log\frac{1}{d}$ 项的系数,就可以消去常数项,从而判定

$$C'\log^{+}\frac{1}{|Y, Y(r)|} \leqslant C\log\frac{1}{d} + D\log^{+}\frac{1}{|X, X(r)|}.$$

其中 C, D 是数字常数. 于是定理 2. 7 得证.

2. 3. 3. Schottky 型定理

首先,我们利用证明基本定理的方法,导出两个关于特征函数的界囿定理. 这两个结果将在第三章和第五章得到应用.

定理 2. 8[43a] 设 $f(z)$ 是圆 $|z|<1$ 内的一个亚纯函数,并且有

$$n(1, f=0) \leqslant n,\ n(1, f=1) \leqslant n,\ n(1, f=\infty) \leqslant n.$$

再设 (r) 是相应于这

$$n(1, f=0) + n(1, f=1) + n(1, f=\infty)$$

个点及数 $h(0<h\leqslant 0.01)$ 的伪非欧除外圆,并且假定原点 $z=0\bar{\in}(r)$ 和 $|f(0)|\leqslant$, 则对任意值 $r(0\leqslant r<1)$, 有不等式

$$T(r,f) \leqslant \frac{1}{(1-r)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-r}\right\}, \tag{2. 59}$$

其中 A, B 为数字常数.

证. 任意取定一个值 $r(0<r<1)$, 根据 (2. 42) 式和 $0<h\leqslant 0.01$ 可以判定存在值 $\rho, r\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}(1+r)$, 使得圆周 $\Gamma: |z|=\rho$ 与圆 (γ) 无交. 明显地有

$$T(r,f) \leqslant T(\rho,f). \tag{2. 60}$$

设圆周 Γ 上的一点 z_1 有

$$|f(z_1)| = \max_{|z|=\rho} |f(z)|,$$

再用直线连接点 z_1 与原点 $z=0$, 若遇到圆 (γ), 则含于圆 (γ) 内的线段用 (γ) 的较小的圆弧取代, 如是求得一条曲线 L, 其长度 $\leqslant 2 + 2\pi eh < 4$.

以下寻求 $T(\rho,f)$ 的一个上界. 为此, 我们区分两种情况讨论:

(1) 在 L 上恒有 $|f'(z)| \leqslant 1$. 我们自原点 $z=0$ 始沿 L 积分至 z_1 点可得

$$|f(z_1)| \leqslant |f(0)| + \left| \int_L f'(z)dz \right| \leqslant 5,$$

即有

$$m(\rho,f) \leqslant \log 5.$$

另一方面, 注意到点 $z=0\bar{\in}(r)$, 又有

$$N(\rho,f) \leqslant N(1,f) \leqslant 3n \log \frac{1}{h}.$$

于是

$$T(\rho,f) \leqslant 3n \log \frac{1}{h} + \log 5. \tag{2.61}$$

(2) 在 L 上存在一点 z_2, 使得 $|f'(z_2)| \geqslant 1$, 并且自原点 $z=0$ 始沿着 L 至 z_2 点, 恒有 $|f'(z)| \leqslant 1$. 于是我们判定 $|f(z_2)| \leqslant 5$. 继续变换

$$\zeta = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z},$$

其逆变换为

$$z=\frac{\zeta+z_2}{1+\bar{z}_2\zeta},$$

则函数 $F(\zeta)=f\left(\frac{\zeta+z_2}{1+\bar{z}_2\zeta}\right)$ 在圆 $|\zeta|\leqslant 1$ 上亚纯，并且有

$$n(1,F=0)\leqslant n,\ n(1,F=1)\leqslant n,\ n(1,F=\infty)\leqslant n.$$

同时圆 (γ) 变为 ζ 平面上相应于这

$$n(1,F=0)+n(1,F=1)+n(1,F=\infty)$$

个点及数 h 的伪非欧除外圆 $(\gamma)_\zeta$. 注意点 $\zeta=0\bar{\in}(\gamma)_\zeta$, 并且有

$$|F(0)|=|f(z_2)|\leqslant 5,\ |F'(0)|=|f'(z_2)|(1-|z_2|^2)\geqslant 1-\rho.$$

根据不等式

$$|\zeta|\leqslant\frac{|z|+|z_2|}{1+|z_2||z|},$$

可以判定圆 $|z|<\rho$ 在 ζ 平面上的像域含于圆 $|\zeta|\leqslant t$ 内，而

$$t=\frac{2\rho}{1+\rho^2}. \tag{2.62}$$

现在，我们应用定理 2.4, 则得

$$T\left(\frac{1+t}{2},F\right)\leqslant 2\left\{N\left(1,\frac{1}{F}\right)+N\left(1,\frac{1}{F-1}\right)+N(1,F)\right\}$$

$$+4\log^+|F(0)|+2\log^+\frac{1}{|F'(0)|}+36\log\frac{2}{1-t}+5220$$

$$\leqslant 6n\log\frac{1}{h}+74\log\frac{1}{1-\rho}+4\log 5+5220. \tag{2.63}$$

以下，我们分别用 $a_i(i=1,2,\cdots p;p=n(1,F=0))$，$b_j(j=1,2,\cdots q;q=n(1,F=1))$ 和 $c_k(k=1,2,\cdots l;l=n(1,F=\infty))$ 表示 $F(\zeta)$ 在圆 $|\zeta|<1$ 内的零点，1－值点和极点．置

$$I(\zeta)=\prod_{i=1}^{p}\frac{\zeta-a_i}{1-\bar{a}_i\zeta},\quad J(\zeta)=\prod_{j=1}^{q}\frac{\zeta-b_j}{1-\bar{b}_j\zeta},\quad K(\zeta)=\prod_{k=1}^{l}\frac{\zeta-c_k}{1-\bar{c}_k\zeta}.$$

则函数 $\Phi(\zeta)=K(\zeta)F(\zeta)$ 在圆 $|\zeta|<1$ 内全纯，且有

$$T\left(\frac{1+t}{2},\Phi\right)\leqslant T\left(\frac{1+t}{2},F\right).$$

于是，根据 (1.21) 和 (2.63) 式有

$$\log M(t,\Phi)\leqslant\frac{\frac{1+t}{2}+t}{\frac{1+t}{2}-t}T\left(\frac{1+t}{2},\Phi\right)\leqslant\frac{4}{1-t}T\left(\frac{1+t}{2},F\right)$$

$$\leqslant\frac{4}{1-t}\left\{6n\log\frac{1}{h}+74\log\frac{2}{1-\rho}+4\log5+5220\right\}.$$

进一步根据 (2.62) 式和 $\rho\leqslant\frac{1}{2}(1+r)$，我们得到

$$\log M(t,\Phi)\leqslant\frac{32}{(1-r)^2}\left\{6n\log\frac{1}{h}+74\log\frac{2}{1-r}\right.$$

$$\left.+74\log2+4\log5+5220\right\}.\tag{2.64}$$

设 ζ_1 是 ζ 平面上点 z_1 的对应点，因此 $\zeta_1\bar{\in}(\gamma)_\zeta$．于是我们有

$$\log\frac{1}{|k(\zeta_1)|}\leqslant\log\frac{1}{|I(\zeta_1)J(\zeta_1)k(\zeta_1)|}\leqslant3n\log\frac{1}{h}.$$

进一步根据 (2.64) 式得到

$$\log|f(z_1)|=\log|F(\zeta_1)|=\log|\Phi(\zeta_1)|+\log\frac{1}{|K(\zeta_1)|}$$

$$\leqslant \log M(t,\Phi)+3n\log\frac{1}{h}$$

$$\leqslant \frac{32}{(1-r)^2}\left\{6n\log\frac{1}{h}+74\log\frac{2}{1-r}+74\log 2\right.$$

$$\left.+4\log 5+5220\right\}+3n\log\frac{1}{h}.$$

再注意到

$$m(\rho,f)\leqslant \log^+|f(z_1)|,$$

以及

$$N(\rho,f)\leqslant 3n\log\frac{1}{h},$$

则判定

$$T(\rho,f)\leqslant \frac{1}{(1-r)^2}\left\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}\right\}. \qquad (2.65)$$

其中 A, B 是数字常数.

最后, (2.60), (2.61) 和 (2.65) 式给出 (2.59) 式, 即定理2.8完全得证.

定理2.9[42a] 设 $f(z)$ 是圆 $|z|<1$ 内的一个亚纯函数, 原点 $z=0$ 与 $f(z)$ 的0, 1, ∞ 诸值点的距离 $\geqslant d\left(0<d<\frac{1}{2}\right)$.

置

$$n = n(1, f=0) + n(1, f=1) + n(1, f=\infty),$$

则对于任意值 r, $0<r<1$ 有

$$T(r,f) < \frac{c(n+1)}{1-r}\left\{\log\frac{n+1}{d} + \log\frac{2}{1-r}\right\} + \log^{+}|f(0)|,$$

其中 c 是数字常数.

证. 我们以位在圆 $|z|<1$ 内 $f(z)=0, 1, \infty$ 的每个值点为心，以 $\dfrac{d(1-\mathrm{r})}{12(n+1)}$ 为半径作除外圆，记全体除外圆为 (γ). 明显地，原点 $z=0\bar{\in}(\gamma)$, 以及存在值 ρ, $r\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}(1+\gamma)$ 使得圆周 Γ: $|z|=\rho$ 与圆 (γ) 无交，并且有

$$T(r,f) \leqslant T(\rho, f).$$

设圆周 Γ 上的一点 z_1 有

$$|f(z_1)| = \operatorname*{Max}_{|z|=\rho}|f(z)|,$$

用直线连接点 z_1 和原点 $z=0$, 若遇圆 (γ), 则以 $(\bar{\gamma})$ 的圆弧取代，于是求得一条曲线 L, 其长度 $\leqslant 2$.

以下，我们寻求 $T(\rho, f)$ 的一个上界. 为此，我们区分两种情况讨论：

(1) 在 L 上恒有 $|f'(z)|\leqslant 1$. 我们自原点 $z=0$ 始沿着 L 积分至 z_1 点可得

$$|f(z_1)| \leqslant |f(0)| + \left|\int_L f'(z)dz\right| \leqslant |f(0)| + 2.$$

即有

$$m(\rho, f) \leqslant \log^+ |f(0)| + 2\log 2,$$

另一方面，注意到原点 $z=0$ 到 $f(z)=0, 1, \infty$ 诸值点的距离 $\geqslant d$, 又有

$$N(\rho, f) \leqslant n \log \frac{1}{d}.$$

于是

$$T(r, f) \leqslant T(\rho, f) \leqslant n \log \frac{1}{d} + 2\log \frac{2}{1-r} + \log^+ |f(0)|,$$

即对情况(1)定理2.9成立.

(2)在 L 上存在一点 z_2, 使得 $|f'(z_2)| > 1$, 并且自原点 $z=0$ 始沿着 L 至 z_2 点恒有 $|f'(z)| \leqslant 1$.

我们以 z_2 为心，以 $R = \frac{3+r}{4} - |z_2|$ 为半径作圆 Γ'. 注意到 $|z_1 - z_2| < (\rho - |z_2|) + \frac{d(1-r)}{6(n+1)}$, 并且以 $m(z_2, R, f)$ 表示 $f(z)$ 关于圆 $|z - z_2| = R$ 的对数均值，以 b_ν 表示 $f(z)$ 在圆 $|z - z_2| < R$ 内的极点，则根据 Poisson-Jensen 公式有

$$\begin{aligned}
m(\rho, f) &\leqslant \log^+ |f(z_1)| \\
&\leqslant \frac{2}{R - \left(\rho - |z_2| + \frac{d(1-r)}{6(n+1)}\right)} m(z_2, R, f) \\
&\quad + \sum_\nu \log \left| \frac{R^2 - \overline{(b_\nu - z_2)}\,(z_1 - z_2)}{R(z_1 - b_\nu)} \right| \\
&< \frac{12}{1-r} m(z_2, R, f) + n(z_2, R, f=\infty) \log \frac{24(n+1)}{d(1-r)}.
\end{aligned}$$

进一步应用定理2.4估计$m(z_2, R, f)$. 置定理2.4中的$R = 1 - |z_2|$, 并注意到$|f'(z_2)| > 1$, 点z_2距0, 1, ∞诸值点的距离$\geq \dfrac{d(1-r)}{12(n+1)}$, 以及

$$|f(z_2)| \leq |f(0)| + 2,$$

则有

$$m(z_2, R, f) \leq c(n+1)\left\{\log\frac{n+1}{d} + \log\frac{2}{1-r} + \log^+|f(0)|\right\},$$

其中c是一个适当大的数字常数. 于是

$$m(\rho, f) \leq \frac{c(n+1)}{1-r}\left\{\log\frac{n+1}{d} + \log\frac{2}{1-r} + \log^+|f(0)|\right\}.$$

再注意到

$$N(\rho, f) \leq n\log\frac{1}{d},$$

则得

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq T(\rho, f) \\ &\leq \frac{c(n+1)}{1-r}\left\{\log\frac{n+1}{d} + \log\frac{2}{1-r} + \log^+|f(0)|\right\}. \end{aligned}$$

其中c是数字常数. 当$|f(0)| < 1$时, 定理2.9明显成立; 当$|f(0)| > 1$时, 我们代替$f(z)$而考虑$\dfrac{1}{f(z)}$, 并注意到

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|,$$

则可以判定定理 2.9 成立.

最后,为了证明 Julia 方向的存在性,我们证明下述 Schottky 型定理.

定理2.10[39d] 设$f(z)$是圆$|z|<1$内的一个非常数亚纯函数,a, b, c是三个判别复数,其相互球距离$\geq d$, $0<d\leq\frac{1}{2}$,并且有

$$n(1,a)\leq n, \quad n(1,b)\leq n, \quad n(1,c)\leq n.$$

再设圆$|z|<\tau<1$内满足不等式$|f(z)|\leq M<+\infty$的点的集合不能被包含在半径之和至多为$2eh(0<h<0.01, 8eh<\tau)$的$3n$个圆内,则对于圆$|z|\leq r(\tau<r<1)$内的点z有

$$\log|f(z)|\leq\frac{1}{(1-r)^2}\left\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}\right.$$

$$\left.+C\log^+M+D\log\frac{1}{d}\right\}\left\{1+\log\frac{2}{H}\right\},$$

至多除去一些半径之和不超过$2eH<1(h<H)$的除外圆,其中A, B, C, D是正的数字常数.

证. 设(γ)是相应于这$n(1,f=a)+n(1,f=b)+n(1,f=c)$个点及数$h$的伪非欧除外圆.$(\gamma)$所含圆的个数至多为$3n$.另外注意到一个伪非欧圆本身就是一个欧氏圆,并且这个圆的欧氏半径不超过它的伪非欧半径.所以圆(γ)的欧氏半径之和不超过$2eh$.于是根据假设在圆$|z|\leq\tau$内并在圆(γ)外存在一点z_0,使得$|f(z_0)|\leq M$.以下,我们区分两种情况讨论:

(1) 在圆$|z|\leq r$内并在(γ)外,恒有$|f'(z)|\leq 1$.我们用直线段连接点z_0与位在圆$|z|\leq r$内并在圆(γ)外的任意一点z,若遇到圆(r),则含于圆(γ)内的直线段用(γ)中的较小圆周弧取代,于是求得一条曲线L,其长度≤ 4.于是对于位在圆$|z|\leq r$内并在圆(γ)外

的点 z 有

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)| + \left|\int_L f'(z)dz\right| \leqslant |f(z_0)| + 4,$$

$$\log|f(z)| \leqslant \log^+|f(z_0)| + 3\log 2.$$

由于 $H > h$, 所以对情况(1), 定理2.10成立.

(2)在圆 $|z| \leqslant r$ 内并在圆 (γ) 外存在一点 z_1, 使得 $|f'(z_1)| \geqslant 1$, 并且在如上求得的连接点 z_0 与点 z_1 的曲线 L 上恒有 $|f'(z)| \leqslant 1$. 于是我们判定 $|f(z_1)| \leqslant M + 4$. 继作变换

$$\zeta = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z},$$

其逆变换为

$$z = \frac{\zeta + z_1}{1 + \bar{z}_1 \zeta},$$

则函数 $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{\zeta + z_1}{1 + \bar{z}_1\zeta}\right)$ 在圆 $|\zeta| < 1$ 内亚纯, 并且有

$$n(1, \varphi = a) \leqslant n, \quad n(1, \varphi = b) \leqslant n, \quad n(1, \varphi = c) \leqslant n,$$

同时圆 (γ) 变成 ζ 平面上相应于这

$$n(1, \varphi = a) + n(1, \varphi = b) + n(1, \varphi = c)$$

个点及数 h 的伪非欧除外圆 $(\gamma)_\zeta$. 注意点 $\zeta = 0 \overline{\in} (r)_\zeta$, 并且有

$$|\varphi(0)| = |f(z_1)| \leqslant M + 4, \ |\varphi'(0)|$$

$$= |f'(z_1)|(1 - |z_1|^2) \geqslant 1 - r. \qquad (2.66)$$

根据不等式

$$|\zeta| \leqslant \frac{|z| + |z_1|}{1 + |z_1||z|},$$

可以判定圆$|z| \leqslant r$在ζ平面上的像域含于圆$|\zeta| \leqslant t$内，而

$$t = \frac{2r}{1 + r^2}. \tag{2.67}$$

根据a, b, c三个值的相互球距$\geqslant d$，我们不妨假设a, b为有穷，并且$|a| < \frac{3}{d}$和$|b| < \frac{3}{d}$[1]. 继续作变换

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta) - a}{\varphi(\zeta) - b} \cdot \frac{c - b}{c - a},$$

则有

$$n(1, \Phi = 0) \leqslant n, \quad n(1, \Phi = 1) \leqslant n, \quad n(1, \Phi = \infty) \leqslant n.$$

进一步不妨假设$|\Phi(0)| \leqslant 1$，否则只须对调a, b的位置. 另外，根据(2.64)式还有

$$|\Phi'(0)| = \left|\frac{c-b}{c-a}\right| \left|a-b\right| \frac{|\varphi'(0)|}{|\varphi(0) - b|^2}$$

$$\geqslant \left|\frac{c-b}{c-a}\right| \left|a-b\right| \frac{1-r}{(M+4+|b|)^2}.$$

对$\Phi(\zeta)$应用定理2.4，则对任意值ρ, $0<\rho<1$得到

$$T(\rho, \Phi) \leqslant 6n\log\frac{1}{h} + 2\log^+\frac{(M+4+|b|)^2|c-a|}{(1-r)|a-b||c-b|}$$

---

1) 见定理2.7的证明中的相应说明.

$$+ 36\log\frac{1}{1-\rho} + 5220$$

$$\leqslant 6n\log\frac{1}{h} + 2\log\frac{1}{1-r} + 2\log^{+}\frac{1}{|a-b|} + 2\log^{+}\left|\frac{c-a}{c-b}\right|$$

$$+ 4\log^{+} M + 4\log^{+}|b| + 16\log 2 + 36\log\frac{1}{1-\rho} + 5220.$$

另一方面，根据(1.19)，(1.20)式和下述等式

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)-b} = \frac{1}{b-a}\left\{\frac{c-a}{c-b}\Phi(\zeta)-1\right\},$$

我们导出

$$T\left(\rho, \frac{1}{\varphi-b}\right) \leqslant T(\rho, \Phi) + \log^{+}\frac{1}{|b-a|} + \log^{+}\left|\frac{c-a}{c-b}\right| + \log 2,$$

$$T(\rho, \varphi-b) \leqslant T(\rho, \Phi) + \log^{+}\frac{1}{|b-a|} + \log^{+}\left|\frac{c-a}{c-b}\right|$$

$$+ \log^{+} M + 2\log^{+}|b| + 6\log 2$$

$$\leqslant 6n\log\frac{1}{h} + 2\log\frac{1}{1-r} + 3\log^{+}\left|\frac{c-a}{c-b}\right|$$

$$+ 3\log^{+}\frac{1}{|b-a|} + 6\log^{+}|b| + 5\log^{+} M$$

$$+ 22\log 2 + 36\log\frac{1}{1-\rho} + 5220.$$

进一步根据$|a| \leqslant \frac{3}{d}$, $|b| \leqslant \frac{3}{d}$, $|a-b| \geqslant |a, b| \geqslant d$, $|c-b| \geqslant |c, b| \geqslant d$，以及

$$\log^+\left|\frac{c-a}{c-b}\right| = \log^+\left|1+\frac{b-a}{c-b}\right|$$

$$\leqslant \log^+|a| + \log^+|b| + \log^+\frac{1}{|c-b|} + 2\log 2,$$

得到

$$T(\rho,\varphi) \leqslant 6n\log\frac{1}{h} + 2\log\frac{1}{1-r} + 36\log\frac{1}{1-\rho} + 5\log M$$

$$+ 18\log\frac{1}{d} + 52\log 2 + 5220. \tag{2.68}$$

其中 $0<\rho<1$.

设 $C_k\left(k=1,2,\cdots,l;\ l=n\left(\frac{1+t}{2},\varphi=\infty\right)\right)$ 是 $\varphi(\zeta)$ 在圆 $|\zeta|<\frac{1+t}{2}$ 内的极点，$(r)_\zeta^l$ 是相应于这 $n\left(\frac{1+t}{2},\varphi=\infty\right)$ 个点及数 H 的伪非欧除外圆．置

$$K(\zeta)=\prod_{k=1}^{l}\frac{\zeta-c_k}{1-\bar{c}_k\zeta},$$

则函数 $F(\zeta)=\varphi(\zeta)K(\zeta)$ 在圆 $|\zeta|\leqslant\frac{1+t}{2}$ 内全纯，且有

$$T\left(\frac{1+t}{2},F\right)\leqslant T\left(\frac{1+t}{2},\varphi\right),$$

$$\log M(t,F)\leqslant\frac{\frac{1+t}{2}+t}{\frac{1+t}{2}-t}T\left(\frac{1+t}{2},F\right)\leqslant\frac{4}{1-t}T\left(\frac{1+t}{2},\varphi\right).$$

以及当点ζ位在圆$|\zeta|\leqslant t$内且在$(r)_\zeta$外时有

$$\log|\varphi(\zeta)| = \log|F(\zeta)| + \log\frac{1}{|K(\zeta)|}$$

$$\leqslant \log M(t, F) + n\left(\frac{1+t}{2}, \varphi=\infty\right)\log\frac{2}{H}$$

$$\leqslant \frac{4}{1-t}T\left(\frac{1+t}{2}, \varphi\right)$$

$$+\log\frac{2}{H}\cdot\frac{\frac{1}{4}(3+t)}{\frac{1}{4}(3+t)-\frac{1}{2}(1+t)}\int_{\frac{1}{2}(1+t)}^{\frac{1}{4}(3+t)}\frac{n(t, \varphi=\infty)}{t}dt$$

$$\leqslant \frac{4}{1-t}T\left(\frac{1+t}{2}, \varphi\right)+\log\frac{2}{H}\ \frac{4}{1-t}T\left(\frac{3+t}{4}, \varphi\right)$$

$$\leqslant \frac{4}{1-t}T\left(\frac{3+t}{4}, \varphi\right)\left(\log\frac{2}{H}+1\right).$$

进一步利用(2.68)式，置其中的$\rho=\frac{3+t}{4}$，以及根据(2.67)式，我们得到

$$\log|\varphi(\zeta)| \leqslant \frac{16}{(1-r)^2}\left\{6n\log\frac{1}{h}+2\log\frac{1}{1-r}+36\log\frac{8}{(1-r)^2}\right.$$

$$\left.+5\log^+M+18\log\frac{1}{d}+52\log 2+5220\right\}\left\{1+\log\frac{2}{H}\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{(1-r)^2}\left\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}\right.$$

$$+c\log^+M+D\log\frac{1}{d}\Big\}\Big\{1+\log\frac{2}{H}\Big\}, \tag{2.69}$$

其中 A,B,C,D 为数字常数.

设 $(\gamma)'$ 是 z 平面上相应于 $(\gamma)'_\zeta$ 的伪非欧除外圆, 所以 $(\gamma)'$ 的伪非欧半径之和不超过 $2eH$. 于是 $(\gamma)'$ 的欧氏半径之和不超过 $2eH$. 根据(2.69)式, 当点 z 位在圆 $|z|\leqslant\gamma$ 内且在圆 $(\gamma)'$ 外时有

$$\log|f(z)|=\log|\varphi(\zeta)|\leqslant\frac{1}{(1-r)^2}\Big\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}$$

$$+C\log^+M+D\log\frac{1}{d}\Big\}\Big\{1+\log\frac{2}{H}\Big\},$$

即定理2.10完全得证.

§2.4. Julia方向和Borel方向

我们证明本章的主要结果, 即Julia方向和Borel方向的存在性. 但是, 为了本书以后叙述的方便, 我们先引入某些记号: 在开平面 $|z|<+\infty$ 上, 用 $\Delta(\theta)$ 表示一条始自原点的半直线: $\arg z=\theta$, $0<|z|<+\infty$; 用 $\Delta(\theta;R_1,R_2)$ $(0\leqslant R_1<R_2\leqslant+\infty)$ 表示半直线 $\Delta(\theta)$ 介于两点 $R_1e^{i\theta}$ 和 $R_2e^{i\theta}$ 间的部分; 用 $\Omega(\theta_1,\theta_2)$ $(\theta_1<\theta_2)$ 表示集合: $\theta_1<\arg z<\theta_2$; 用 $\Omega(\theta_1,\theta_2;R)$ $(\theta_1<\theta_2;\ 0<R<+\infty)$ 表示集合: $\theta_1<\arg z<\theta_2$, $|z|<R$; 用 $\Omega(\theta_1,\theta_2;R_1,R_2)$ $(\theta_1<\theta_2;\ 0<R_1<R_2\leqslant+\infty)$ 表示集合: $\theta_1<\arg z<\theta_2$, $R_1<|z|<R_2$; 用 $\Gamma(\theta_1,\theta_2;R)$ $(\theta_1<\theta_2;\ 0<R<+\infty)$ 表示集合: $\theta_1<\arg z<\theta_2$, $|z|=R$. 一般地, 我们用 $\overline{E}$ 表示一个集合 E 相对于开平面 $|z|<+\infty$ 的闭包.

我们用 $n(E,f=a)=n(E,a)$ 表示方程 $f(z)=a$ 在集合 E 上根的个数(几级重根计算几次); 用 $M(\overline{E},f)$ 表示 $\max\limits_{z\in\overline{E}}|f(z)|$; 以及

用 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

2.4.1. 充满圆

设 $f(z)$ 是区域 D 内一个非常数亚纯函数, 区域 D 内的一个圆 Γ: $|z-z_0|<\delta$ 称为 $f(z)$ 的一个以 $m(\geqslant 1)$ 为指标的充满圆, 如果对每一个复数值 X 有

$$n(\Gamma, X)\geqslant m,$$

至多除去一些值 X, 它们能被包含在两个半径为 e^{-m} 的球面圆内.

充满圆的概念来自 A. Ostrowski[33a] 和 H. Milloux[30a] 的工作.

引理2.7 设 $f(z)$ 是圆 $|z|<2R$ 内的一个非常数亚纯函数, $m\geqslant 1$ 是整数和 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. 如果在一个圆环 K: $r<|z|<R$ 内不存在一点 z_0, 使得圆: $|z-z_0|<\varepsilon|z_0|$ 是 $f(z)$ 的一个以 m 为指标的充满圆, 则对于每一个复数值 X 均有

$$n(\overline{K}, f=X)\leqslant 4\left\{\frac{10\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{\log\frac{R}{r}}{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{5}\right)}+\frac{10\pi}{\varepsilon}\right\}$$

$$\cdot\left\{An\log 100+B\log 4+Cm+D\log\frac{1}{H}\right\}. \tag{2.70}$$

但可能要除去一些值 X, 它们能被包含在一组球面圆 (γ) 内, 其球面半径之和不超过 $2eH\ (2eH<1)$, 其中, A, B, C, D 是被定理 2.7 所确定的数字常数.

证. 命 $P=\left[\frac{8\pi}{\varepsilon}\right]+1$ 和置 $\theta_i=\frac{2\pi}{P}i\ (i=0, 1, \cdots, P-1)$, 另一方面, 设整数 Q 满足不等式

$$r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)^{Q-1} < R \leqslant r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)^{Q}.$$

因此有

$$Q \leqslant \frac{\log \frac{R}{r}}{\log\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)} + 1 \leqslant \frac{\log \frac{R}{r}}{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{5}\right)} + 1 \tag{2.71}$$

现在,我们考虑一组圆周 $\Gamma_j: |z| = r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)^j (j = 0, 1, 2, \cdots, Q-1)$ 和圆周 $\Gamma_Q: |z| = R$. 于是这 P 条半直线 $\Delta(\theta_i)\ (i = 0, 1, \cdots, P-1)$ 和 $Q+1$ 个圆周 $\Gamma_j\ (j = 0,1,\cdots,Q)$ 将圆环 K 分为 PQ 个扇形:
$\Omega\left(\theta_i, \theta_{i+1}; r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)^j, r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)^{j+1}\right)$ $(i = 0, 1, \cdots P-1;\ j = 0, 1, \cdots Q-1)$. 再以点 $z_{ij} = r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)^j\left(1+\frac{\pi}{P}\right)e^{i\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}}$ 为心, 以 $\frac{\varepsilon}{2}|z_{ij}|$ 为半径作圆 $c_{ij}: |z - z_{ij}| < \frac{\varepsilon}{2}|z_{ij}|$,则 $\Omega\left(\theta_i, \theta_{i+1}; r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right), r\left(1+\frac{2\pi}{P}\right)^{j+1}\right)$ 必定整个地位在圆 C_{ij} 内. 继用 C'_{ij} 表示 C_{ij} 的同心圆: $|z - z_{ij}| < \varepsilon|z_{ij}|$. 根据假设, $C'_{ij}\ (i = 0, 1, \cdots P-1; j = 0, 1, \cdots Q-1)$ 均不为 $f(z)$ 的一个指标为 m 的充满圆. 于是相应于每个 C'_{ij}, 都存在三个复数值 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, 其相互球距 $\geqslant e^{-m}$, 以及有

$$n\{C'_{ij}, f = X_{ij}\} < m, X_{ij} = a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}.$$

以下, 我们借助于变换 $\zeta = \frac{z - z_{ij}}{\varepsilon|z_{ij}|}$ 和置 $\varphi(\zeta) = f(z_{ij}$

$+\varepsilon|z_{ij}|\zeta)$，然后对 $\varphi(\zeta)$ 应用定理2.7，置其中的 $h=0.01$，则可以判定对每一个复数值 X 有

$$n(c_{ij},f=x)=n\left(\frac{1}{2},\varphi=x\right)$$

$$\leqslant 4\left\{An\log 100+B\log 4+cm+D\log\frac{1}{\left|X,X_{ij}\left(\frac{1}{2}\right)\right|}\right\}$$

$$n(K,f=X)\leqslant\sum_{ij}n(c_{ij},f=X)$$

$$\leqslant 4P\cdot Q\{An\log 100+B\log 4+cm\}+\sum_{ij}4D\log\frac{1}{\left|X,X_{ij}\left(\frac{1}{2}\right)\right|}$$

$$=4P\cdot Q\{An\log 100+B\log 4+cm\}+4D\log\frac{1}{\prod_{ij}\left|X,X_{ij}\left(\frac{1}{2}\right)\right|}$$

进一步应用定理2.2，则满足不等式

$$\prod_{ij}\left|X,X_{ij}\left(\frac{1}{2}\right)\right|<H^{P\cdot Q}$$

的点集合，能被包含在至多 PQ 个球面圆 (γ) 内，其球面半径之和不超过 $2eH$ $(2eH<1)$。于是，对于每个不属于圆 (γ) 的复数 X 有

$$n(K,f=X)\leqslant 4P\cdot Q\left\{Am\log 100+B\log 4+Cm+D\log\frac{1}{H}\right\}.$$

最后，根据 $P=\left[\frac{8\pi}{\varepsilon}\right]+1\leqslant\frac{10\pi}{\varepsilon}$ 和(2.71)式，我们可以导出(2.70)式，即引理2.7得证.

引理2.8 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数，$f(0)\neq\infty$，以及存在序列r_n：$r_n<r_{n+1}\to+\infty(n\to+\infty)$使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T(r_n,f)}{(\log r_n)^2}=+\infty,$$

则对任意取定的值r，$r\geqslant1$和值ε，$0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$，只要$r_n$适当大，在圆环$K_n$：$r<|z|<2r_n$内就必定存在点$Z_n$，使得圆$\Gamma_n$：$|z-z_n|<\varepsilon|z_n|$是$f(z)$的一个充满圆，其指标

$$m_n\geqslant C\cdot\frac{\varepsilon^2T(r_n,f)}{(\log r_n)^2}\geqslant1,\tag{2.72}$$

其中$C>0$是一个适当小的数字常数.

证. 事实上，如果假设引理2.8不成立，则对充分大的值r_n，在圆环K_n内不存在点Z_n，使得圆Γ_n是$f(z)$的一个指标为m_n的充满圆. 于是，根据引理2.7，对每一个复数值X有

$$n(\overline{K}_n,f=X)\leqslant4\left\{\frac{10\pi}{\varepsilon}\frac{\log\frac{2r_n}{r_n}}{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{5}\right)}+\frac{10\pi}{\varepsilon}\right\}$$

$$\cdot\left\{Am_n\log100+B\log4+Cm_n+D\log\frac{1}{H}\right\}.$$

但可能要除去一些值X，它们能被包含在一组球面圆(r)内，其球面半径之和不超过$2eH$. 我们取$H=\frac{1}{8(e+2)}$，根据$m_n\geqslant1$，以及$\log\left(1+\frac{\varepsilon}{5}\right)\geqslant\frac{\varepsilon}{10}$，进一步判定

$$n(\overline{K}_n,f=X)\leqslant\frac{A\log r_n}{\varepsilon^2}m_n,\tag{2.73}$$

其中 $A>0$ 是一个适当大的数字常数.

作球面圆 $D_1: |X,\infty|<H$ 和 $D_2: |X,f(0)|<H$. 根据条件: $2eH+4H\leqslant\frac{1}{4}$, 我们判定在圆 D_1,D_2 和 (r) 外, 存在三个点 a_n,b_n,c_n, 使得 $f(0),a_n,b_n,c_n$ 间的相互球距 $\geqslant H$, 以及 $|a_n|,|b_n|,|c_n|$ 均不超过 $\frac{1}{H}$. 因此, 特别地 (2.73) 式给出

$$n(\overline{K}_n,f=X)<\frac{A\log r_n}{\varepsilon^2}\cdot m_n,\quad X=a_n,b_n,c_n.$$

于是, 当 $X=a_n,b_n,c_n$ 时, 进一步有

$$\begin{aligned}n(2r_n,f=X)&\leqslant n(r,f=X)+n(\overline{K}_n,f=X)\\&\leqslant\frac{1}{\log 2}\left\{T(2r_n,f)+\log^+\frac{1}{|f(0),X|}+\log 2\right\}\\&\qquad+\frac{A\log r_n}{\varepsilon^2}\cdot m_n.\end{aligned}$$

因为 r 是取定的数值和 $|f(0),X|\geqslant H=\frac{1}{8(e+2)}$, 所以只要 r_n 适当大, 我们就可以判定

$$n(2r_n,f=X)\leqslant\frac{A\log r_n}{\varepsilon^2}m_n,\quad X=a_n,b_n,c_n,\tag{2.74}$$

其中 $A>0$ 是一个适当大的数字常数.

置

$$F(z)=\frac{f(z)-a_n}{f(z)-b_n}\cdot\frac{c_n-b_n}{c_n-a_n},$$

则有

$$n(2r_n,\ F=0)=n(2r_n,\ f=a_n),$$

$$n(2r_n,\ F=1)=n(2r_n, f=c_n),$$

$$n(2r_n,\ F=\infty)=n(2r_n,\ f=c_n).$$

并且不妨假定 $|F(0)|\leqslant 1$, 否则只需对调 a_n, b_n 的位置. 另外, 根据 $f(0)\neq a_n, b_n, c_n$ 我们判定 $F(0)\neq 0, 1, \infty$. 现在设 $f(z)$ 在原点 $z=0$ 邻域内的展开式为

$$f(z)=f(0)+c_s z^s+\cdots,\ f(0)\neq\infty,\ \ c_s\neq 0, s\geqslant 1,$$

则 $F(z)$ 的相应展式为

$$F(z)=F(0)+\frac{(c_n-b_n)(a_n-b_n)}{(c_n-a_n)(f(0)-b_n)^2}c_s\overline{z}^s+\cdots.$$

于是, 应用定理 2.5, 我们有

$$T(r_n, F)\leqslant 2\left\{N\left(2r_n, \frac{1}{F}\right)+N\left(2r_n, \frac{1}{F-1}\right)+N(2r_n, F)\right\}$$

$$+4\log^+|F(0)|+2\log^+\frac{|C_n-b_n|\,|f(0)-b_n|^2}{2r_n s|c_s|\,|c_n-b_n|\,|a_n-b_n|}$$

$$+36\log 2+5220$$

$$\leqslant 2\left\{N\left(2r_n, \frac{1}{f-a_n}\right)+N\left(2r_n, \frac{1}{f-b_n}\right)\right.$$

$$\left.+N\left(2r_n, \frac{1}{f-c_n}\right)\right\}$$

$$+2\log^+\frac{1}{|c_s|}+12\log\frac{1}{H}+4\log^+|f(0)|$$

$$+48\log 2+5220, \tag{2.75}$$

另一方面,从下述等式

$$\frac{1}{f(z)-b_n}=\frac{1}{b_n-a_n}\left\{\frac{c_n-a_n}{c_n-b_n}F(z)-1\right\},$$

我们导出

$$T\left(r_n,\frac{1}{f-b_n}\right)\leqslant T(r_n,F)+4\log\frac{1}{H}+2\log 2,$$

$$T(r_n,f-b_n)\leqslant T(r_n,F)+4\log\frac{1}{H}+2\log 2+\log|f(0)-b_n|,$$

$$T(r_n,f)\leqslant T(r_n,F)+6\log\frac{1}{H}+\log^+|f(0)|+4\log 2.$$

进一步,根据 (2. 75) 式,得到

$$T(r_n,f)\leqslant 2\left\{N\left(2r_n,\frac{1}{f-a_n}\right)+N\left(2r_n,\frac{1}{f-b_n}\right)\right.$$

$$\left.+N\left(2r_n,\frac{1}{f-C_n}\right)\right\}+2\log\frac{1}{|C_s|}+18\log\frac{1}{H}$$

$$+5\log^+|f(0)|+52\log 2+5220.$$

再注意到当 $X=a_n, b_n, c_n$ 时,有

$$N\left(2r_n,\frac{1}{f-X}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f-X}\right)+n(2r_n f=X)\log\frac{2r_n}{r}$$

$$\leqslant T(r,f)+\log\frac{1}{H}+n(2r_n,f=X)\log(2r_n)+\log 2.$$

于是

$$T(r_n,f)\leqslant 2\{n(2r_n f=a_n)+n(2r_n,f=b_n)$$

$$+n(2r_n, f=c_n)\}\log 2r_n + 6T(r,f) + 2\log\frac{1}{|c_s|}$$

$$+24\log\frac{1}{H} + 5\log^+|f(0)| + 58\log 2 + 5220.$$

进一步根据 (2.74) 式，当 r_n 适当大时，我们判定

$$T(r_n, f) \leqslant \frac{A(\log r_n)^2}{\varepsilon^2} m_n,$$

其中 $A>0$ 是一个适当大的数字常数．因此，只要在 (2.72) 式中取数字常数 c 适当小，使得 $A \cdot C<1$，我们就能导出一个矛盾，从而引理 2.8 得证．

2.4.2. Borel 方向

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个 $\lambda(\lambda \geqslant 0)$ 级亚纯函数，如果对于任意小的数 $\varepsilon>0$ 和任意复数值 X 均有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ n\{\Omega(\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon; r), f=X\}}{\log r} = \lambda,$$

但可能至多除去两个值 X 例外，则称 $\Delta(\theta)$ 是 $f(z)$ 的一条 λ 级 Borel 方向．

1928 年 G. Valiron 首先证明了 Borel 方向的存在性[39b].

定理 2.11 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数，其级为 λ，$0<\lambda \leqslant +\infty$，则 $f(z)$ 至少具有一条 λ 级 Borel 方向．

证． 根据 Borel 方向的定义，$f(z)$ 和 $\dfrac{1}{f(z)}$ 有完全相同的 Borel 方向，因此，我们可以假定 $f(0)\neq\infty$，否则，只需考虑 $\dfrac{1}{f(z)}$. 另外，根据级的定义，存在序列 r_n，$1\leqslant r_n<r_{n+1}\to+\infty$ (n

$\to+\infty$)，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}=\lambda>0.$$

因此更有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T(r_n,f)}{(\log r_n)^4}=+\infty.$$

现在，我们适当选取 $\{r_n\}$ 的一个子序列 r_{n_k}：$e^2<r_{n_k}<r_{n_{k+1}}$，$r_{n_k}\to\infty\,(k\to+\infty)$. 具体地，当 r_{n_k} 被取定以后，我们置 $\varepsilon_{n_k}=\dfrac{1}{\log r_{n_k}}<\dfrac{1}{2}$ 和取 $r_{n_{k+1}}$ 足够大，使得根据引理 2.8，在圆环 $K_{n_{k+1}}$：$r_{n_k}<|z|<2r_{n_{k+1}}$ 内，存在点 $z_{n_{k+1}}$，使得圆 $\Gamma_{n_{k+1}}$：$|z-z_{n_{k+1}}|<\varepsilon_{n_k}|z_{n_{k+1}}|$ 是 $f(z)$ 的一个充满圆，其指标

$$m_{n_{k+1}}=C\cdot\frac{1}{(\log r_{n_k})^2}\cdot\frac{T(r_{n_{k+1}},f)}{(\log r_{n_{k+1}})^2}\geqslant C\cdot\frac{T(r_{n_{k+1}},f)}{(\log r_{n_{k+1}})^4}\geqslant 1.$$

考虑集合 $E=E\{\theta_{n_k}=\arg z_{n_k}|k=1,2,\cdots 0\leqslant\theta_{n_k}\leqslant 2\pi\}$，则 E 至少存在一个聚点 θ，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 我们不妨假设 $\theta_{n_k}\to\theta\,(k\to+\infty)$，否则只须选取一个子序列. 以下，我们证明 $\Delta(\theta)$ 就是 $f(z)$ 的一条 λ 级 Borel 方向. 事实上，如果不然，则存在某个值 $\varepsilon>0$ 和相应的三个判别复数 a,b,c 使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\{\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),f=X\}}{\log r}<\lambda,\ X=a,b,c,\qquad(2.76)$$

另一方面，当 k 充分大时有 $\Gamma_{n_k}\subset\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$，以及 $e^{-m_{n_k}}\leqslant\dfrac{1}{4}\min\{|a,b|,|a,c|,|b,c|\}$. 因此，$a,b,c$ 三个值中至少有一个值，例如 a，使得在 Γ_{n_k} 的一个无穷子序列上有下述估计

$$n(\Gamma_{n_k}, f=a) \geqslant m_{n_k} \geqslant C \cdot \frac{T(r_{n_k}, f)}{(\log r_{n_k})^4}.$$

于是

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log^+ n\{\Omega(\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon; r), f=a\}}{\log r}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\log^+ n\{\Omega(\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon; 2r_{n_k}(1+\varepsilon_{n_{k-1}})), f=a\}}{\log 2r_{n_k}(1+\varepsilon_{n_{k-1}})}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\log^+ n(\Gamma_{n_k}, f=a)}{\log 2r_{n_k}(1+\varepsilon_{n_{k-1}})}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\log T(r_{n_k}, f) - 4\log\log r_{n_k} + \log C}{\log r_{n_k} + \log 2(1+\varepsilon_{n_{k-1}})} = \lambda,$$

但是这与(2.76)式相矛盾，从而定理2.11得证.

从定理2.11的证明中，我们看出一列充满圆决定了一条Borel方向.反之，A. Rauch证明一条Borel方向决定一列充满圆[35a].

定理2.12 设$f(z)$是开平面$|z| < +\infty$上的一个亚纯函数，其级为λ, $0 < \lambda < +\infty$, 并且$\Delta(\theta)$是$f(z)$的一条λ级Borel方向，则在$\Delta(\theta)$上存在一个无穷点列z_n, $z_n = |z_n|e^{i\theta}$, $|z_n| < |z_{n+1}| \to \infty$ $(n \to +\infty)$使得圆Γ_n: $|z - z_n| < \varepsilon_n |z_n|$, $0 < \varepsilon_n \to 0$ $(n \to +\infty)$是$f(z)$的充满圆，其指标m_n满足条件：对任意取定的λ', $0 < \lambda' < \lambda$, 只要n充分大就有$m_n \geqslant |z_n|^{\lambda'}$.

以后，我们称具有上述性质的一列充满圆为λ级充满圆序列.

证. 不失一般性，可以假定$\Delta(\theta) = \Delta(0)$. 以下，我们只需证明对任意给定的值$R$, $R > 1$, 值ε, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$和值$\lambda'$, $0 < \lambda' < \lambda$, 在$\Delta(0)$上必定存在一点z_0, 使得圆Γ: $|z - z_0| < \varepsilon |z_0|$是$f(z)$的一个充满圆，其指标$m \geqslant |z_0|^{\lambda'}$. 事实上，如果不然，则对于$\Delta(0; R, +\infty)$上的任意一点$z_0$, 圆$\Gamma$: $|z - z_0| < \varepsilon |z_0|$均不是$f(z)$的一个

指标为$m, m \geqslant |z_0|^{\lambda'}$的充满圆. 由此, 我们将导出矛盾.

首先构造序列$r_n = \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^n (n = 1, 2, \cdots)$. 对于给定的值$R$, 存在正整数$n_0$, 使得当$n \geqslant n_0$时有$r_n > R$. 如果我们以$z_n$, $z_n = \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^n \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right)$为心, 以$\frac{\varepsilon}{2}|z_n|$为半径作圆$c_n$: $|z - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}|z_n|$, 则$\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}; r_n, r_{n+1}\right)$必定整个地位在圆$c_n$内. 再作同心圆$c_n'$: $|z - z_n| < \varepsilon_n |z_n|$, 则$c_n'$不是$f(z)$的一个指标为$m$的充满圆. 因此, 存在三个判别复数$a_n, b_n, c_n$, 其相互球距$\geqslant d$, $d = e^{-|z_n|^{\lambda'}}$, 并且有

$$n(c_n', f = X) < |z_n|^{\lambda'}, X = a_n, b_n, c_n.$$

以下, 我们借助于变换$\zeta = \frac{z - z_n}{\varepsilon|z_n|}$和置$\varphi(\zeta) = f(z_n + \varepsilon|z_n|\zeta)$, 然后对$\varphi(\zeta)$应用定理2.7, 置其中的$h = 0.01$, 则可以判定对每个复数值$X$, 有

$$n(c_n, f = X) \leqslant 4\left\{A|z_n|^{\lambda'} \log 100 + B \log 4 + C|z_n|^{\lambda'} + D \log^+ \frac{1}{\left|X, X_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|}\right\}.$$

作球面圆D_n: $\left|X, X_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < e^{-|z_n|^{\lambda'}}$. 当$X$位在圆$D_n$外时, 进一步有

$$n(c_n, f = X) \leqslant 4\{A|z_n|^{\lambda'} \log 100 + B \log 4 + C|z_n|^{\lambda'} + D|z_n|^{\lambda'}\} \leqslant A|z_n|^{\lambda'}, \tag{2.77}$$

其中 $A>0$ 是与 n 无关的数字常数.

置

$$(\gamma)_{n_1}=\bigcup_{n=n_1}^{\infty}D_n,$$

则圆 $(\gamma)_{n_1}$ 的球面半径之和

$$\begin{aligned}H_{n_1}&=\sum_{n=n_1}^{\infty}e^{-|z_n|\lambda'}\leqslant\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{\lambda'}}\leqslant\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\lambda'}}\\&=\frac{1}{r_{n_1}^{\lambda'}}\left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\lambda'}}+\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2\lambda'}}+\cdots\right)\\&=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\lambda'}}{\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\lambda'}-1}\cdot\frac{1}{r_{n_1}^{\lambda'}}.\end{aligned}$$

于是，只要取 n_1 充分大，$n_1\geqslant n_0$，使得 $H_{n_1}<\frac{1}{4}$，我们就能在圆 $(\gamma)_{n_1}$ 外找到三个判别复数值 a,b,c，从而根据(2.77)式，当 $n\geqslant n_1$ 时，有

$$n(c_n,\ f=X)\leqslant A|z_n|^{\lambda'},\ X=a,b,c.$$

对于任意取定的值 $r,r\geqslant r_{n_1}$，存在正整数 $N,N\geqslant n_1$ 使得 $r_N\leqslant r<r_{N+1}$. 于是，当 $X=a,b,c$ 时，有

$$\begin{aligned}n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4};r\right),f=X\right\}&\leqslant n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4};r_{n_1}\right),f=X\right\}\\&+\sum_{n=n_1}^{N}n(c_n,\ f=X)\leqslant n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4};r_{n_1}\right),f=X\right\}\\&+A\sum_{n=n_1}^{N}|z_n|^{\lambda'}.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{n=n_1}^{N}|z_n|^{\lambda'}\leqslant\sum_{n=n_1}^{N}r_{n+1}^{\lambda'}\leqslant r_{N+1}^{\lambda'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\lambda'}}$$

$$\leqslant\frac{\left(1+\dfrac{\varepsilon}{4}\right)^{\lambda'}}{\left(1+\dfrac{\varepsilon}{4}\right)^{\lambda'}-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\lambda'}\cdot r^{\lambda'},$$

则得

$$n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4};r\right),f=X\right\}$$

$$\leqslant n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4};r_n\right),f=X\right\}+Ar^{\lambda'}.$$

其中 $A>0$ 是与 r 无关的常数. 由此，当 $X=a,b,c$ 时，我们判定

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\Omega\left(-\dfrac{\varepsilon}{4},\dfrac{\varepsilon}{4};r\right),f=X\right\}}{\log r}\leqslant\lambda'<\lambda.$$

但是这与 $\Delta(0)$ 是 $f(z)$ 的一条 λ 级 Borel 方向的假设相矛盾. 从而定理 2.12 得证.

我们以后还需要下述结果[39d].

定理 2.13 设 $f(z)$ 在 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)\left(0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上亚纯，并且存在三个判别复数 a,b,c 使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\{\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),f=X\}}{\log r}\leqslant\lambda,$$

$0\leqslant\lambda<+\infty$,

$$X=a,b,c, \tag{2.78}$$

则对于每一个复数值 X 均有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^{+}n\left\{\Omega\left(\theta-\frac{\varepsilon}{2\pi},\theta+\frac{\varepsilon}{2\pi};r\right),f=X\right\}}{\log r}\leqslant\lambda.$$

但可能要除去一些值 X, 它们在 Riemann 球上的线性测度为零.

证. 不失一般性, 可以假设 $\theta=0$. 我们构造序列 $r_n=\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^n(n=1,2,\cdots)$. 然后以 $z_n=\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^n\left(1+\frac{\varepsilon}{4\pi}\right)$ 为心, 以 $\frac{\varepsilon}{\pi}|z_n|$ 为半径作圆 C_n: $|z-z_n|<\frac{\varepsilon}{\pi}|z_n|$, 则 $\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r_n,r_{n+1}\right)$ 必定整个地位在圆 C_n 内. 再作同心圆 C_n': $|z-z_n|<\frac{2\varepsilon}{\pi}|z_n|$, 则圆 C_n' 必定整个地位在 $\Omega(-\varepsilon,\varepsilon;r_{n+5})$ 内. 根据 (2.78) 式, 对任意取定的数 $\eta(\eta>0)$, 存在值 R_0, 使得当 $r>R_0$ 时, 有

$$n\{\Omega(-\varepsilon,\varepsilon;r),f=X\}\leqslant r^{\lambda+\eta},\ X=a,b,c.$$

于是存在正整数 n_0, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时有 $r_n>R_0$. 因此, 我们有

$$n(C_n',f=X)\leqslant n\{\Omega(-\varepsilon,\varepsilon;r_{n+5}),f=X\}\leqslant r_{n+5}^{\lambda+\eta},\ X=a,b,c.$$

设 a,b,c 间的相互球距 $\geqslant d\left(0<d<\frac{1}{2}\right)$. 以下, 我们借助于变换 $\zeta=\dfrac{z-z_n}{\frac{2\varepsilon}{\pi}|z_n|}$ 和置 $\varphi(\zeta)=f\left(z_n+\frac{2\varepsilon}{\pi}|z_n|\zeta\right)$, 然后对 $\varphi(\zeta)$ 应用定理 2.7, 置其中的 $h=0.01$, 则可以判定对每个复数值 X, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 有

$$n(C_n, f = X) \leqslant 4\left\{Ar_{n+5}^{\lambda+\eta}\log 100 + B\log 4 + C\log\frac{1}{d}\right.$$

$$\left. + D\log^+\frac{1}{\left|X, X_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|}\right\}.$$

作球面圆 D_n: $\left|X, X_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < e^{-r_{n+1}^{\lambda+\eta}}$, 则当 X 位在圆 D_n 外时, 进一步有

$$n(C_n, f = X) \leqslant 4\{Ar_{n+5}^{\lambda+\eta}\log 100 + B\log 4$$

$$+ C\log\frac{1}{d} + Dr_{n+5}^{\lambda+\eta}\} \leqslant Ar_{n+5}^{\lambda+\eta}, \tag{2.79}$$

其中 $A > 0$ 是与 n 无关的常数.

置

$$(\gamma)_{n_1} = \bigcup_{n=n_1}^{\infty} D_n, \quad n_1 \geqslant n_0,$$

则圆 $(\gamma)_{n_1}$ 的球面半径之和

$$H_{n_1} = \sum_{n=n_1}^{\infty} e^{-r_{n+5}^{\lambda+\eta}} \leqslant \sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{r_{n+5}^{\lambda+\eta}} = \frac{1}{r_{n_1+5}^{\lambda+\eta}}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{r_{n-n_1}^{\lambda+\eta}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\lambda+\eta}}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\lambda+\eta} - 1}\cdot\frac{1}{r_{n_1+5}^{\lambda+\eta}}. \tag{2.80}$$

对任意取定的值 $r\,(r \geqslant r_{n_1})$, 存在正整数 $N(\geqslant n_1)$, 使得 $r_N \leqslant r < r_{N+1}$. 于是当 $X \overline{\in} (\gamma)_{n_1}$ 时, 根据 (2.79) 式有

$$n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r\right),f=X\right\}$$

$$\leqslant n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r_{n_1}\right),f=X\right\}+\sum_{n=n_1}^{N}n(C_n,f=X)$$

$$\leqslant n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r_{n_1}\right),f=X\right\}+A\sum_{n=n_1}^{N}r_{n+5}^{\lambda+\eta}.$$

注意到

$$\sum_{n=n_1}^{N}r_{n+5}^{\lambda+\eta}\leqslant r_{n+5}^{\lambda+\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\lambda+\eta}}$$

$$\leqslant\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\lambda+\eta}}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\lambda+\eta}-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{5(\lambda+\eta)}\cdot r^{\lambda+\eta},$$

则得

$$n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r\right),f=X\right\}$$

$$\leqslant n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r_{n_1}\right),f=X\right\}+Ar^{\lambda+\eta},$$

其中$A>0$是与r无关的常数.因此,我们判定

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^{+}n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r\right),f=X\right\}}{\log r}\leqslant\lambda+\eta.$$

命$\eta\to0$,则对于不属于圆$(\gamma)_{n_1}$的每个复数值X均有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\Omega\left(-\frac{\varepsilon}{2\pi},\frac{\varepsilon}{2\pi};r\right),f=X\right\}}{\log r}\leqslant\lambda. \tag{2.81}$$

上述讨论说明不满足 (2.81) 式的复数值 X 必定属于集合 $\bigcap_{n=n_1}^{\infty}(\gamma)_n$, 另一方面, 明显地有

$$(\gamma)_{n_1}\supset(\gamma)_{n_1+1}\supset(\gamma)_{n_1+2}\supset\cdots,$$

而且根据 (2.80) 式, 当 n_1 充分大时, $(\gamma)_{n_1}$ 的球面线性测度可以充分小, 于是 $\bigcap_{n=n_1}^{\infty}(\gamma)_n$ 在 Riemann 球上是一个零线性测度集合, 从而定理 2.13 得证.

定理 2.14 设 $\lambda(\lambda>0)$ 级亚纯函数 $f(z)$ 在 $\Omega(-\theta,\theta)(0<\theta<\pi)$ 上无 λ 级 Borel 方向, 则对任意取定的数 $\varepsilon(0<\varepsilon<\theta)$, 必定存在三个判别复数 a, b, c 使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;r),f=X\}}{\log r}\leqslant\lambda'<\lambda,\ X=a,b,c.$$

证. 根据假设, 在 $\Omega(-\theta,\theta)$ 上无 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向. 因此, 对任意值 φ, $-\theta+\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\theta-\varepsilon$, $\Delta(\varphi)$ 不是 $f(z)$ 的一条 λ 级 Borel 方向, 即存在某个数 $\delta(0<\delta<\varepsilon)$ 和相应的三个判别复数 α,β,γ 使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\{\Omega(\varphi-\delta,\varphi+\delta;r),f=X\}}{\log r}\leqslant\lambda'<\lambda,\ X=\alpha,\beta,\gamma.$$

根据定理 2.13, 则对于每个复数值 X 均有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\Omega\left(\varphi-\frac{\delta}{2\pi},\varphi+\frac{\delta}{2\pi};r\right),f=X\right\}}{\log r}\leqslant\lambda'.$$

但可能要除去一些值 X，它们在 Riemann 球上的线性测度为零.

集合 $\left\{ \Omega\left(\varphi - \frac{\delta}{2\pi}, \varphi + \frac{\delta}{2\pi}\right) \middle| \varphi \in [-\theta + \varepsilon, \theta - \varepsilon] \right\}$ 构成 $\overline{\Omega}(-\theta + \varepsilon, \theta - \varepsilon)$ 的一个开覆盖，根据有限覆盖定理，我们可以选取一个有限覆盖. 因为每个覆盖的例外值 X 集合在 Riemann 球上均为零线性测度. 所以有限覆盖的全体例外值 X 的集合在 Riemann 球上为零线性测度. 于是存在三个判别复数 a, b, c 使得

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log^+ n\{\Omega(-\theta + \varepsilon, \theta - \varepsilon; r), f = X\}}{\log r} \leqslant \lambda', X = a, b, c,$$

即定理 2. 14 得证.

2. 4. 3. Julia 方向

设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个超越亚纯函数，如果对任意小的数 $\varepsilon > 0$，$f(z)$ 在 $\Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ 内取每个复数值 X 无穷多次，至多可能有两个值 X 例外，则称 $\Delta(\theta)$ 是 $f(z)$ 的一条 Julia 方向.

1919 年 G. Julia 证明了 Julia 方向的存在性[25a]，从而开创了幅角分布论的研究.

定理 2. 15[30a][43c] 设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个超越亚纯函数，并且满足下述条件之一：

(1) $\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{T(r,f)}{(\log r)^2} = +\infty$,

(2) $f(z)$ 具有一个渐近值 α,

(3) 对某个复数值 α，有 $\lim_{r \to +\infty} m(r, \alpha) = +\infty$,

则 $f(z)$ 至少具有一条 Julia 方向.

证. 当 $f(z)$ 满足条件 (1) 时，则存在序列 r_n：$1 < r_n < r_{n+1} \to +\infty \, (n \to +\infty)$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T(r_n,f)}{(\log r_n)^2}=+\infty.$$

现在，我们适当选取 $\{r_n\}$ 的一个子序列 $r_{n_k}: 1<r_{n_k}<r_{n_{k+1}}\to +\infty\,(k\to+\infty)$. 具体地，当 r_{n_k} 被取定以后，我们置 $\varepsilon_{n_k}=\dfrac{1}{4k}<1$ 和取 $r_{n_{k+1}}$ 足够大，使得根据引理 2.8, 在圆环 $K_{n_{k+1}}: r_{n_k}<|z|<2r_{n_{k+1}}$ 内存在点 $Z_{n_{k+1}}$, 使得圆

$\Gamma_{n_{k+1}}: |z-z_{n_{k+1}}|<\varepsilon_{n_k}|z_{n_{k+1}}|$ 是 $f(z)$ 的一个充满圆，其指标

$$m_{n_{k+1}}=c\frac{1}{16k^2}\frac{T(r_{n_{k+1}},f)}{(\log r_{n_{k+1}})^2}\geqslant k+1.$$

设 θ 是集合 $E=E\{\theta_{n_k}=\arg z_{n_k}|k=1,2,\cdots;\ 0\leqslant\theta_{n_k}\leqslant 2\pi\}$ 的一个聚点. 我们证明 $\Delta(\theta)$ 就是 $f(z)$ 的一条 Julia 方向. 事实上，如果不然，则存在某个值 $\varepsilon>0$ 和相应的三个判别复数 a, b, c 使得在 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$ 内，$f(z)$ 取 a, b, c 三个值至多有限次. 因此，存在值 R_0 使得 $f(z)$ 在 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;R_0,+\infty)$ 内不取 a, b, c 三个值. 另一方面，当 k 充分大时，存在圆 $\Gamma_{n_k}\subset\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;R_0,+\infty)$, 并且有 $e^{-m_{n_k}}\leqslant\dfrac{1}{4}\min\{|a,b|,|a,c|,|b,c|\}$. 因此，$a, b, c$ 三个值中，至少有一个值，例如 a, 使得在 Γ_{n_k} 上有

$$n(\Gamma_{n_k}, f=a)\geqslant m_{n_k}\geqslant k.$$

从而得到矛盾. 于是当 $f(z)$ 满足条件(1)时，定理2.15成立.

现在，我们证明当 $f(z)$ 满足条件(2)或(3)时，$f(z)$ 至少有一条 Julia 方向. 不失一般性，可以假设 $\alpha=\infty$. 以下，我们用反证法论之：

设 $f(z)$ 不具有 Julia 方向，则对于每个方向 $\Delta(\theta)\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 都必定存在一个角区域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)\ (\varepsilon>0)$ 和相应的三个判别

复数a, b, c，使得$f(z)$在$\Omega(\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon)$内取$a, b, c$三个值均至多有限次．因为集合$\left\{\Omega\left(\theta-\frac{\varepsilon}{4}, \theta+\frac{\varepsilon}{4}\right) \mid \theta \in [0, 2\pi]\right\}$构成开平面$|z|<+\infty$的一个覆盖，所以，我们从中可以选取一个有限覆盖$\Omega\left(\theta_i-\frac{\varepsilon_i}{4}, \theta_i+\frac{\varepsilon_i}{4}\right)(i=1, 2, \cdots, N)$，相应的三个值为$a_i, b_i, c_i$.

明显地，存在值$R_0>1$，使得$f(z)$在$\Omega\left(\theta_i-\frac{\varepsilon_i}{4}, \theta_i+\frac{\varepsilon_i}{4}; R_0, +\infty\right)(1 \leqslant i \leqslant N)$内不取值$a_i, b_i, c_i$.另外存在数$d\left(0<d<\frac{1}{2}\right)$，使得$a_i, b_i, c_i(1 \leqslant i \leqslant N)$间的相互球距$\geqslant d$.

由于$f(z)$是一个超越亚纯函数，所以存在一个点序列z_n: $|z_n|<|z_{n+1}| \rightarrow +\infty(n \rightarrow +\infty)$，使得$|f(z_n)| \leqslant 1(n=1, 2, \cdots)$.置$\varepsilon_0=\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}\left\{\frac{\varepsilon_i}{4}\right\}$和作圆$\Gamma_{n0}$: $|z-z_n|<\varepsilon_0|z_n|$，则$\Gamma_{n0}$必定整个地位在某个角区域$\Omega(\theta_i-\varepsilon_i, \theta_i+\varepsilon_i)$内．于是存在正整数$n_0$，使得当$n \geqslant n_0$时有$R_0<|z_n|$. 因此$f(z)$在$\Gamma_{n0}$上不取$a_i, b_i, c_i$三个值.

作变换$\zeta=\frac{z-z_n}{\varepsilon_0|z_n|}$和置$\varphi(\zeta)=f(z_n+\varepsilon_0|z_n|\zeta)$，则$\varphi(\zeta)$在圆$|\zeta|<1$内不取$a_i, b_i, c_i$三个值，并且$|\varphi(0)|=|f(z_n)| \leqslant 1$. 应用定理2.10，置其中的$n=0, d=d, M=1, r=\frac{1}{2}$，则$\varphi(\zeta)$在圆$|\zeta|<\frac{1}{2}$内有

$$\log|\varphi(\zeta)| \leqslant 4\left\{B \log 4+D \log \frac{1}{d}\right\}\left(1+\log \frac{2}{H}\right),$$

至多除去一些圆$(\gamma)_H$，其半径之和不超过$2eH$. 于是$f(z)$在圆Γ_{n0}': $|z-z_n|<\frac{1}{2}\varepsilon_0|z_n|$内有

$$\log|f(z)|\leqslant A_0\left(1+\log\frac{2}{H}\right),$$

至多除去一些圆$(r)_H^0$，其半径之和不超过$2e\varepsilon_0|z_n|H$，其中A_0是与n无关的常数．

作圆序列Γ_{nj}: $|z-z_ne^{i(\frac{j}{4}\varepsilon_0)}|<\varepsilon_0|z_n|\left(j=1,2,\cdots,K;\ K=\left[\frac{8\pi}{\varepsilon_0}\right]+1\right)$. 然后依次应用定理2.10，则类似地可以证明$f(z)$在圆$\Gamma'_{nj}$: $|z-z_ne^{i(\frac{j}{4}\varepsilon_0)}|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_0|z_n|$内有

$$\log|f(z)|\leqslant A_j\left(1+\frac{2}{H}\right)^{j+1},$$

至多除去一些圆$(\gamma)_H^j$，其半径之和不超过$2e\varepsilon_0|z_n|H$，其中A_j是与n无关的常数．置

$$(\gamma)=\bigcup_{j=0}^{K}(\gamma)_H^j,$$

则(γ)的半径之和不超过$2e\varepsilon_0|z_n|KH$. 取$H=\frac{7}{64eH}$，则在圆环$|z_n|\left(1-\frac{7}{8}\cdot\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\leqslant|z|\leqslant|z_n|\left(1+\frac{7}{8}\cdot\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$内存在圆周$\Gamma_n$: $|z|=R_n$，使得Γ_n不与(γ)相交，并且Γ_n被集合$\{\Gamma'_{nj}|j=0,1,\cdots,K-1\}$所覆盖．于是当$z\in\Gamma_n$时，有

$$\log|f(z)|\leqslant A\left(1+\frac{2}{H}\right)^K,\quad A=\max_{0\leqslant j\leqslant K-1}\{A_j\},$$

其中A是与n无关的常数．因此，我们一方面可以判定

$$\varliminf_{r\to+\infty}m(r,\infty)\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}m(R_n,\infty)<+\infty,$$

另一方面可以判定$f(z)$不能以∞作为渐近值. 但是这分别与条件(2)和(3)相矛盾,从而定理2.15完全得证.

系. 设$f(z)$是一个超越整函数或者是一个具有亏值的超越亚纯函数,则$f(z)$至少有一条Julia方向.

A. Ostrowski[33a]曾经给出例子,用以说明存在不具有Julia方向的亚纯函数$f(z)$, 其增长性为$T(r, f)=O\{(\log r)^2\}$ $(r\to+\infty)$.

最后,相应于定理2.14,我们有

定理2.16 设亚纯函数$f(z)$在$\Omega(-\theta,\theta)$ $(0<\theta<\pi)$上无Julia方向,则对任意取定的数ε, $0<\varepsilon<\theta$, 必定存在三个判别复数a, b, c使得

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;r),\ f=X\}}{\log r}=0,\ X=a, b, c.$$

§2.5. 关于整函数的增长性和 Julia方向的分布

2.5.1. 某些引理

变换

$$\zeta=\frac{z^{\frac{\pi}{2\theta}}-R_1^{\frac{\pi}{2\theta}}}{z^{\frac{\pi}{2\theta}}+R_1^{\frac{\pi}{2\theta}}},\ 0<\theta\leqslant\pi,\ 1\leqslant R_1<+\infty \tag{2.82}$$

将$\Omega(-\theta,\theta)$变为ζ平面上的单位圆$|\zeta|<1$, 点$z=R_1$变为点$\zeta=0$.

引理2.9 在(2.82)式变换下,$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_1,R)$ $(0<\varepsilon<\theta, 1\leqslant R_1<R<+\infty)$在$\zeta$平面上的像域必定位在圆$|\zeta|\leqslant\rho$内,而

$$\rho = 1 - \frac{\varepsilon}{2\theta} R^{-\frac{\pi}{2\theta}}.$$

圆$|\zeta| \leqslant r(r<1)$在z平面上的原像域必定位在域$\overline{\Omega}(-\theta, \theta;\ R_2)$内，而

$$R_2 = R_1 \left(\frac{2}{1-r} \right)^{\frac{2\theta}{\pi}}.$$

并且当$|\zeta| \leqslant r$时，

$$R_1 \cdot \frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{1-r}{2} \right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \leqslant |z'(\zeta)| \leqslant R_1 \cdot \frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{2}{1-r} \right)^{\frac{2\theta}{\pi}+1}.$$

证．设$z = re^{i\varphi} \in \overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon;\ R_1, R)$，则有

$$|\zeta| = \left| \frac{r^{\frac{\pi}{2\theta}} e^{i\frac{\pi\varphi}{2\theta}} - R_1^{\frac{\pi}{2\theta}}}{r^{\frac{\pi}{2\theta}} e^{i\frac{\pi\varphi}{2\theta}} + R_1^{\frac{\pi}{2\theta}}} \right|$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4r^{\frac{\pi}{2\theta}} R_1^{\frac{\pi}{2\theta}} \cos \frac{\pi\varphi}{2\theta}}{r^{\frac{\pi}{\theta}} + R_1^{\frac{\pi}{\theta}} + 2r^{\frac{\pi}{2\theta}} R_1^{\frac{\pi}{2\theta}} \cos \frac{\pi\varphi}{2\theta}}}.$$

注意到

$$r^{\frac{\pi}{\theta}} + R_1^{\frac{\pi}{\theta}} + 2r^{\frac{\pi}{2\theta}} R_1^{\frac{\pi}{2\theta}} \cos \frac{\pi\varphi}{2\theta} \leqslant 4r^{\frac{\pi}{\theta}},$$

$$4r^{\frac{\pi}{2\theta}} R_1^{\frac{\pi}{2\theta}} \cos \frac{\pi\varphi}{2\theta} \geqslant \frac{4\varepsilon}{\theta} r^{\frac{\pi}{2\theta}},$$

则得

$$|\zeta| \leqslant \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\theta} r^{-\frac{\pi}{2\theta}}} < 1-\frac{\varepsilon}{2\theta} R^{-\frac{\pi}{2\theta}} = \rho,$$

另一方面，(2.82)式的逆变换为

$$z = R_1\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}},$$

则当 $|\zeta| \leqslant r(<1)$ 时，有

$$|z| \leqslant R_1\left(\frac{2}{1-r}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}.$$

最后根据表示式

$$z'(\zeta) = \frac{4\theta R_1}{\pi}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \cdot \frac{1}{1-\zeta^2},$$

当 $|\zeta| \leqslant r$ 时，我们有

$$\frac{2\theta R_1}{\pi}\left(\frac{1-r}{2}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \leqslant |z'(\zeta)| \leqslant \frac{2\theta R_1}{\pi}\left(\frac{2}{1-r}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}.$$

于是引理2.9完全得证.

引理2.10 若用 $u(z;\theta_1,\theta_2;R)$ 表示 $\Gamma(\theta_1,\theta_2;R)$ 相对于点 z 和域 $\Omega(\theta_1,\theta_2;R)$ 的调和测度，则当 $0<\theta_2-\theta_1\leqslant 2\pi$ 时，我们有

$$u(z;\theta_1,\theta_2,R) \leqslant \frac{4\left(\frac{|z|}{R}\right)^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}}{\pi\left[1-\left(\frac{|z|}{R}\right)^{\frac{2\pi}{\theta_2-\theta_1}}\right]}.$$

证. 作变换

$$\zeta = \xi + i\eta = \left\{ \frac{z}{R} e^{-i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \right\}^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}},$$

则 $\Omega(\theta_1, \theta_2, R)$ 变为ζ平面上的半圆$\Omega_\zeta\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; 1\right)$，以及 $\Gamma(\theta_1, \theta_2; R)$变为半圆周 $\Gamma_\zeta\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1\right)$. 于是

$$u(z; \theta_1, \theta_2, R) = u_\zeta\left(\zeta; -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1\right).$$

但是

$$u_\zeta\left(\zeta; -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \frac{2\varphi}{\pi},$$

其中φ是点ζ关于直径$(\xi = 0) \cap (-1 < \eta < 1)$的张角的补角，因此

$$\begin{aligned}
u(z; \theta_1, \theta_2, R) &\leqslant \frac{2}{\pi}\left\{ \operatorname{arctg}\frac{\xi}{1+\eta} + \operatorname{arctg}\frac{\xi}{1-\eta} \right\} \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{\xi}{1+\eta} + \frac{\xi}{1-\eta} \right\} = \frac{4\xi}{\pi(1-\eta^2)} \\
&\leqslant \frac{4|\zeta|}{\pi(1-|\zeta|^2)} \\
&= \frac{4\left(\frac{|z|}{R}\right)^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}}{\pi\left(1-\left(\frac{|z|}{R}\right)^{\frac{2\pi}{\theta_2-\theta_1}}\right)}.
\end{aligned}$$

于是引理 2.10 得证.

引理 2.11[43c] 设整函数 $f(z)$ 的级 $\lambda > \frac{\pi}{2\theta}$ $(0 < \theta \leqslant \pi)$, 并且在 $\Omega(-\theta, \theta)$上无 $f(z)$的 Julia 方向.

任意取定一个数ε，使得$0<\varepsilon<\theta$，$\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}<\lambda$，则有

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log\log^{+}M\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R),f\}}{\log R}\leqslant\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}. \tag{2.83}$$

证． 根据假设，在$\Omega(-\theta,\theta)$上无$f(z)$的Julia方向．于是，根据定理2.16，对任意数$\varepsilon>0$，存在两个判别有穷值a,b使得

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log^{+}n\left\{\overline{\Omega}\left(-\theta+\frac{\varepsilon}{2},\theta-\frac{\varepsilon}{2};R\right),f=X\right\}}{\log R}=0,\quad X=a,b. \tag{2.84}$$

作变换

$$\zeta=\frac{z^{\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}}-1}{z^{\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}}+1},$$

则$\Omega\left(-\theta+\frac{\varepsilon}{2},\theta-\frac{\varepsilon}{2}\right)$变为$\zeta$平面上的单位圆$|\zeta|<1$，另一方面，逆变换为

$$z=z(\zeta)=\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}}.$$

根据引理2.9（置其中的$R_1=1$），我们判定圆$|\zeta|\leqslant r(<1)$在z平面上的像域必定含于域$\overline{\Omega}\left(-\theta+\frac{\varepsilon}{2},\theta-\frac{\varepsilon}{2};R\right)$内，而

$$R=\left(\frac{2}{1-r}\right)^{\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}}.$$

置 $\varphi(\zeta)=f(z(\zeta))$. 则根据(2.84)式，对任意小的数 $\eta>0$，只要 r 充分接近于 1，就有

$$n(r,\varphi=X)\leqslant n\left\{\overline{\Omega}\left(-\theta+\frac{\varepsilon}{2},\theta-\frac{\varepsilon}{2};R\right),f=X\right\}\leqslant R^{\eta}$$

$$=2^{\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\eta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\eta},X=a,b,$$

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\log^{+}n(r,\varphi=X)}{\log\dfrac{1}{1-r}}\leqslant\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\cdot\eta,\quad X=a,b.$$

进一步根据定理 1.8，我们判定 $\varphi(\zeta)$ 的级不超过 $\dfrac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\eta$. 但是，由于 η 可以任意小，所以 $\varphi(\zeta)$ 的级是零. 因此，当 r 充分接近于 1 时，对任意小的数 $\eta>0$，我们有

$$T(r,\varphi)<\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\eta}.$$

进一步根据 1.21 式，可得估计

$$\log^{+}M(r,\varphi)\leqslant\frac{4}{1-r}T\left(\frac{1+r}{2},\varphi\right)\leqslant 2^{2+\eta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\eta},\tag{2.85}$$

另一方面，应用引理 2.9，我们得到

$$\log^{+}M\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R),f\}$$

$$\leqslant\log^{+}M(\rho,\varphi)+\log^{+}M(1,f)+\log 2,$$

$$\rho=1-\frac{\varepsilon}{2(2\theta-\varepsilon)}R^{-\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}}.$$

注意到当$R\to+\infty$时，$\rho\to1$. 于是根据(2.85)式，我们判定

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+M\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R),f\}}{\log R}\leqslant\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}(1+\eta).$$

由于η可以取得任意小，所以(2.83)式成立，即引理2.11得证.

如果假设$f(z)$在$\Omega(-\theta,\theta)$上无$f(z)$的$\lambda\left(\lambda>\frac{\pi}{2\theta}\right)$级Borel方向，则代替(2.84)式，根据定理2.14我们有

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log^+n\left\{\overline{\Omega}\left(-\theta+\frac{\varepsilon}{2},\theta-\frac{\varepsilon}{2};R\right),f=X\right\}}{\log R}\leqslant\lambda'<\lambda,$$

$$X=a,b.$$

进一步得到

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\log^+n(r,\varphi=X)}{\log\frac{1}{1-r}}\leqslant\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}(\lambda'+\eta),X=a,b.$$

不妨假设$\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\lambda'>1$. 于是根据定理1.8, 我们判定$\varphi(\zeta)$的级不超过$\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\lambda'-1$. 于是代替(2.85)式有

$$\log^+M(r,\varphi)\leqslant2^{2+\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\lambda'-1+\eta}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{2\theta-\varepsilon}{\pi}\lambda'+\eta}.$$

进一步得到

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+M\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R),f\}}{\log R}\leqslant\lambda'+\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}\eta,$$

由于η可以取得任意小，所以我们判定

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+M\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R),f\}}{\log R}\leqslant\lambda'<\lambda.$$

于是，我们证明了如下结果：

引理2.12 设整函数$f(z)$的级$\lambda>\frac{\pi}{2\theta}(0<\theta\leqslant\pi)$，并且在$\Omega(-\theta,\theta)$上无$f(z)$的$\lambda$级Borel方向．任意取定一个数$\varepsilon$，使得$0<\varepsilon<\theta$，$\frac{\pi}{2\theta-\varepsilon}<\lambda$，则有

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+M\{\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R),f\}}{\log R}<\lambda.$$

2.5.2. Julia方向的分布

设超越整函数$f(z)$的全体Julia方向和单位圆周$\Gamma(0,2\pi;1)$的交集为E．根据定理2.15的系和Julia方向的定义，E是一个非空闭集．因此余集$\Omega=\{\Gamma(0,2\pi;1)-E\}$是一个开集．开集$\Omega$的每个连通分支都是一个开弧段．简称最大开弧段．$\Omega$是由至多可数个最大开弧段$\omega_i(i=1,2,\cdots,p;0\leqslant p\leqslant+\infty)$所组成：$\Omega=\bigcup_i\omega_i$．置

$$\omega=\min_i\{\operatorname{mes}\omega_i\}.$$

如果Ω是空集，则取$\omega=0$．

E的每个连通分支是闭弧段（可退化为一点），简称最大闭弧段．E是由至多可数个最大闭弧段$I_j(j=1,2,\cdots,p)$所组成：$E=\bigcup_j I_j$．置

$$I=\max_j\{\operatorname{mes}I_j\}.$$

我们有下述结果[43c]：

定理2.17 当整函数$f(z)$的级$\lambda > \frac{\pi}{\omega}$时，则有

$$I \geqslant \min\left\{\frac{\pi}{\mu}, \omega\right\},$$

其中μ是$f(z)$的下级.

证. 当$\mu = +\infty$时.定理2.17显然成立. 因此，我们只须考虑$\mu < +\infty$时的情况. 根据假设$\lambda > \frac{\pi}{\omega}$，所以$\Omega$不能是空集，而且$\Omega$只具有有限多个最大开弧段$\omega_i (i = 1, 2, \cdots, P; 1 \leqslant P < +\infty)$. 因而$E$也具有$P$个最大闭弧段$I_j (j = 1, 2, \cdots, P)$. 我们在$\overline{\Gamma}(0, 2\pi; 1)$上取$2P$个点$e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_{2P}}, 0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_3 < \theta_4 \leqslant \theta_5 < \cdots \leqslant \theta_{2P-1} < \theta_{2P} \leqslant \theta_{2P+1}, \theta_{2P+1} = \theta_1 + 2\pi$，使得$\overline{\Gamma}(\theta_{2k}, \theta_{2k+1}; 1) (k = 1, 2, \cdots, P)$是$E$的全体最大闭弧段，$\overline{\Gamma}(\theta_{2k-1}, \theta_{2k}; 1) (k = 1, 2, \cdots, P)$是$\Omega$的全体最大开弧段.

以下，我们区分两种情况进行证明：

(1) $\mu > \frac{\pi}{\omega}$.

我们用反证法. 假设定理2.17不成立，则应有$I < \frac{\pi}{\mu} < \omega$. 我们任意取定一个数$\varepsilon$，使得

$$0 < \varepsilon < \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon} < \mu, \quad I + 2\varepsilon < \frac{\pi}{\mu}.$$

然后再取定一个数η，使得

$$0 < \eta < \min\left\{\frac{1}{3}\left(\mu - \frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon}\right),\right.$$

$$\left.\left(\mu - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\omega - 2\varepsilon}}\right)\left[3 + \sqrt{\mu\pi^{-1}(\omega - 2\varepsilon)}\right]^{-1},\right.$$

$$\left(\frac{\pi}{l+2\varepsilon}-\mu\right)\left[3+\sqrt{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}\right]^{-1}\left[\sqrt[3]{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}-1\right]\Bigg\}. \tag{2.86}$$

根据引理2.11，存在一个值r_0，使得

$$r_0^{\eta}\geqslant(1+8\pi^{-1}),\quad r_0^{\frac{\pi}{l+2\varepsilon}\cdot(\sqrt[3]{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}-1)}\geqslant 2,$$

以及当$r\geqslant r_0$时，有

$$\log M\{\overline{\Omega}(\theta_{2k-1}+\varepsilon,\theta_{2k}-\varepsilon;\ r),\ f\}\leqslant r^{\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta},\ k=1,2,\cdots,p. \tag{2.87}$$

另一方面，根据下级的定义，存在一无穷序列$r_n(n=1,2,\cdots)$，使得

$$r_n^{\mu-\eta}\leqslant\log M(r_n,\ f)\leqslant r_n^{\mu+\eta},\ n=1,2,\cdots, \tag{2.88}$$

以及

$$r_{n+1}\geqslant r_n^{\frac{\mu(\omega-2\varepsilon)}{\pi}},\ r_n\geqslant r_0,\ n=1,2,\cdots. \tag{2.89}$$

现在，对于每个值n，我们确定一个正整数m_n，使得

$$\left\{\frac{\log r_{n+1}}{\log r_n}\right\}^{\frac{1}{m_n}}<\left\{\frac{\mu(\omega-2\varepsilon)}{\pi}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.90}$$

$$\left\{\frac{\log r_{n+1}}{\log r_n}\right\}^{\frac{1}{m_n-1}}\geqslant\left\{\frac{\mu(\omega-2\varepsilon)}{\pi}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.91}$$

根据(2.89)和(2.90)式，判定$m_n\geqslant 3$. 再根据(2.91)式判定$m_n<+\infty$. 置

$$v_n = \left\{ \frac{\log r_{n+1}}{\log r_n} \right\}^{\frac{1}{m_n}} - 1,$$

则有

$$r_{n+1} = r_n^{(1+v_n)^{m_n}}. \tag{2.92}$$

根据(2.91)式，我们有

$$\left\{ \frac{\log r_{n+1}}{\log r_n} \right\}^{\frac{1}{m_n}} \geqslant \left\{ \frac{\mu(\omega - 2\varepsilon)}{\pi} \right\}^{\frac{m_n - 1}{2m_n}} \geqslant \left\{ \frac{\mu(\omega - 2\varepsilon)}{\pi} \right\}^{\frac{1}{3}}.$$

于是

$$v_n \geqslant \left\{ \frac{\mu(\omega - 2\varepsilon)}{\pi} \right\}^{\frac{1}{3}} - 1 > 0, \tag{2.93}$$

另一方面，根据(2.90)式，我们又有

$$v_n < \left\{ \frac{\mu(\omega - 2\varepsilon)}{\pi} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1. \tag{2.94}$$

应用引理2.10，根据(2.87)和(2.88)式，我们有

$$\log M\left\{ T\left(\theta_{2k} - \varepsilon, \theta_{2k+1} + \varepsilon;\ r_n^{(1+v_n)^{m_n - 1}}\right), f \right\}$$

$$\leqslant r_{n+1}^{\frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon} + \eta} + \frac{4\left(\dfrac{r_n^{(1+v_n)^{m_n - 1}}}{r_{n+1}} \right)^{\frac{\pi}{l + 2\varepsilon}}}{\pi\left\{ 1 - \left(\dfrac{r_n^{(1+v_n)^{m_n - 1}}}{r_{n+1}} \right)^{\frac{2\pi}{l + 2\varepsilon}} \right\}} \cdot r_{n+1}^{\mu + \eta},\ k = 1, 2, \cdots, p.$$

根据(2.92)式，得到

$$\log M\left\{T\left(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}}\right),f\right\}$$

$$\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)}$$

$$+\frac{4}{\pi\left\{1-r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}\cdot\frac{-2\pi\nu_n}{l+2\varepsilon}}\right\}}r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}\left\{(1+\nu_n)(\mu+\eta)-\frac{\pi\nu_n}{l+2\varepsilon}\right\}},$$

$$k=1,2,\cdots,p.$$

注意到

$$r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}\frac{2\pi\nu_n}{l+2\varepsilon}}\geqslant r_0^{\frac{\pi}{l+2\varepsilon}\cdot\left(\sqrt{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}-1\right)}\geqslant 2,$$

则有

$$\log M\{T(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;\ r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}}),\ f\}$$

$$\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)}$$

$$+\frac{8}{\pi}r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}\left\{(1+\nu_n)(\mu+\eta)-\frac{\pi\nu_n}{l+2\varepsilon}\right\}},$$

$$k=1,2,\cdots,p.$$

根据(2.86)和(2.94)式，

$$(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)\leqslant\sqrt{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)$$

$$=\sqrt{\mu\pi(\omega-2\varepsilon)^{-1}}+\sqrt{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}\cdot\eta\leqslant\mu-3\eta.$$

另外，根据(2.86)，(2.93)和(2.94)式

$$(1+v_n)(\mu+\eta)-\frac{\pi v_n}{I+2\varepsilon}$$

$$=\mu+(1+v_n)\eta-\left(\frac{\pi}{I+2\varepsilon}-\mu\right)v_n$$

$$\leqslant \mu+\sqrt{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}\cdot\eta-\left(\frac{\pi}{I+2\varepsilon}-\mu\right)$$

$$\times\left\{\cdot{}^{-3}\sqrt{\mu\pi^{-1}(\omega-2\varepsilon)}-1\right\}\leqslant \mu-3\eta.$$

因此，我们有

$$\log M\{\Gamma(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;\ r_n^{(1+v_n)^{m_n-1}}),f\}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{8}{\pi}\right)r_n^{(1+v_n)^{m_n-1}(\mu-3\eta)},$$

$$k=1,2,\cdots,p.$$

注意到

$$\left(1+\frac{8}{\pi}\right)r_n^{-\eta(1+v_n)^{m_n-1}}\leqslant\left(1+\frac{8}{\pi}\right)r_0^{-\eta}\leqslant 1,$$

则得到

$$\log M\{\Gamma(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;\ r_n^{(1+v_n)^{m_n-1}}),f\}$$

$$\leqslant r_n^{(1+v_n)^{m_n-1}(\mu-2\eta)},\qquad k=1,2,\cdots,p. \tag{2.95}$$

另一方面，根据(2.86)式

$$\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\leqslant\mu-2\eta.$$

于是，由(2.87)式给出

$$\log M\{\overline{\Omega}(\theta_{2k-1}+\varepsilon,\theta_{2k}-\varepsilon,r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}}),f\}$$

$$\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}(\mu-2\eta)},\qquad k=1,2,\cdots,p.$$

结合(2.95)式，求得

$$\log M(r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}},f)\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}(\mu-2\eta)}.$$

以下，我们重复上述讨论 m_n-1 次，就可依次得到

$$\log M(r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}},f)\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}(\mu-2\eta)},$$

……

$$\log M(r_{n1}f)\leqslant r_n^{\mu-2\eta}.$$

但是这与(2.88)式相矛盾.

(2) $\mu\leqslant\dfrac{\pi}{\omega}$.

假设定理2.17不成立，则应有 $l<\omega\leqslant\dfrac{\pi}{\mu}$. 我们任意取定一个数 ε, 使得

$$0<\varepsilon<\frac{\omega}{2},\quad l+2\varepsilon<\omega-2\varepsilon,\quad \frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}<\lambda.$$

然后再取定一个有穷值 K, $\dfrac{\pi}{\omega-2\varepsilon}<K<\lambda$. 根据级的定义，存在一无穷序列 $r_n(n=1,2,\cdots)$, 使得

$$\log M(r_n,f)\geqslant r_n^K. \tag{2.96}$$

最后取定一个数 η, 使得

$$0 < \eta < (1 + P)^{\frac{1}{2}} - 1, \tag{2.97}$$

$$P = \min\left\{1, \left(3 + \frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon}\right)^{-1}\left(\frac{\pi}{I + 2\varepsilon} - \frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon}\right),\right.$$

$$\left.\left(4 + \frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon}\right)^{-1}\left(K - \frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon}\right)\right\}. \tag{2.98}$$

根据引理2.11, 存在一个值r_0, 使得

$$r_0^{\eta} \geqslant 2, \quad r_0^{[(1+P)^{\frac{1}{2}} - 1]\eta} \geqslant \frac{16}{\pi}, \quad r_0^{\frac{\pi}{I + 2\varepsilon}[(1+P)^{\frac{1}{2}} - 1]} \geqslant 2, \tag{2.99}$$

以及当$r \geqslant r_0$时有

$$\log M\{\overline{\Omega}(\theta_{2k-1} + \varepsilon, \theta_{2k} - \varepsilon; r), f\}$$

$$\leqslant r^{\frac{\pi}{\omega - 2\varepsilon} + \eta}, \quad k = 1, 2, \cdots, P. \tag{2.100}$$

另一方面, 根据下级的定义, 存在一无穷序列$t_n (n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\log M(t_n, f) \leqslant t_n^{\mu + \eta}, \tag{2.101}$$

以及

$$t_n \geqslant r_n^{1 + P}. \tag{2.102}$$

根据(2.96)和(2.102)式, 必定存在一个正整数n_0, 使得当$n \geqslant n_0$时有

$$t_n \geqslant r_n \geqslant r_0.$$

现在, 对应于每个数$n (n > n_0)$, 我们确定一个正整数m_n, 使得

$$\left\{\frac{\log t_n}{\log r_n}\right\}^{\frac{1}{m_n}} < 1 + P, \tag{2.103}$$

$$\left\{\frac{\log t_n}{\log r_n}\right\}^{\frac{1}{m_n-1}} \geqslant 1+P. \tag{2.104}$$

根据(2.102)和(2.103)式，判定$m_n \geqslant 2$. 另外，根据(2.104)式，判定$m_n < +\infty$. 置

$$v_n = \left\{\frac{\log t_n}{\log r_n}\right\}^{\frac{1}{m_n}} - 1,$$

则有

$$t_n = r_n^{(1+v_n)m_n}.$$

根据(2.104)式，我们有

$$\left\{\frac{\log t_n}{\log r_n}\right\}^{\frac{1}{m_n}} \geqslant (1+P)^{\frac{m_n-1}{m_n}} \geqslant (1+P)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$v_n \geqslant (1+P)^{\frac{1}{2}} - 1, \tag{2.105}$$

另一方面，根据(2.103)式，我们有

$$v_n < P. \tag{2.106}$$

注意到$\mu \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}$，于是$\mu < \dfrac{\pi}{\omega - 2\varepsilon}$. 根据(2.101)式，则有

$$\log M(t_n, f) \leqslant t_n^{\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta}.$$

当$n > n_0$时，更有

$$\log M\left(r_n^{(1+v_n)^{m_n-1}}, f\right) \leqslant 2r_n^{(1+v_n)^{m_n-1}(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)}. \tag{2.107}$$

应用引理 2.10，根据(2.100)和(2.107)式，我们得到

$$\log M\{\overline{T}(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}}),f\}$$

$$\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}(1+\nu_n)}\left\{\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right\}$$

$$+\frac{4\left(\dfrac{r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}}}{r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}}}\right)^{\frac{\pi}{I+2\varepsilon}}}{\pi\left\{1-\left(\dfrac{r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}}}{r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}}}\right)^{\frac{2\pi}{I+2\varepsilon}}\right\}}2r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-1}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)},$$

$$k=1,2,\cdots,P.$$

注意到

$$r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}\cdot\frac{2\pi\nu_n}{I+2\varepsilon}}\geqslant r_0^{\frac{2\pi}{I+2\varepsilon}\left\{(1+P)^{\frac{1}{2}}-1\right\}}\geqslant 2,$$

则得

$$\log M\{\overline{T}(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}}),f\}$$

$$\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)}$$

$$+\frac{16}{\pi}r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}\left\{(1+\nu_n)^2\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-\frac{\pi\nu_n}{I+2\varepsilon}\right\}},$$

$$k=1,2,\cdots,P. \qquad (2.108)$$

再注意到

$$(1+\nu_n)^2\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-\frac{\pi\nu_n}{I+2\varepsilon}$$

$$= (1+v_n)^2\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)$$

$$+(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-\frac{\pi v_n}{I+2\varepsilon}+v_n\eta-v_n\eta$$

$$= (1+v_n)v_n\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-\frac{\pi v_n}{I+2\varepsilon}+v_n\eta$$

$$+(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-v_n\eta$$

$$= v_n\left\{\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}-\frac{\pi}{I+2\varepsilon}+\frac{\pi v_n}{\omega-2\varepsilon}+2\eta+v_n\eta\right\}$$

$$+(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-v_n\eta,$$

根据(2.97)和(2.105)式有

$$(1+v_n)^2\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-\frac{\pi v_n}{I+2\varepsilon}$$

$$\leqslant v_n\left\{\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}-\frac{\pi}{I+2\varepsilon}+\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+2+\eta\right)v_n\right\}$$

$$+(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-v_n\eta.$$

由于(2.98)和(2.106)式以及$\eta\leqslant 1$，求得

$$(1+v_n)^2\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-\frac{\pi v_n}{I+2\varepsilon}$$

$$\leqslant (1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-v_n\eta.$$

于是,(2.108)式给出

$$\log M\{\mathcal{T}(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}}),f\}$$

$$\leqslant r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)}$$

$$+\frac{16}{\pi}r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)-(1+\nu_n)^{m_n-2}\nu_n\eta},$$

$$k=1,2,\cdots,p.$$

根据(2.99)和(2.105)式有

$$\frac{16}{\pi}r_n^{-\eta\nu_n(1+\nu_n)^{m_n-2}}\leqslant\frac{16}{\pi}r_0^{-\eta\{(1+p)^{\frac{1}{2}}-1\}}\leqslant 1.$$

于是

$$\log M\{\mathcal{T}(\theta_{2k}-\varepsilon,\theta_{2k+1}+\varepsilon;r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}}),f\}$$

$$\leqslant 2r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)},$$

$$k=1,2,\cdots,p.$$

再结合(2.100)式,我们得到

$$\log M(r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}},f)\leqslant 2r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-2}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)}.$$

以下,我们重复上述讨论 m_n-2 次,就可以依次得到

$$\log M(r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-3}},f)\leqslant 2r_n^{(1+\nu_n)^{m_n-3}(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)},$$

……

$$\log M(r_n,f)\leqslant 2r_n^{(1+\nu_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)}. \tag{2.109}$$

根据(2.97),(2.105)和(2.106)式有 $\eta<\nu_n<P$. 于是

$$(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)\leqslant(1+P)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+P\right)$$

$$=\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\frac{\pi P}{\omega-2\varepsilon}+P+P^2.$$

再由(2.98)式有

$$(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)\leqslant K-2P.$$

注意到$\eta<P$, 则得

$$(1+v_n)\left(\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+\eta\right)\leqslant K-2\eta.$$

因此, (2.109)式给出

$$\log M(r_n,f)\leqslant 2r_n^{K-2\eta}.$$

再根据(2.99)式有

$$2r_n^{-\eta}\leqslant 2r_0^{-\eta}\leqslant 1.$$

最后得到

$$\log M(r_n,f)\leqslant r_n^{K-\eta}.$$

但是这与(2.96)式相矛盾,从而定理2.17得证.

定理2.17有下述推论:

系 1. 设整函数$f(z)$的下级$\mu<+\infty$,具有有穷条Julia方向,则$f(z)$的级$\lambda<+\infty$.

事实上,当$f(z)$只具有有穷条Julia方向时,必有$\omega>0$和$I=0$. 另外,根据$\mu<+\infty$有$\frac{\pi}{\mu}>0$. 于是$I<\min\left\{\frac{\pi}{\mu},\omega\right\}$. 因此,

根据定理2.17，我们判定$\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega} < +\infty$.

系 2. 设整函数$f(z)$的下级$\mu < +\infty$，并且仅仅具有一条Julia方向，则$f(z)$的级$\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

事实上，根据系1的证明，首先有$\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega}$. 其次，根据$f(z)$只有一条Julia方向的条件，有$\omega = 2\pi$. 于是$\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

系 3. 设整函数$f(z)$仅仅具有一个最大闭弧段，并且$I < \min\left\{\frac{\pi}{\mu}, \omega\right\}$，则$f(z)$的级$\lambda < 1$，以及$I < \frac{\pi}{\lambda}$.

事实上，根据$I < \min\left\{\frac{\pi}{\mu}, \omega\right\}$，则有$\mu < +\infty$和$\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega}$. 于是，$\omega \leqslant \frac{\pi}{\mu}$. 因此$I < \omega \leqslant \frac{\pi}{\lambda}$. 另一方面，根据$\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi - I}$和$I < \frac{\pi}{\lambda}$，则有$\lambda < 1$.

§2.6. 关于Nevanlinna方向

2.6.1. Nevanlinna方向的定义

Julia方向和Borel方向分别相应于开平面上的Picard定理和Borel定理. 人们自然要问：相应于Nevanlinna亏量关系式，是否存在着所谓的Nevanlinna方向？这个问题的提出虽然是自然的，但是这个问题的精确数学描述却是很不明确的. 例如，如何定义一个亚纯函数在一个方向上的亏量本身就是一个值得研究的问题. 最近，吕以辇和作者给出了Nevanlinna方向的一种定义方法，并在这种意义下，证明了它的存在性.[29a]

我们回忆某些记号，并引入一些新的记号. 设$w = w(z)$是开平

面 $|z| < +\infty$ 上的一个非常数亚纯函数.置

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2} d\omega, \quad d\omega = r dr d\theta, \quad z = re^{i\theta},$$

$$S(E) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{E} \frac{|w'(z)|^2 d\omega}{(1+|w(z)|^2)^2},$$

$$T_0(r, w) = \int_0^r \frac{S(t)}{t} dt,$$

$$T_0(\Omega(\theta_1, \theta_2; r)) = \int_0^r \frac{S\{\Omega(\theta_1, \theta_2; t)\}}{t} dt,$$

和

$$N\{\Omega(\theta_1, \theta_2; r), a\} = N\{\Omega(\theta_1, \theta_2; r), w = a\}$$

$$= \int_0^r \frac{n\{\Omega(\theta_1, \theta_2; t), a\}}{t} dt.$$

然后,我们考虑 Nevanlinna 方向的定义:对于任意一个复数值 a, 置

$$\delta(a, \varphi) = 1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\Omega_\varphi} \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{N\{\Omega(\theta_1, \theta_2; r), a\}}{T_0\{\Omega(\theta_1, \theta_2; r)\}},$$

其中

$$\Omega_\varphi = \{\Omega(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi - \varepsilon < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi + \varepsilon, \varepsilon > 0\},$$

则称 $\delta(a, \varphi)$ 为值 a 关于方向 $\Delta(\varphi)$ 的亏量.如果 $\delta(a, \varphi) > 0$, 则称值 a 为关于方向 $\Delta(\varphi)$ 的亏值.明显地有 $\delta(a, \varphi) \leqslant 1$, 以及当 $w(z)$ 在 $\Omega(\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon)(\varepsilon > 0)$ 内不取值 a 时有 $\delta(a, \varphi) = 1$.

置

$$\delta\{a, \Omega(\varphi_1, \varphi_2)\} = 1 - \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{N\{\Omega(\varphi_1, \varphi_2; r), a\}}{T_0\{\Omega(\varphi_1, \varphi_2; r)\}},$$

则称$\delta\{a, \Omega(\varphi_1, \varphi_2)\}$为值$a$关于角域$\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$的亏量. 如果$\delta\{a, \Omega(\varphi_1, \varphi_2)\} > 0$, 则称值$a$为关于角域$\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$的亏值.

如果对于任意有穷个关于方向$\Delta(\varphi)$的亏值$a_1, a_2, \cdots, a_q$ ($q < +\infty$), 恒有$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu, \varphi) \leqslant 2$, 则称$\Delta(\varphi)$是$w(z)$的一条Nevanlinna方向.

根据定义, 我们判定若$\Delta(\varphi)$是$w(z)$的一条Nevanlinna方向, 则关于方向$\Delta(\varphi)$的全体亏值集合构成一个可数集合, 并且关于方向$\Delta(\varphi)$的全体亏量总和$\leqslant 2$. 另外, 一条Nevanlinna方向必定也是一条Julia方向.

2.6.2. 某些引理

引理2.13 设$w = w(z)$是圆$|z| \leqslant 1$内的一个亚纯函数, $a_1, a_2, \cdots, a_q$ ($3 \leqslant q < +\infty$)是q个判别复数, 并且有

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(1, a_\nu) < +\infty,$$

则对任意值r ($0 < r < 1$)有

$$(q-2)S(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} n(1, a_\nu) + \frac{A}{1-r}, \qquad (2.110)$$

其中$A > 0$是一个仅仅依赖于$a_1, a_2, \cdots, a_q$的常数.

证. 根据(1.66)式, 我们有

$$(q-2)S(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) + hL(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} n(1, a_\nu) + hL(r),$$

其中 h 是仅仅依赖于 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ 的常数，以及

$$L(r)=\int_0^{2\pi}\frac{|W'(re^{i\theta})|}{1+|w(re^{i\theta})|^2}rd\theta.$$

如果对于任意值 r', $r\leqslant r'<1$ 有 $(q-2)S(r')-\sum_{v=1}^{q}n(1,a_v)>0$，则根据不等式 $[L(r)]^2\leqslant 2\pi^2 r\frac{ds(r)}{dr}$，我们判定

$$\left\{(q-2)S(r')-\sum_{v=1}^{q}n(1,a_v)\right\}^2\leqslant h^2(L(r'))^2\leqslant 2\pi^2h^2r'\frac{ds(r')}{dr'}.$$

于是

$$1-r<\int_r^1\frac{dr'}{r'}\leqslant 2\pi^2h^2\int_r^1\frac{ds(r')}{\left\{(q-2)S(r')-\sum_{v=1}^{q}n(1,a_v)\right\}^2}$$

$$\leqslant\frac{2\pi^2h^2}{q-2}\cdot\frac{1}{\left\{(q-2)S(r)-\sum_{v=1}^{q}n(1,a_v)\right\}},$$

$$(q-2)S(r)\leqslant\sum_{v=1}^{q}n(1,a_v)+\frac{2\pi^2h^2}{(q-2)(1-r)}.$$

如果对于某个值 r', $r\leqslant r'<1$ 有 $s(r')(q-2)-\sum_{v=1}^{q}n(1,a_v)\leqslant 0$，则有 $(q-2)S(r)\leqslant(q-2)S(r')\leqslant\sum_{v=1}^{q}n(1,a_v)$. 因此，(2.110) 式成立，即引理 2.13 得证.

引理 2.14 设 $w=w(z)$ 是 $\overline{\Omega}(-\theta,\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ 上的亚纯函数，$a_1, a_2, \cdots a_q$ $(3\leqslant q\leqslant+\infty)$ 是 q 个判别复数. 则对于任意值 θ' $(0<\theta'<\theta)$，值 σ $(\sigma>1)$ 和任意正整数 m，只要 r 充分大，我们就有

$$(q-2)T_0\{\Omega(-\theta',\theta';r)\}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{m}\right)\sum_{\nu=1}^{q}N(\Omega(-\theta,\theta;r\sigma^{2m}),a_\nu)+O((\log r)^2).$$

证. 置 $r_i=\sigma^{mi}, i=0,1,2,\cdots; r_{ij}=\sigma^{mi+j} j=0,1,\cdots,m-1$. 明显地有 $r_{i0}=r_i, r_{im}=r_{i+1}$. 对于任意取定的数 t, $(t\geqslant r_1)$ 存在一个正整数 k, 使得 $r_k\leqslant t<r_{k+1}$. 显然, 又存在整数 $j_0, 0\leqslant j_0\leqslant m-1$, 使得

$$\sum_{\nu=1}^{q}n\left\{\bigcup_{i=0}^{k+1}\Omega(-\theta,\theta;r_{ij_0},r_{ij_0+1}),a_\nu\right\}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{q}n\left\{\Omega(-\theta,\theta;r_{k+2}),a_\nu\right\}.$$

作变换 $\zeta=\dfrac{z}{r_{i+1j_0+1}}$ $(0\leqslant i\leqslant k)$, 则 $\Omega(-\theta,\theta;r_{ij_0},r_{i+1j_0+1})$ 和 $\Omega(-\theta',\theta';r'_i,r'_{i+1})$ $(r'_i=\sqrt{r_{ij_0}\cdot r_{ij_0+1}}, r'_{i+1}=\sqrt{r_{i+1j_0}\cdot r_{i+1j_0+1}})$ 分别变为 ζ 平面上的 $\Omega(-\theta,\theta;\dfrac{1}{\sigma^{m+1}},1)$ 和 $\Omega(-\theta',\theta';\dfrac{1}{\sigma^{m+\frac{1}{2}}},\dfrac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}}})$, 以及点 $\sqrt{r_{ij_0}\cdot r_{i+1j_0+1}}$ 变为 ζ 平面上的点 $\sigma^{-\frac{m+1}{2}}$. 进一步, 再保角变换 $\Omega(-\theta,\theta;\dfrac{1}{\sigma^{m+1}},1)$ 到 ξ 平面上的圆 $|\xi|<1$, 以及点 $\zeta=\sigma^{-\frac{m+1}{2}}$ 对应于原点 $\xi=0$. 显然, 存在一个仅仅依赖于 m,σ,θ 和 θ' 的常数 χ, 使得 $\Omega\left(-\theta',\theta';\dfrac{1}{\sigma^{m+\frac{1}{2}}},\dfrac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}}}\right)$ 在 ξ 平面上的像域含于圆 $|\xi|<\chi$ 内. 应用引理 2.13, 我们可以有

$$(q-2)S\{\Omega(-\theta',\theta';r'_i,r'_{i+1})\}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{q} n\{\Omega(-\theta, \theta; r_{ij_0}, r_{i+1j_0+1}) a_\nu\} + \frac{A}{1-x},$$

$$i = 0, 1, \cdots, k.$$

其中 $A > 0$ 是一个仅仅依赖于 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ 的常数. 进一步有

$$(q-2)\sum_{i=0}^{k} S\{\Omega(-\theta', \theta'; r'_i, r'_{i+1})\}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{i=0}^{k} n\left\{\Omega(-\theta, \theta; r_{ij_0}, r_{i+1j_0+1}) a_\nu\right\} + \frac{k+1}{1-x}A.$$

注意到 $r_k \leqslant t < r_{k+1}$ 和 $r_{k+2} \leqslant t\sigma^{2m}$, 则得到

$$(q-2)S\{\Omega(-\theta', \theta'; t)\}$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{m}\right)\sum_{\nu=1}^{q} n\{\Omega(-\theta, \theta; t\sigma^{2m}), a_\nu\}$$

$$+ (q-2)S(\Omega(-\theta', \theta'; \sigma^m)) + \frac{2A\log t}{m(1-x)\log\sigma}.$$

于是

$$(q-2)\int_{\sigma^m}^{r} \frac{S\{\Omega(-\theta', \theta'; t)\}}{t} dt$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{m}\right)\sum_{\nu=1}^{q}\int_0^r \frac{n\{\Omega(-\theta, \theta; t\sigma^{2m}), a_\nu\}}{t} dt$$

$$+ (q-2)S\{\Omega(-\theta', \theta'; \sigma^m)\}\int_{\sigma^m}^{r}\frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{2A}{m(1-\chi)\log\sigma}\int_{\sigma^m}^{r}\frac{\log t}{t} dt.$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(q-2)T_0\{\Omega(-\theta',\theta';r)\}\\
&\leqslant\left(1+\frac{1}{m}\right)\sum_{v=1}^{q}N\{\Omega(-\theta,\theta;re^{2\sigma}),a_v\}\\
&\quad+(q-2)T_0\{\Omega(-\theta',\theta';\sigma^m)\}\\
&\quad+(q-2)S\{\Omega(-\theta',\theta';\sigma^m)\}\log r\\
&\quad+\frac{A}{m(1-x)\log\sigma}(\log r)^2\\
&=\left(1+\frac{1}{m}\right)\sum_{v=1}^{q}N\{\Omega(-\theta,\theta;r\sigma^{2m}),a_v\}+O((\log r)^2),
\end{aligned}
$$

即引理 2.14 得证.

对于任意给定的正整数 l 和偶正整数 k, 记

$$
\theta_{ij}=\frac{2\pi}{l}i+\frac{2\pi}{lk}j,\ i=0,1,\cdots,l-1;j=0,1,\cdots,k-1,
$$

$$
\theta_{ik}=\theta_{i+10}.
$$

和

$$
\Omega=\left\{\Omega\left(\theta_{ij},\theta_{ij}+\frac{2\pi}{l}\right)\middle|\,i=0,1,\cdots,l-1;j=0,1,\cdots,k-1\right\}.
$$

显然在 Ω 内有 kl 个判别角区域.

引理 2.15 设 $w=w(z)$ 是开平面上的一个亚纯函数, 并且满足下述条件:

$$
\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{T_0(r,w)}{(\log r)^2}=+\infty,
$$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log T_0(r,w)}{\log r}=\mu<+\infty,$$

则对于任意取定的数 $\delta>0$, 正整数 N, $N>3$ 和正整数 l, 至少存在一个角区域 $\Omega(\theta,\theta+\frac{2\pi}{l})=\Omega_{Nl}$, 使得关于 Ω_{Nl} 的任意 $q(3\leqslant q\leqslant N)$ 个亏值的亏量总和 $\leqslant 2+\delta$, 并且有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{T_0\left\{\Omega\left(\theta,\theta+\frac{2\pi}{l};r\right)\right\}}{(\log)^2}=+\infty.$$

证. 事实上, 如果不然, 则对任意一对相应于 $\Omega\left(\theta_{ij},\theta_{ij}+\frac{2\pi}{l}\right)\in\Omega$ 的数偶 (i,j), 我们有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{T_0\left\{\Omega\left(\theta_{ij},\theta_{ij}+\frac{2\pi}{l};r\right)\right\}}{(\log r)^2}<+\infty,\qquad(2.111)$$

或者对于 $q_{ij}(3\leqslant q_{ij}\leqslant N)$ 个关于 $\Omega\left(\theta_{ij},\theta_{ij}+\frac{2\pi}{l}\right)$ 的亏值 $a_1^{(i,j)},a_2^{(i,j)},\cdots,a_{q_{ij}}^{(i,j)}$ 有

$$\sum_{\nu=1}^{q_{ij}}\delta\left\{a_\nu^{(ij)},\Omega\left(\theta_{ij},\theta_{ij}+\frac{2\pi}{l}\right)\right\}>2+\delta.\qquad(2.112)$$

置

$$K=\max_{ij}\left\{\frac{q_{ij}-\sum_{\nu=1}^{q_{ij}}\delta\left\{a_\nu^{(ij)},\Omega\left(\theta_{ij},\theta_{ij}+\frac{2\pi}{l}\right)\right\}}{q_{ij}-2}\right\}$$

则根据 (2.112) 式有

$$K \leqslant 1 - \frac{\delta}{N-2} < 1 - \frac{\delta}{N}.$$

另一方面，根据引理 2.4，对于任意给定的数 $\sigma > 1$ 和任意给定的正整数 m，存在一个序列 $\{R_n\}$ 使得

$$R_n < R_{n+1} \to +\infty \ (n \to +\infty),$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{T_0(R_n, w)}{(\log R_n)^2} = +\infty \tag{2.113}$$

和

$$T_0(R_n \sigma^{2m}, w) < \sigma^{2m\mu} T_0(R_n, w)(1 + 0(1))\ (n \to +\infty). \tag{2.114}$$

明显地，存在一个偶整数 j_n，$0 \leqslant j_n \leqslant k-2$ 使得

$$\sum_{i=0}^{l-1} T_0\{\Omega(\theta_{ij_n}, \theta_{ij_n+2}; R_n), w\} \leqslant \frac{2}{k} T_0(R_n, w). \tag{2.115}$$

对于数偶 (i, j_n+1)，我们看出如果 (2.111) 式成立则有

$$T_0\left\{\Omega\left(\theta_{ij_n+1}, \theta_{ij_n+1} + \frac{2\pi}{l}; R_n\right), w\right\} = 0\{(\log R_n)^2\}; \tag{2.116}$$

如果 (2.112) 式成立，则根据引理 2.14 有

$$(q_{ij}-2) T_0\{\Omega(\theta_{ij_n+2}, \theta_{i+1j_n}; R_n), w\}$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{m}\right)\left\{q_{ij} - \sum_{v=1}^{q_{ij}} \delta(a_v^{(ij_n+1)}, \Omega(\theta_{ij_n+1}, \theta_{i+1j_n+1})) + o(1)\right\}.$$

$$T_0\{\Omega(\theta_{ij_n+1}, \theta_{i+1j_n+1}; R_n\sigma^{2m}), w\} + O\{(\log R_n)^2\}.$$

于是

$$T_0\{\Omega(\theta_{ij_n+2},\theta_{i+1j_n};R_n),w\}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{m}\right)\{K+o(1)\}$$

$$\cdot T_0\{\Omega(\theta_{ij_n+1},\theta_{i+1j_n+1};R_n\sigma^{2m}),w\}$$

$$+o\{(\log R_n)^2\}. \tag{2.117}$$

根据 (2. 115), (2. 116) 和 (2. 117) 式，我们有

$$T_0(R_m,w)\leqslant\left(1+\frac{1}{m}\right)(K+0(1))T_0(R_n\sigma^{2m},w)$$

$$+\frac{2}{k}T_0(R_n,w)+0\{(\log R_n)^2\}.$$

令 $n\to+\infty$, 则根据 (2. 114) 和 (2. 113) 式得到

$$1\leqslant\left(1+\frac{1}{m}\right)K\sigma^{2m\mu}+\frac{2}{k}. \tag{2.118}$$

注意到 $K<1-\frac{\delta}{N}$, 如果依次先取定 m, 使得

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)K<1-\frac{\delta}{2N},$$

再取定 $\sigma>1$, 使得

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)K\sigma^{2m\mu}<1-\frac{\delta}{4N}.$$

最后取定 k, 使得 $\frac{2}{k}<\frac{\delta}{8N}$, 则 (2. 118) 式给出

$$1<1-\frac{\delta}{8N}.$$

于是我们得到一个矛盾，从而引理 2.15 得证.

2.6.3. Nevanlinna 方向存在性定理

定理 2.18 设 $w = w(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数，并且满足条件：

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{T_0(r, w)}{(\log r)^2} = +\infty,$$

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T_0(r, w)}{\log r} = \mu < +\infty.$$

则 $w(z)$ 至少有一条 Nevanlinna 方向 $\Delta(\varphi)$，并且对任意数 $\varepsilon > 0$ 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{T_0\{\Omega(\varphi-\varepsilon, \varphi+\varepsilon; r), w\}}{(\log r)^2} = +\infty.$$

证. 应用引理 2.15, 取其中的 $\delta = \delta_N = \dfrac{1}{N}$, $N = l$, $\Omega_{Nl} = \Omega_N = \Omega(\theta_N, \theta_N + \dfrac{2\pi}{N})$, 我们判定对任意 $q(3 \leqslant q \leqslant N)$ 个关于 Ω_N 的亏值的亏量和 $\leqslant 2 + \delta_N$, 以及

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{T_0\{\Omega(\theta_N, \theta_N + \frac{2\pi}{N}; r), w\}}{(\log r)^2} = +\infty. \tag{2.119}$$

不失一般性，可以假定 $\theta_N \to \varphi (N \to +\infty)$，否则，仅仅需要选取一个收敛子序列. 以下，我们证明 $\Delta(\varphi)$ 就是一条 Nevanlinna 方向. 事实上，如果不然，则存在 $q(3 \leqslant q < +\infty)$ 个关于 $\Delta(\varphi)$ 的亏值 $a_1, a_2, \cdots, a_q$, 使得

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu, \varphi) > 2.$$

我们取一个充分小的数$\alpha>0$，使得

$$\delta(a_\nu,\varphi)>\frac{\alpha}{q},\ \nu=1,2,\cdots,q,$$

以及

$$\sum_{\nu=1}^{q}\delta(a_\nu,\varphi)\geq 2+2\alpha.$$

根据$\delta(a_\nu,\varphi)$的定义，存在值$\varepsilon_0>0$，使得对于任意值ε，$(0<\varepsilon<\varepsilon_0)$和任意角区域$\Omega(\varphi_1,\varphi_2)\subset\Omega(\varphi-\varepsilon,\varphi+\varepsilon)$有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N\{\Omega(\varphi_1,\varphi_2;r),a_\nu\}}{T_0\{\Omega(\varphi_1,\varphi_2;r),w\}}\leqslant 1-\delta(a_\nu,\varphi)+\frac{\alpha}{q},$$

$$1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N\{\Omega(\varphi_1,\varphi_2;r),a_\nu\}}{T_0\{\Omega(\varphi_1,\varphi_2;r),w\}}\geqslant\delta(a_\nu,\varphi)-\frac{\alpha}{q}.$$

因此

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left\{1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N\{\Omega(\varphi_1,\varphi_2;r),a_\nu\}}{T_0\{\Omega(\varphi_1,\varphi_2;r),w\}}\right\}>2+\alpha. \tag{2.120}$$

另一方面，我们取一个充分大的正整数N，使得$\delta_N<\alpha$，$q\leqslant N$，以及$\Omega_N\subset\Omega(\varphi-\varepsilon,\varphi+\varepsilon)$. 置$\Omega_N=\Omega(\varphi_1,\varphi_2)$，则有

$$\sum_{\nu=1}^{q}\delta(a_\nu,\Omega_N)\leqslant 2+\delta_N<2+\alpha.$$

但是这与(2.120)式相矛盾. 于是$\Delta(\varphi)$是$w(z)$的一条Nevanlinna方向.

对于任意值$\varepsilon>0$，存在充分大的正整数N，使得$\Omega_N\subset\Omega(\varphi-\varepsilon,\varphi+\varepsilon)$. 因此，(2.119)式给出

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{T_0\{\Omega(\varphi-\varepsilon,\varphi+\varepsilon;r),w\}}{(\log r)^2}=+\infty,$$

即定理2.18完全得证.

§2.7. 注记

2.7.1. 公共Borel方向

1928年,G. Valiron证明了Borel方向的存在性,同时他提出了一个重要而且困难的问题[39b]:亚纯函数与其导数之间是否存在公共Borel方向? 此后相继有G. Valiron本人[39a], A. Rauch[35b]和庄圻泰[10a]等人的工作,他们分别在附加不同的条件下,证明了公共Borel方向的存在性.直到1951年H. Milloux取得了重大进展,他证明了下述结果[30d]:

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的整函数,其级为λ, $0<\lambda<+\infty$,则其导数$f'(z)$的每条λ级Borel方向亦是$f(z)$的λ级Borel方向.

我们可以证明整函数$f(z)$与其导数$f'(z)$有相同的级.于是根据G. valiron的结果(定理2.11),$f'(z)$至少具有一条λ级Borel方向,再根据上述H. Milloux的结果,判定$f(z)$与$f'(z)$至少具有一条公共Borel方向.事实上,如果进一步讨论,就得到H. Milloux关于公共Borel方向的重要结果[30d]:

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的整函数,其级为λ, $0<\lambda<+\infty$,则$f(z)$与其各级导数和各级原函数之间至少具有一条公共Borel方向.

作者曾经分别推广了H. Milloux的结果和庄圻泰的结果如下[43a]:

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的亚纯函数,其级为λ, $0<\lambda<+\infty$.如果$f(z)$以∞作为Borel例外值,则其导数$f'(z)$的每条λ级Borel方向亦是$f(z)$的λ级Borel方向;如果$f(z)$以一个有穷复数

作为 Borel 例外值[1]，则$f(z)$的每条λ级 Borel 方向亦是其各级导数$f^{(n)}(z)\,(n\geqslant 1)$的$\lambda$级 Borel 方向．于是，如果$f(z)$以一个复数作为 Borel 例外值，则$f(z)$与其各级导数$f^{(n)}(z)\,(n\geqslant 1)$之间至少具有一条公共 Borel 方向．

迄今这个问题未获彻底解决，仍待研究．

2.7.2. Borel 方向的分布规律

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的亚纯函数，其级为λ，$0<\lambda<+\infty$．我们考虑$f(z)$的全体λ级 Borel 方向与单位圆周的交点所成的集合E．明显地，根据 G. valiron 的结果（定理2.11），我们判定集合E非空．进一步根据 Borel 方向的定义，我们容易验证集合E是闭的．于是，$f(z)$的全体λ级 Borel 方向与单位圆周的交点构成一个非空闭集合．这种非空闭集的性质是否已经完全刻划了$f(z)$的λ级 Borel 方向的分布规律？1976 年杨乐和作者肯定地回答了这个问题，我们证明了下述结果[42d]：

设λ是任意给定的有穷正数，E是单位圆周上任意给定的一个非空闭集合，则必定存在λ级亚纯函数$f(z)$，使得$f(z)$的全体λ级 Borel 方向与单位圆周的交点所成的集合恰好就是E．

较早，D. Drasin 和 A. Weitsman 已经解决了有穷正级整函数的 Borel 方向的分布规律[13b]．他们先引进一个概念：

一个有限序列$\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n\leqslant\theta_1+2\pi$，如果对某个数$\lambda\left(>\dfrac{1}{2}\right)$满足条件：

(1) $\theta_{j+1}-\theta_j\leqslant\dfrac{\pi}{\lambda}\,(j=1,2,\cdots,n-1)$，

(2) $\theta_n-\theta_1\geqslant\dfrac{\pi}{\lambda}$，

---

1) 庄圻泰同时要求以∞作为 Borel 例外值．

(3) 仅当 $n=2$ 时,(1) 与 (2) 式中取等号,

则称为一个 λ 级实数链.

然后,他们证明了下述结果:

任意给定值 $\lambda, 0<\lambda<\infty$,以及 $[0,2\pi]$ 上的非空闭集 E. 当 $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$ 时不需对 E 附加任何条件,它恰为一个 λ 级整函数的全体 Borel 方向与单位圆周的交点所构成的集合. 当 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时为使 E 成为一个 λ 级整函数的全体 Borel 方向与单位圆周的交点构成的集合,必要而且充分的条件是 E 中任何一个值恰好是一个 λ 级链的一个元素,并且这个 λ 级链的所有元素 $\theta_j (\bmod 2\pi)(j=1,2,\cdots,n)$ 都属于 E.

第三章　亏值理论

自从 Nevanlinna 理论建立以来，特别是近二、三十年来，亏值理论成了值分布理论研究的中心问题，已经取得了十分丰富而且深刻的结果．最近，W. H. J. Fuchs 在一篇出色的论文中，系统地总结了亏值理论自 R. Nevanlinna 以来的发展[16b]. 本章不可能对这一理论作出全面介绍，主要对下述专题进行论述：根据定理 1. 7, 对于一个超越亚纯函数，其全部亏值构成一个可数集．另一方面，存在着具有无穷多个亏值的亚纯函数[18a]和整函数[3a]的例子．那么，在什么条件下，亏值个数应当是有限的？许多学者注意研究这个问题，并给出其上界估计．

§ 3.1. 调和测度和 Lindelöf 型定理

3. 1. 1. 一个调和测度的估计[1)]

设 D 是开平面 $|z| < +\infty$ 内的一个有界域，D 的边界 B 是由有限个不相交的 Jordan 曲线所组成．B 被分成两部分 B' 和 B''，它们分别是由有限个弧或闭曲线所组成．通过求解 Dirichlet 问题，我们判定在 D 内存在着唯一的一个有界调和函数 $u_D(z, B')$，使得当 z 趋近于 B' 的内点时有 $u_D(z, B')\to 1$，以及当 z 趋近于 B'' 的内点时有 $u_D(z, B')\to 0$，并且当 z 位在 D 内时有 $0 < u_D(z, B') < 1$. 我们称如此的调和函数 $u_D(z, B')$ 为 B' 关于域 D 相对于点 z 的调和测度．明显地有

$$u_D(z, B') + u_D(z, B'') = 1.$$

---

1) 本节主要内容引自文［38a］.

以后，我们经常需要利用下述事实：

设$f(z)$ 是$\overline{D}$上的一全纯函数，并且在B'上有$|f(z)| \leqslant M_1$，在B''上有$|f(z)| \leqslant M_2$，则根据次调和函数的最大模原理，我们有

$$\log|f(z)| \leqslant u_D(z, B')\log M_1 + U_D(z, B'')\log M_2$$

$$\leqslant \log M_2 + U_D(z, B')\log M_1.$$

以下，我们对一个典型的调和测度进行估计，这个估计在本书以后部分将起十分重要的作用.

设D是圆$|z| < r (0 < r < +\infty)$内的一个域，并且满足条件：

(1) 原点$z = 0$属于域D,

(2) $\overline{D} \bigcap (|z| = r)$是非空集合，至少含有一个内点，

(3) 设B是D的边界，B位在圆$|z| < r$内的部分Γ_r是解析的，并且只有有限个连通分支，以及$\theta_r = B - \Gamma_r$是由有限个圆弧组成.

对于任意值$t, 0 < t \leqslant r$，记D位在圆$|z| < t$内部分且含有点$z = 0$的连通分支为D_t, D_t的边界B_t位在圆$|z| < t$内部分为Γ_t，并且$\theta_t = B_t - \overline{\Gamma_t}$是由有限个圆弧组成，以及$\theta_t$的线性测度为$t\theta(t)$. 明显地有$D_r = D$. 如果圆周$|z| = t$与$B$有交，则定义$\theta^*(t) = \theta(t)$，否则定义$\theta^*(t) = +\infty$.

引理3.1 对于调和测度$u_D(z, \theta_r)$，我们有

$$U_D(0, \theta_r) \leqslant \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{1-\kappa}} e^{-\pi\int_0^{\kappa r} \frac{dr}{r\theta^*(r)}}, \quad 0 < \chi < 1. \qquad (3.1)$$

证. 首先，我们证明Wirtinger不等式：设$f(x), f'(x)$在区间$[a, b]$上连续，并且$f(a) = f(b) = 0$，则有

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \geqslant \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

事实上，不妨假设 $a=0, b=\pi$. 因此，我们只须证明

$$\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx \geqslant \int_0^\pi [f(x)]^2 dx. \tag{3.2}$$

当 $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ 时，我们定义 $f(x)=-f(-x)$. 于是 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上是连续函数，并且 $f(-\pi)=f(0)=f(\pi)=0$. 因此 $f(x)$ 有下述表达式：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos nx.$$

于是，应用 Parseval 定理，我们判定

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi [f'(x)]^2 dx=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi [f(x)]^2 dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [f(x)]^2 dx,$$

即 (3.2) 式得证.

以下，我们证明 (3.1) 式成立. 由于 Γ_r 是解析的，所以圆周 $|z|=t\,(0<t<r)$ 与 Γ_r 至多有有限个交点. 因此，θ_t 是由有限个圆弧 $\theta^i_t\,(i=1,2,\cdots,n_t)$ 组成. 设 θ_t^i 的线性测度为 $t\theta_i(t)$，则有 $\theta(t)=\sum_{i=1}^{n_t}\theta_i(t)$. 明显地，根据定义，$\theta(t)$ 在区间 $[0,r]$ 上是连续的，但可能至多除去有限个点 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<r$. 然而在除外点 t_i 处有 $\theta(t_i-0)=\theta(t_i)<\theta(t_i+0)$[1].

---

1) $\theta(t_i-0)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\theta(t_i-\varepsilon)$, $\theta(t_i+0)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\theta(t_i+\varepsilon)$.

置 $u(z)=u_D(z,\theta_r)$ 和考虑

$$m(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_t}u^2(te^{i\theta})d\theta,\quad 0<t<r. \tag{3.3}$$

注意到如果圆周 $|z|=t$ 与 B 有交，则 $u(z)$ 在 θ_t 的两个端点为零．因此，当 $t\neq t_i$ 时，根据 (3.3) 式有

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}\log t}=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_t}u\frac{\partial u}{\partial\log t}d\theta, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2m(t)}{\mathrm{d}\log t^2}&=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\log t}\right)^2+u\frac{\partial^2u}{\partial\log t^2}\right\}d\theta\\&=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\log t}\right)^2-u\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right\}d\theta\\&=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\log t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\right\}d\theta>0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

于是 $m(t)$ 在区间 (t_i,t_{i+1}) 上是 $\log t$ 的凸函数．另外，$m(t)$ 在 $t=t_i$ 是间断的，但是满足条件 $m(t_i-0)=m(t_i)<m(t_i+0)$．设 v 是 B 相对于 D 的外法线．根据 $u(z)$ 在 Γ_t 上为零的条件，对 D_t 应用 Green 公式，我们有

$$\begin{aligned}tm'(t)=\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}\log t}&=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_t}u\frac{\partial u}{\partial t}td\theta=\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_t+\theta_t}u\frac{\partial u}{\partial v}ds\\&=\frac{1}{\pi}\iint_{D_t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy,\quad z=x+iy.\end{aligned}$$

于是，如果置

$$s(t)=\frac{1}{\pi}\iint_{D_t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy,$$

则有

$$m'(t) = \frac{s(t)}{t} > 0, \quad t \neq t_i. \tag{3.6}$$

因此,$m(t)$ 在区间 (t_i, t_{i+1}) 上是 t 的单调增函数,再注意到 $m(t_i - 0) = m(t_i) < m(t_i + 0)$, 则 $m(t)$ 在区间 $[0, r]$ 上是 t 的单调增函数.故有

$$m(r) - m(t) \geqslant \int_t^r m'(t)dt, \quad 0 \leqslant t < r. \tag{3.7}$$

根据 (3.4) 式,我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}\log t}\right)^2 &\leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{\theta_t} u^2 d\theta \cdot \int_{\theta_t}\left(\frac{\partial u}{\partial \log t}\right)^2 d\theta \\ &= \frac{2m(t)}{\pi}\int_{\theta_t}\left(\frac{\partial u}{\partial \log t}\right)^2 d\theta.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{\pi}\int_{\theta_t}\left(\frac{\partial u}{\partial \log t}\right)^2 d\theta \geqslant \frac{1}{2m(t)}\left(\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}\log t}\right)^2. \tag{3.8}$$

设圆周 $|z| = t$ 与 B 有交。注意到在 θ_t^i 的两个端点处 $u(z)$ 的值为零和 $\theta^*(t)$ 之定义,于是则应用 Wirtinger 不等式有

$$\int_{\theta_t^i}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 d\theta \geqslant \frac{\pi^2}{[\theta_i(t)]^2}\int_{\theta_t^i} u^2 d\theta \geqslant \frac{\pi^2}{[\theta^*(t)]^2}\int_{\theta_t^i} u^2 d\theta,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\theta_t}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 &= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n_t}\int_{\theta_t^i}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 \geqslant \frac{\pi}{[\theta^*(t)]^2}\int_{\theta_t} u^2 d\theta \\ &= \frac{2\pi^2}{[\theta^*(t)]^2} m(t).\end{aligned} \tag{3.9}$$

进一步根据 (3.5), (3.8) 和 (3.9) 式, 则得

$$\frac{d^2 m(t)}{d\log t^2} \geqslant \frac{1}{2m(t)}\left(\frac{dm(t)}{d\log t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\theta^*(t)}\right)^2 m(t). \tag{3.10}$$

设圆周 $|z| = t$ 与 B 无交, 即圆周 $|z| = t$ 整个地位在 D 内. 于是 $\theta^*(t) = +\infty$. 进一步根据 (3.5) 和 (3.8) 式,则得

$$\frac{d^2 m(t)}{d\log t^2} \geqslant \frac{1}{2m(t)}\left(\frac{dm(t)}{d\log t}\right)^2 = \frac{1}{2m(t)}\left(\frac{dm(t)}{d\log t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\theta^*(t)}\right)^2 m(t).$$

因此 (3.10) 式在一般情况下成立. 置

$$\rho = \log t, \quad \varphi(\rho) = m(t), \quad F(\rho) = \frac{2\pi}{\theta^*(t)}, \quad \rho_i = \log t_i,$$

则 (3.10) 式给出

$$\varphi''(\rho) \geqslant \frac{\varphi'(\rho)^2}{2\varphi(\rho)} + \frac{1}{2}F^2(\rho)\varphi(\rho). \tag{3.11}$$

这就是著名的Carleman 微分不等式. 我们进一步置 $\varphi(\rho) = \log\varphi(\rho)$, 则有 $\psi'(\rho)^2 + 2\psi''(\rho) \geqslant F^2(\rho)$. 依此判定

$$\left(\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi'(\rho)}\right)^2 = \left(\psi'(\rho) + \frac{\psi''(\rho)}{\psi'(\rho)}\right)^2 \geqslant \psi'(\rho)^2 + 2\psi''(\rho) \geqslant F^2(\rho).$$

根据 (3.6) 式, 在区间 (ρ_i, ρ_{i+1}) 内, $\varphi'(\rho) > 0$. 进一步根据 (3.11) 式, $\varphi''(\rho) > 0$. 因此在区间 (ρ_i, ρ_{i+1}) 内, 我们有

$$\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi'(\rho)} > 0.$$

因而更有

$$\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi'(\rho)} \geqslant F(\rho).$$

当$t \neq t_i$时，(3.6)式给出

$$\varphi'(\rho) = \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}\log t} = s(t).$$

因此有$\varphi'(\rho_i - 0) < \varphi'(\rho_i + 0)$. 于是，如果$\rho < \tau$，则得

$$\log\varphi'(\tau) - \log\varphi'(\rho) \geqslant \int_\rho^\tau \frac{\varphi''(\rho)}{\varphi'(\rho)} d\rho \geqslant \int_\rho^\tau F(\rho)\mathrm{d}\rho,$$

$$\varphi'(\tau) \geqslant \varphi'(\rho) e^{\int_\rho^\tau F(\rho)d\rho}, \quad \rho < \tau. \tag{3.12}$$

其次，当$t \leqslant \sigma \leqslant r$时，置

$$\rho = \log t, \quad \tau = \log\sigma, \quad \rho_0 = \log r.$$

如果$t \leqslant \kappa r (0 < \kappa < 1)$，则根据(3.3)和(3.12)式判定

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \varphi(\rho_0) \geqslant \varphi(\rho_0) - \varphi(\rho) \\ &\geqslant \int_\rho^{\rho_0} \varphi'(\tau) d\tau \geqslant \varphi'(\rho) \int_\rho^{\rho_0} e^{\int_\rho^\tau F(\rho)d\rho} d\tau \\ &= \varphi'(\rho) \int_t^r e^{2\pi\int_t^\sigma \frac{dt}{t\theta^*(t)}} \frac{d\sigma}{\sigma} \geqslant \varphi'(\rho) \int_{\kappa r}^r e^{2\pi\int_t^\sigma \frac{dt}{t\theta^*(t)}} \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &\geqslant (1-\kappa)\varphi'(\rho) e^{2\pi\int_t^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta^*(t)}}, \end{aligned}$$

$$\varphi'(\rho) \leqslant \frac{1}{1-\kappa} e^{-2\pi\int_t^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta^*(t)}}, \quad 0 < \kappa < 1. \tag{3.13}$$

根据(3.11)式有

$$\varphi''(\rho) \geqslant \frac{1}{2} F_{(\rho)}^2 \varphi(\rho)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{\theta^*(t)}\right]^2 \varphi(\rho) \geqslant \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\theta^*(t)} \cdot \varphi(\rho),$$

$$\varphi''(\rho) \geqslant \frac{\pi m(t)}{\theta^*(t)}.$$

再注意到$m(t)$是t的单调增函数，则有

$$\varphi'(\tau) \geqslant \varphi'(\tau) - \varphi'(\rho) \geqslant \int_\rho^\tau \varphi''(\rho) d\rho$$

$$\geqslant \pi \int_t^\sigma \frac{m(t)}{t\theta^*(t)} dt \geqslant \pi m(t) \int_t^\sigma \frac{dt}{t\theta^*(t)}.$$

于是，当$\sigma < \kappa r$时，根据(3.13)式，我们得到

$$\frac{1}{1-\kappa} e^{-2\pi \int_\sigma^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta^*(t)}} \geqslant \varphi'(\tau) \geqslant \pi m(t) \int_t^\sigma \frac{dt}{t\theta^*(t)},$$

或者

$$\frac{1}{1-\kappa} e^{2\pi \int_t^\sigma \frac{dt}{t\theta^*(t)} - 2\pi \int_t^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta^*(t)}} \geqslant \frac{m(t)}{2} \cdot 2\pi \int_t^\sigma \frac{dt}{t\theta^*(t)}.$$

当$2\pi \int_t^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta^*(t)} > 1$时，我们取定$\sigma\ (t < \sigma < \kappa r)$使得$2\pi \int_t^\sigma \frac{dt}{t\theta^*(t)} = 1$，于是

$$m(t) \leqslant \frac{2e}{1-\kappa} e^{-2\pi \int_t^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta^*(t)}}. \tag{3.14}$$

当$2\pi\int_t^{\kappa r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}\leqslant 1$时，根据$m(t)\leqslant 1$和$\frac{2}{1-\kappa}>1$，则(3.14)式显然成立.因此，(3.14)式在一般情况下成立.于是

$$u_D(0,\theta_r)=u(0)=\sqrt{m(0)}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2e}{1-\kappa}}\,e^{-\pi\int_0^{\kappa r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}},\quad 0<\kappa<1,$$

即引理3.1得证.

系. 当$Z\in D$和$|z|<\frac{\kappa r}{2}$时，我们有

$$u_D(z,\theta_r)<\frac{9}{\sqrt{1-\kappa}}e^{-\pi\int_{2|z|}^{\kappa r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}}.\tag{3.15}$$

证. 我们任意取定一个数ε, $0<\varepsilon<\frac{3-\sqrt{2e}}{9-\sqrt{2e}}|z|$，然后以$\varepsilon$为心，以$2|z|-\varepsilon$为半径作圆$\Delta$: $|\zeta-\varepsilon|<2|z|-\varepsilon$，置$\tilde{D}=D\bigcup\Delta$和相应地定义$\tilde{\theta}^*(t)$和$\tilde{\theta}(t)$.因为$\theta(t)$的间断点$t_i(i=1,2,\cdots,n_t)$是有限的，所以我们只要适当选取$\varepsilon$，总可以保证$\tilde{\theta}(t)$除$t_i(i=1,2,\cdots,n_t)$点外是连续的.尽管此时$\tilde{D}$的边界在圆$|z|<r$内部分只是逐段解析的，但是引理3.1的证明仍然有效.另一方面，明显地，当$0\leqslant t\leqslant 2|z|-2\varepsilon$时，有$\tilde{\theta}^*(t)=+\infty$，以及当$t\geqslant 2|z|$时，有$\tilde{\theta}^*(t)=\theta^*(t)$.于是根据引理3.1，我们判定

$$u_{\tilde{D}}(0,\theta_r)\leqslant\sqrt{\frac{2e}{1-\kappa}}\,e^{-\pi\int_0^{\kappa r}\frac{dt}{t\tilde{\theta}^*(t)}}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2e}{1-\kappa}}\,e^{-\pi\int_{2|z|}^{\kappa r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}}.\tag{3.16}$$

$u_{\tilde{D}}(\zeta,\theta_r)$ 在圆 $|\zeta|<2|z|-2\varepsilon$ 内是调和的．设 $v_{\tilde{D}}(\zeta,\theta_r)$ 是 $u_{\tilde{D}}(\zeta,\theta_r)$ 的共轭调和函数，则 $f(\zeta)=e^{u_{\tilde{D}}(\zeta,\theta_r)+iv_{\tilde{D}}(\zeta,\theta_r)}$ 是圆 $|\zeta|\leqslant 2|z|-2\varepsilon$ 上的全纯函数，并且无零点，以及 $u_{\tilde{D}}(\zeta,\theta_r)=\log|f(\zeta)|\geqslant 0$. 于是应用 Poisson－Jensen 公式，我们有

$$
\begin{aligned}
u_{\tilde{D}}(z,\theta_r) &= \log|f(z)| \\
&\leqslant \frac{2|z|-3\varepsilon+|z|}{2|z|-3\varepsilon-|z|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{\tilde{D}}((2|z|-3\varepsilon)e^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{3(|z|-\varepsilon)}{|z|-3\varepsilon}u_{\tilde{D}}(0,\theta_r).
\end{aligned}
$$

进一步根据最大模原理和 (3.16) 式，我们判定

$$
\begin{aligned}
u_D(z,\theta_r) \leqslant u_{\tilde{D}}(z,\theta_r) &\leqslant \frac{3(|z|-\varepsilon)}{|z|-3\varepsilon}\cdot\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{1-\kappa}}\cdot e^{-\pi\int_{2|z|}^{\kappa r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}} \\
&\leqslant \frac{9}{\sqrt{1-\kappa}}e^{-\pi\int_{2|z|}^{\kappa r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}},
\end{aligned}
$$

即 (3.15) 式得证．

从上述证明，我们可以看到如果原点 $z=0\bar{\in}D$，只要作一适当的圆 Δ，然后考虑 $\tilde{D}=D\bigcup\Delta$，即可证明引理 3.1 的系仍然成立．相应地，我们有下述结果：

定理 3.1 设 D 是圆 $|z|<r(0<r<+\infty)$ 内的一个域，并且满足条件 (2) 和 (3)，则 θ_r 关于域 D 相对于点 z，$|z|<\frac{\kappa r}{2}$ $(0<\kappa<1)$ 的调和测度

$$
u_D(z,\theta_r)\leqslant\frac{9}{\sqrt{1-\kappa}}e^{-\pi\int_{2|z|}^{\kappa r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}}.
$$

3.1.2. Lindelöf定理的一种局部形式

首先我们叙述一个简单结果：

引理3.2 设 Ω 表示上半圆：$|z|<1, \operatorname{Im} z>0$，$\Gamma$表示实轴上从 -1 到 $+1$ 的直线段，则 Γ 相对于点 $z\in\Omega$ 的调和测度

$$u_\Omega(z, \Gamma)=\frac{2\varphi}{\pi}-1,$$

φ 是从点 z 观测 Γ 的张角开度．特别地当 $z=re^{i\frac{\pi}{2}}, r\in\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ 时，有

$$u_\Omega(z, \Gamma)\geqslant\frac{1}{3}.$$

其次，我们证明Grötzsch原理的一个特殊形式[43c].

引理3.3 假设两条简单连续曲线 $L_i(i=1,2)$ 分割圆环 $r<|z|<R, 0<r<R<+\infty$ 为两个单连通域，其中一个为 Ω，并且 $L_i(i=1,2)$ 连接圆周 $|z|=r$ 上的一点 $A_i(i=1,2)$ 和圆周 $|z|=R$ 上的一点 $B_i(i=1,2)$，A_1 和 A_2，B_1 和 B_2 均不相重合．再假设 Ω 被共形映照到矩形 $C_1C_2D_2D_1$，其中点 $A_i(i=1,2)$ 对应于点 C_i，点 $B_i(i=1,2)$ 对应于点 D_i，则有

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1D_1}}\leqslant\frac{2\pi}{\log\frac{R}{r}},$$

其中 $\overline{C_1C_2}, \overline{C_1D_1}$ 分别表示直线段 C_1C_2 和 C_1D_1 的长度．

证．首先，我们沿着 L_1 分割圆环 $r<|z|<R$ 成一单连通域．然后，通过变换 $t=\log z=u+iv$，将这一单连通域映射到 t 平面上，并且 Ω 映为 t 平面上介于两条直线 $u=\log r$ 和 $u=\log R$ 间的曲边带形域 Ω_t．再命 $z=\varphi(\zeta)$ 将矩形 $C_1C_2D_2D_1$ 共形映照为 Ω，则 t

$= \log\varphi(\zeta) = f(\zeta)$ 将 $C_1C_2D_2D_1$ 共形映照为 Ω. 于是，我们有

$$\log\frac{R}{r} \leqslant \int_{\xi_1}^{\xi_1+\overline{C_1D_1}} |f'(\zeta)|d\xi, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

其中 $C_1 = \xi_1 + i\eta_1$. 进一步应用 Schwarz 不等式，则得

$$\left(\log\frac{R}{r}\right)^2 \leqslant \overline{C_1D_1}\int_{\xi_1}^{\xi_1+\overline{C_1D_1}} |f'(\zeta)|^2 d\xi,$$

$$\left(\log\frac{R}{r}\right)^2 \overline{C_1C_2} \leqslant \overline{C_1D_1}\int_{\eta_1}^{\eta_1+\overline{C_1C_2}} d\eta \int_{\xi_1}^{\xi_1+\overline{C_1D_1}} |f'(\zeta)|^2 d\xi$$

$$\leqslant \overline{C_1D_1}\, 2\pi\log\frac{R}{r}.$$

于是，我们判定

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1D_1}} \leqslant \frac{2\pi}{\log\dfrac{R}{r}},$$

即引理 3.3 得证.

类似地，我们可以证明下述结果：

引理3.4 设在 $\overline{\Omega}(\theta_1,\theta_2;R_1, R_2)$ $(0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < 2\pi + \theta_1; 0 < R_1 < R_2 < +\infty)$ 上存在两条简单连续曲线 $L_i(i = 1, 2)$，它们分别连接 $\Gamma(\theta_1,\theta_2;R_1)$ 上的点 $A_i(i = 1, 2)$ 和 $\Gamma(\theta_1,\theta_2;R_2)$ 上的点 $B_i(i = 1, 2)$，并且 L_1 和 L_2 在 $\overline{\Omega}(\theta_1, \theta_2;R_1, R_2)$ 上无交点. 于是 L_1 和 L_2 以及 $\Gamma(\theta_1, \theta_2;R_1)$ 和 $\Gamma(\theta_1, \theta_2;R_2)$ 上的部分弧界囿一个单连通域 $\Omega' \subset \Omega(\theta_1, \theta_2;R_1, R_2)$. 再假定共形映照 $\zeta = \varphi(z)$ 将 Ω' 变为 ζ 平面上的域 $\Omega_\zeta(\theta_1, \theta_2;R_1, R_2')$，并且点 A_1 变为点 $R_1e^{i\theta_1}$，点 A_2 变为点 $R_1e^{i\theta_2}$，点 B_1 变为点 $R_2^1e^{i\theta_1}$ 和点 B_2 变为点 $R_2^1e^{i\theta_2}$，则有 $R_2^1 \geqslant R_2$.

现在，我们证明一个Lindelöf型定理.

定理3.2 假设两条简单连续曲线$L_i(i=1,2)$分割圆环$\Gamma:1<|z|<R(R>e^{4\pi})$为两个单连通区域，其中一个域为$\Omega$并且$L_i(i=1,2)$连接圆周$|z|=1$上的一点$A_i(i=1,2)$和圆周$|z|=R$上的一点$B_i(i=1,2)$，其中$A_1$和$A_2$, B_1和B_2均不相重合.再假设函数$f(z)$在Ω内全纯，在$\overline{\Omega}$上连续，并且

$$|f(z)|\leqslant N<+\infty, z\in\Omega,$$

$$|f(z)-a_i|\leqslant\varepsilon_i<1, z\in L_i, i=1,2.$$

其中a_1和a_2是两个有穷复数，并且

$$|a_i|\leqslant M,\quad M<+\infty,\quad i=1,2.$$

在上述假定之下，或者有$a_1=a_2$，并且在$\overline{\Omega}$上存在一条连接L_1和L_2的曲线l，使得当$z\in l$时有

$$|f(z)-a|\leqslant\varepsilon_3,\quad a=a_1=a_2,$$

$$\varepsilon_3=(M+N)\max\{\varepsilon_1^{\frac{1}{3}},\varepsilon_2^{\frac{1}{3}}\};$$

或者有$a_1\neq a_2$，并且

$$(M+N)(\varepsilon_1^{\frac{1}{3}}+\varepsilon_2^{\frac{1}{3}})\geqslant|a_1-a_2|.$$

证. 首先，存在共形映照$\zeta=\zeta(z)$，把Ω映为ζ平面上的矩形$C_1C_2D_2D_1$，点$A_i(i=1,2)$对应点$C_i(i=1,2)$，点$B_i(i=1,2)$对应点$D_i(i=1,2)$，并且$\overline{C_1C_2}=\overline{D_1D_2}=1$.根据引理3.3，我们有

$$\frac{1}{\overline{C_1D_1}}\leqslant\frac{2\pi}{\log\frac{R}{r}}.$$

于是

$$\overline{C_1D_1} = \overline{C_2D_2} \geqslant \frac{1}{2\pi}\log R > 2. \tag{3.17}$$

记$\zeta = \zeta(z)$的逆变换为$z = z(\zeta)$，则函数$F(\zeta) = f(z(\zeta))$在矩形$C_1C_2D_2D_1$内全纯，并且有上界N，以及当$\zeta \in C_1D_1$时有

$$|F(\zeta) - a_1| \leqslant \varepsilon_1$$

和当$\zeta \in C_2D_2$时有

$$|F(\zeta) - a_2| \leqslant \varepsilon_2.$$

记C_1D_1的中点为E_1，C_2D_2的中点为E_2，然后在线段E_1E_2上取点F_2，使得$\overline{E_1F_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$，再取点$F_1$，使得$\overline{E_2F_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 最后，我们以$E_1$点为心作单位圆，根据条件(3.17)式，单位圆的一半位在矩形$C_1C_2D_2D_1$内，应用引理3.2，当$\zeta \in E_1F_2$时，我们有

$$\log|F(\zeta) - a_1| < \frac{1}{3}\log\varepsilon_1 + \log(M + N).$$

同理，当$\zeta \in E_2F_1$时，我们有

$$\log|F(\zeta) - a_2| < \frac{1}{3}\log\varepsilon_2 + \log(M + N).$$

于是当$a_1 \neq a_2$时，通过在E_1F_2和E_2F_1的公共部分上取一点，我们可以导出

$$|a_2 - a_1| \leqslant (M + N)(\varepsilon_1^{\frac{1}{3}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{3}});$$

当$a_1 = a_2$时，如果置

$$\varepsilon_3 = (M + N)\max\{\varepsilon_1^{\frac{1}{3}}, \varepsilon_2^{\frac{1}{3}}\},$$

则当$\zeta \in E_1E_2$时，我们有

$$|F(\zeta)-a| \leqslant \varepsilon_3, \quad a=a_1=a_2.$$

记E_1E_2在z平面上的映象为l，则l是一条连接L_1和L_2的连续曲线，并且当$z \in l$时有

$$|f(z)-a| \leqslant \varepsilon_3,$$

即定理3.2得证.

§3.2. 长度-面积原理

3.2.1. 长度-面积原理[1)]

下述定理3.3称为长度-面积原理.

定理3.3 设$f(z)$是开集Δ内的一个亚纯函数，$l(t)=l(t,\Delta)$表示位在Δ内的等位线$|f(z)|=t$的总长度，$A\ (A<+\infty)$表示Δ的面积. 置

$$p(t)=p(t,\Delta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(\Delta, f=te^{i\theta})d\theta,$$

则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{l(t)^2}{tp(t)} dt \leqslant 2\pi A, \tag{3.18}$$

其中如果$p(t)=+\infty$，则定义被积函数为零，特别地，对于几乎所有满足条件$p(t)<+\infty$的值t有$l(t)<+\infty$.

1) 本节内容引自文[21a].

证．首先我们考虑Δ是一个开矩形，并且在$\bar{\Delta}$上（即在包含$\bar{\Delta}$的一个区域内）$f(z)$是单叶且无零点和极点的情况．任意取定

$$s(z) = \log f(z) = \sigma(z) + i\tau(z)$$

的一个分支，则$s(z)$在$\bar{\Delta}$上也是单叶的，映射Δ到开平面$|s| < +\infty$上的一个区域Ω．明显地，Ω的边界是一条逐段解析的Jordan曲线．于是，如果θ_σ表示直线$\sigma = \text{const.}$与Ω的交集，则θ_σ是由有限个直线段

$$\tau_1 < \tau < \tau'_1, \quad \tau_2 < \tau < \tau'_2, \cdots$$

所组成．另外，如果γ_σ表示θ_σ在Δ内的原像，则在γ_σ上有$|f(z)| = e^\sigma$．根据$f(z) = e^{s(z)}$的单叶性，我们有

$$p(e^\sigma) = \frac{1}{2\pi}\sum(\tau'_\nu - \tau_\nu) = \frac{\theta(\sigma)}{2\pi},$$

其中$\theta(\sigma)$表示θ_σ的线性测度．

另一方面，根据Schwarz不等式，我们有

$$\begin{aligned} l(e^\sigma)^2 &= \left\{\int_{\theta_\sigma}\left|\frac{dz}{ds}\right|d\tau\right\}^2 \leqslant \int_{\theta_\sigma}d\tau\int_{\theta_\sigma}\left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau \\ &= \theta(\sigma)\int_{\theta_\sigma}\left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau = 2\pi p(e^\sigma)\int_{\theta_\sigma}\left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau. \end{aligned} \tag{3.19}$$

置

$$\sigma_1 = \inf\{\sigma|\sigma + i\tau \in \Omega\}, \quad \sigma_2 = \sup\{\sigma|\sigma + i\tau \in \Omega\},$$

则根据(3.19)式得到

$$\int_{-+\infty}^{+\infty}\frac{l(e^\sigma)^2}{p(e^\sigma)}d\sigma = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{l(e^\sigma)^2}{p(e^\sigma)}d\sigma \leqslant 2\pi\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}d\sigma\int_{\theta_\sigma}\left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau = 2\pi A,$$

其中 A 表示 Δ 的面积. 命 $t=e^{\sigma}$, 则得

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{l(t)^{2}}{tp(t)}dt\leqslant 2\pi A. \tag{3.20}$$

即 (3.18) 式成立.

其次, 我们考虑 Δ 是一般开集时的情况. 不失一般性, 可以假设在 Δ 内, $f(z)\neq 0,\infty$ 和 $f'(z)\neq 0$. 否则, 我们可以用一个开集 Δ_0 代替 Δ, 此处 Δ_0 是从 Δ 中除去 $f(z)$ 的零点和极点以及 $f'(z)$ 的零点所得到的开集. 明显地 $p(t)$, $l(t)$ 和 A 的数值保持不变. 现在, 我们通过 Lebesgue 积分理论中惯用的方法, 在平面 $|z|<+\infty$ 上构造纲 G_m: $x=\frac{\pm n}{2^{m-1}}$, $y=\frac{\pm n}{2^{m-1}}\Big|\, n=0,1,2,\cdots;\ m=1,2,\cdots;\ z=x+iy)$, 使得 Δ 可以表示为可数个内部彼此不交的闭矩形的和: $\Delta=\bigcup\limits_{v=1}^{\infty}\bar{\Delta}_v$, 并且根据 $f'(z)$ 在 $\bar{\Delta}_v$ 上无零点的假设, 可以认为 $f(z)$ 在 Δ_v 上是单叶的. 否则, 只要经过有限次细分 Δ_v 即可.

设 γ_t 表示等位线 $|f(z)|=t$, 则矩形 $\Delta_v(v\geqslant 1)$ 的一个边或者与 r_t 无交, 或者相交有限次, 或者整个地属于 r_t. 于是明显地, 满足最后这种情况的值 t 至多可数个, 我们记这些值为 $t_i(i=1,2,\cdots)$. 当 $t\neq t_i(i=1,2,\cdots)$ 时, 有

$$p(t,\Delta)=\sum_{v=1}^{+\infty}p(t,\Delta_v),$$

$$l(t,\Delta)=\sum_{v=1}^{+\infty}l(t,\Delta_v),$$

$$A=\sum_{v=1}^{+\infty}A_v,$$

其中 A_v 表示 Δ_v 的面积. 当 $p(t,\Delta_v)=0$ 时, 有 $l(t,\Delta_v)=0$. 对于这种

情况，我们定义 $\frac{l^2(t,\Delta_\nu)}{p(t,\Delta_\nu)}=0$. 然后进一步根据Schwarz不等式，我们判定

$$l(t,\Delta)^2=\left\{\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{l(t,\Delta_\nu)}{\sqrt{p(t,\Delta_\nu)}}\cdot\sqrt{p(t,\Delta_\nu)}\right\}^2$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{l(t,\Delta_\nu)^2}{p(t,\Delta_\nu)}\cdot\sum_{\nu=1}^{+\infty}p(t,\Delta_\nu)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{l(t,\Delta_\nu)^2}{p(t,\Delta_\nu)}\cdot p(t,\Delta),$$

$$\frac{l(t,\Delta)^2}{p(t,\Delta)}\leqslant\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{l(t,\Delta_\nu)^2}{p(t,\Delta_\nu)}.$$

最后，通过取Lebesgue意义下的积分，并且对 Δ_ν 利用(3. 20)式，我们得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{l(t)^2}{tp(t)}dt\leqslant\sum_{\nu=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{l(t,\Delta_\nu)^2}{tp(t,\Delta_\nu)}dt\leqslant 2\pi\sum_{\nu=1}^{+\infty}A_\nu=2\pi A.$$

于是定理3. 3完全得证.

3. 2. 2 应用

作为定理3. 3的应用，我们证明一个在本质上属于A.Weitsman的重要结果[40a]：

引 理3. 5 设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant R\ (0<R<+\infty)$ 上全纯，$|f(0)|=1$，并且在圆 $|z|<r\ (0<r<R)$ 内存在一点 z_0，使得

$$|f(z_0)|\geqslant A,\ A\geqslant 16,$$

则在区间 $I=[\sqrt[4]{A},\sqrt{A}]$ 中必定存在一个数 A'，使得导数 $f'(z)$

在等位线 $|f(z)| = A'$ 上无零点，即等位线是解析的，并且下述事实成立：考虑集合

$$\Omega(A') = E\{z \mid |f(z)| > A',\ |z| < R\}.$$

记 $\Omega(A')$ 位在圆 $|z| < r$ 内部分且含有点 z_0 的连通分支为 $\Omega_r(A')$，则对于闭包 $\overline{\Omega}_r(A')$ 上的任意两个点 z_1 和 z_2，必定可以找到一条连接这两个点的逐段解析曲线 $L \subset \overline{\Omega}_r(A')$，其长度

$$\operatorname{mes} L \leqslant 2r + 2\sqrt{2}\,\pi r \sqrt{\left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} T(R, f)},$$

并且对位在 L 上的点 z 有

$$|f(z)| \geqslant \sqrt[4]{A}; \quad |z| \leqslant r.$$

证．当 $t \in I$ 和 $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ 时有

$$|f(0) - te^{i\varphi}| \geqslant t - |f(0)| \geqslant \sqrt[4]{A} - 1 \geqslant 1 \neq 0,$$

于是

$$n\left(r, \frac{1}{f(z) - te^{i\varphi}}\right) \leqslant \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} N\left(R, \frac{1}{f(z) - te^{i\varphi}}\right)$$

$$= \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} N\left(R \frac{1}{\frac{f(z)}{t} - e^{i\varphi}}\right).$$

根据 Cartan 恒等式有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n\left(r, \frac{1}{f(z) - te^{i\varphi}}\right) d\varphi$$

$$\leqslant \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} \left\{ T\left(R, \frac{f}{t}\right) - \log^{+} \frac{|f(0)|}{t} \right\}$$

$$\leqslant \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} T(R,f).$$

进一步根据长度面积原理（定理3.3）导出

$$\int_{\sqrt[4]{A}}^{\sqrt{A}} \frac{l^2(t)}{t} dt \leqslant 2\pi \cdot \pi r^2 \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} T(R,f)$$

$$= 2\pi^2 r^2 \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} T(R,f) = K_0,$$

其中 $l(t)$ 表示等位线 $|f(z)| = t$ 在圆 $|z| < r$ 内部分的总长度.

我们记 I 中满足条件

$$\frac{l^2(t)}{t} \geqslant \frac{2K_0}{\sqrt{A} - \sqrt[4]{A}}$$

的值 t 的集合为 J, 则有

$$K_0 \geqslant \int_J \frac{l^2(t)}{t} dt \geqslant \frac{2K_0}{\sqrt{A} - \sqrt[4]{A}} \operatorname{mes} J,$$

即有

$$\operatorname{mes} J \leqslant \frac{\sqrt{A} - \sqrt[4]{A}}{2}.$$

置 $I^* = I - J$, 则有

$$\operatorname{mes} I^* \geqslant \frac{\sqrt{A} - \sqrt[4]{A}}{2},$$

当 $t \in I^*$ 时，我们判定

$$\frac{l^2(t)}{t} \leqslant \frac{2K_0}{\sqrt{A} - \sqrt[4]{A}},$$

$$l^2(t) \leqslant \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt[4]{A}} K_0$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt[4]{A}} \cdot 4\pi^2 r^2 \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} T(R,f),$$

$$l(t) \leqslant 2\sqrt{2}\,\pi r \sqrt{\left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} T(R,f)}\,.$$

另一方面，因为导数$f'(z)$在圆$|z| \leqslant R$上至多有有限个零点，所以在I^*中存在值A'，使得等位线$|f(z)| = A'$上无$f'(z)$的零点，即等位线是解析的．于是，区域$\Omega_r(A')$的边界组成或为等位线或为圆周$|z| = r$上的弧段，并且圆周$|z| = r$不能与等位线相交无穷多个点．否则，借助于逐次解析开拓，我们可以判定整个圆周$|z| = r$必定是等位线．从而根据最大模原理，当点z位在圆$|z|<r$内时有$|f(z)| \leqslant A'$．但是这与假设$|f(z_0)| \geqslant A$相矛盾．因此圆周$|z| = r$与等位线相交至多有限个点，故$\Omega_r(A')$的边界分支均为逐段解析的简单闭曲线．

考虑$\overline{\Omega}_r(A')$相对于闭平面$|z| \leqslant +\infty$的补集．明显地，这个补集的每个连通分支均是单连通域，并且它们的边界即是$\Omega_r(A')$的边界，因而是逐段解析的简单闭曲线．其次，这个补集的连通分支个数必为有穷．否则，我们在每个分支中都取一个内点，全体这些内点至少存在一个聚点，这个聚点只能位在$\Omega_r(A')$的边界上．由于$\Omega_r(A')$的边界是逐段解析曲线，所以是局部可分的，即存在这个点的一个邻域，它被边界曲线分成两个不相交的连通分支，使得一个分支属于$\Omega_r(A')$，另一个分支属于$\overline{\Omega}_r(A')$的补集．这样一来，所选取的内点中至少有两个属于同一个分支，从而与我们内点的取法相矛盾．

对于$\overline{\Omega}_r(A')$上的任意两个点z_1和z_2，我们首先用直线段连接点z_1和z_2，注意这个直线段可能和有限多个$\overline{\Omega}_r(A')$的补集分支

相交.如果设这个直线段与 $\overline{\Omega}_r(A')$ 的一个补集分支 E 相交,则用 z_1' 和 z_2' 分别表示这个从 z_1 到 z_2 的直线段与 E 的边界的第一个交点和最后一个交点.对于这个直线段介于 z_1' 和 z_2' 间的部分,我们用 E 的边界介于 z_1' 和 z_2' 间的部分取代.于是按照这种方式,我们求得一条连接 z_1 和 z_2 点的逐段解析曲线 $L \subset \overline{\Omega}_r(A')$,其长度

$$\operatorname{mes} L \leqslant 2r + 2\sqrt{2}\,\pi r \sqrt{\left(\log \frac{R}{r}\right)^{-1} T(R,f)}\,,$$

并且对 L 上的 z 有

$$|f(z)| \geqslant A' \geqslant \sqrt[4]{A}\,; \quad |z| \leqslant r,$$

从而引理 3.5 得证.

§3.3. 具有亏值的亚纯函数的增长性

3.3.1. 亚纯函数的增长性和亏值[1)]

设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数,其级为 λ 和下级为 μ. 如果一个序列 ρ_m, $\rho_m \to +\infty\ (m \to +\infty)$ 满足条件

$$\varlimsup_{m \to +\infty} \frac{\rho_m T'(\rho_m, f)}{T(\rho_m, f)} \leqslant \gamma,$$

则称序列 ρ_m 为 γ 序列.根据 Cartan 恒等式,我们判定 $T(r,f)$ 的导数 $T'(r,f)$ 存在.于是

$$\frac{d \log T(r,f)}{d \log r} = \frac{r T'(r,f)}{T(r,f)}.$$

1) 本节内容引自文[40b].

因此，根据级 λ 和下级 μ 的定义，对于任意值 γ, $\mu \leqslant \gamma \leqslant \lambda$ 必定存在 γ 序列．事实上，首先存在序列 ρ_m, 使得

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\log T(\rho_m,f)}{\log\rho_m}=\gamma.$$

进一步根据中值定理，对任意取定的值 $N>0$ 有

$$\begin{aligned}\gamma&=\lim_{m\to+\infty}\frac{\log T(\rho_m,f)}{\log\rho_m}\\&=\lim_{m\to+\infty}\frac{\log T(\rho_m,f)-\log T(N,f)}{\log\rho_m-\log N}\\&\geqslant\lim_{m\to+\infty}\left.\frac{d\log T(r,f)}{d\log r}\right|_{r=\tilde{\rho}_m}\\&=\lim_{m\to+\infty}\frac{\tilde{\rho}_m T'(\tilde{\rho}_m,f)}{T(\tilde{\rho}_m,f)},\end{aligned}$$

其中 $N\leqslant\tilde{\rho}_m\leqslant\rho_m$ $(m\geqslant m_N)$. 于是，我们可以选取一个子序列 $\tilde{\rho}_{m_k}\to+\infty$ $(k\to+\infty)$, 使得

$$\gamma=\lim_{k\to+\infty}\frac{\log T(\rho_{m_k},f)}{\log\rho_{m_k}}\geqslant\lim_{k\to+\infty}\frac{\tilde{\rho}_{m_k}T'(\tilde{\rho}_{m_k},f)}{T(\tilde{\rho}_{m_k},f)},$$

即 $\tilde{\rho}_{m_k}$ 是一个 γ－序列．

引理3.6 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个非常数亚纯函数，$\{\rho_m\}$ 是一个 γ 序列，则有

$$\pi\gamma\geqslant\delta(\infty,f)\operatorname{ctg}\left(\frac{s_\infty}{4}\right)+\delta(0,f)\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi-s_\infty}{4}\right),\tag{3.21}$$

其中

$$s_\infty=\varliminf_{m\to+\infty}\operatorname{mes}E(\rho_m),$$

$$E(\rho_m) = E\{\theta \mid |f(\rho_m e^{i\theta})| > 1, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}. \tag{3.22}$$

证. 置

$$P(R, r, \theta, \Phi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \Phi) + r^2}, \quad r < R,$$

则有

$$\int_0^{2\pi} P(R, r, \theta, \Phi) d\theta = 1,$$

$$P(R, r, \theta, \Phi) > 0,$$

$$P(R, r, \theta, \Phi) = P(R, r, \Phi, \theta).$$

再置

$$g(R, r, \psi, \omega) = \log\left|\frac{R^2 - \bar{\omega} r e^{i\Psi}}{R(re^{i\Psi} - \omega)}\right|.$$

另外，只要 ε_m 充分小，我们可以假设 $f(z)$ 在圆环 $\rho_m - \varepsilon_m \leqslant |z| \leqslant \rho_m$ [1] 上无零点和极点．于是，当 $\rho_m - \varepsilon_m \leqslant \rho < \rho_m$ 时，根据 Doisson - Jensen 公式有

$$\frac{\rho_m(m(\rho_m, f) - m(\rho, f))}{\rho_m - \rho}$$

$$= \frac{\rho_m}{\rho_m - \rho}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{E(\rho_m)} \log|f(\rho_m e^{i\theta})| \int_0^{2\pi} P(\rho_m, \rho, \Phi, \theta) d\Phi d\theta\right.$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{E(\rho)}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho_m e^{i\theta})| P(\rho_m, \rho, \theta, \Phi) d\theta d\Phi$$

---

1) 我们可以认为在圆周 $|z| = \rho_m$ 上无 $f(z)$ 的零点和极点．否则，我们只须稍许改变一下 ρ_m 的值．

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{f(a_v)=0,|a_v|<\rho_m}\int_{E(\rho)}g(\rho_m,\rho,\theta,a_v)d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{f(b_v)=\infty,|b_v|<\rho_m}\int_{E(\rho)}g(\rho_m,\rho,\theta,b_v)d\theta\Big\}.$$

记

$$\sum\nolimits_0=\sum_{f(a_v)=0,|a_v|<\rho_m}\int_{E(\rho)}g(\rho_m,\rho,\theta,a_v)d\theta,$$

$$\sum\nolimits_\infty=\sum_{f(b_v)=\infty,|b_v|<\rho_m}\int_{E(\rho)}g(\rho_m,\rho,\theta,b_v)d\theta,$$

则进一步导出

$$\frac{\rho_m(m(\rho_m,f)-m(\rho,f))}{\rho_m-\rho}$$

$$=\frac{\rho_m}{\rho_m-\rho}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{E(\rho_m)}\log|f(\rho_m e^{i\theta})|\int_0^{2\pi}P(\rho_m,\rho,\Phi,\theta)d\Phi d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho_m e^{i\theta})|\int_{E(\rho)}P(\rho_m,\rho,\Phi,\theta)d\Phi d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_0-\frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_\infty\Big\}$$

$$=\frac{\rho_m}{2\pi}\int_{E(\rho_m)}\log|f(\rho_m e^{i\theta})|\int_{CE(\rho)}\frac{P(\rho_m,\rho,\Phi,\theta)d\Phi}{\rho_m-\rho}d\theta$$

$$+\frac{\rho_m}{2\pi}\int_{CE(\rho_m)}\log\frac{1}{|f(\rho_m e^{i\theta})|}\int_{E(\rho)}\frac{P(\rho_m,\rho,\Phi,\theta)d\Phi}{\rho_m-\rho}d\theta$$

$$+\frac{\rho_m}{2\pi(\rho_m-\rho)}\sum\nolimits_0-\frac{\rho_m}{2\pi(\rho_m-\rho)}\sum\nolimits_\infty, \tag{3.23}$$

其中 $CE(\rho)$ 和 $CE(\rho_m)$ 分别表示 $E(\rho)$ 和 $E(\rho_m)$ 相对于 $[0, 2\pi]$ 的补集合.注意到当 $\rho\to\rho_m$ 时有

$$\frac{\rho_m}{2\pi}\sum\int_{E(\rho)}\frac{g(\rho_m,\rho,\theta,a_v)}{\rho_m-\rho}d\theta$$

$$\to\sum\int_{E(\rho)}P(\rho_m,|a_v|,\theta,\arg a_v)d\theta\geqslant 0, \tag{3.24}$$

$$n(\rho_m,f)-\frac{\rho_m}{2\pi}\sum\int_{E(\rho)}\frac{g(\rho_m,\rho,\theta,b_v)}{\rho_m-\rho}d\theta$$

$$\to\sum\int_{CE(\rho)}P(\rho_m,|b_v|,\theta,\arg b_v)d\theta\geqslant 0, \tag{3.25}$$

以及

$$\frac{\rho_m}{2\pi(\rho_m-\rho)}\int_{E(\rho)}\frac{(\rho_m-\rho)(\rho_m+\rho)}{\rho^2{}_m-2\rho_m\rho\cos(\theta-\Phi)+\rho^2}d\Phi$$

$$\geqslant\frac{\rho_m}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\operatorname{mes}CE(\rho)}^{\pi}\frac{(\rho_m+\rho)d\beta}{\rho_m{}^2-2\rho\rho_m\cos\beta+\rho^2}$$

$$\to\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\operatorname{mes}CE(\rho_m)}^{\pi}\frac{d\beta}{1-\cos\beta}$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\operatorname{mes}CE(\rho_m)}{4} \tag{3.26}$$

和

$$\frac{\rho_m}{2\pi(\rho_m-\rho)}\int_{CE(\rho)}\frac{(\rho_m-\rho)(\rho_m+\rho)d\Phi}{\rho_m^2-2\rho\rho_m\cos(\theta-\Phi)+\rho^2}$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\operatorname{mes}E(\rho)}^{\pi}\frac{(\rho_m+\rho)d\beta}{\rho^2{}_m-2\rho\rho_m\cos\beta+\rho^2}$$

$$\to \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\operatorname{mes}E(\rho_m)}^{\pi}\frac{d\beta}{1-\cos\beta}=\frac{1}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\operatorname{mes}E(\rho_m)}{4}. \quad (3.27)$$

于是，如果在(3.23)式两边同时加$\rho_m N'(\rho_m,f)=n(\rho_m,f)$项，再命$\rho\to\rho_m$，然后两边同时除以$T(\rho_m,f)$，则根据(3.22)，(3.24)，(3.25)，(3.26)和(3.27)式我们判定(3.21)式成立，即引理3.6得证.

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个下级为μ的亚纯函数，并且至少有两个亏值a_1和a_2，其相应亏量$\delta(a_1,f)=\delta_1>0$和$\delta(a_2,f)=\delta_2>0$. 作交换

$$F(z)=\frac{f(z)-a_1}{f(z)-a_2},$$

则$F(z)$以0和∞为亏值，其相应亏量$\delta(0,F)=\delta(a_1,f)=\delta_1>0$和$\delta(\infty,F)=\delta(a_2,f)=\delta_2>0$，以及$F(z)$与$f(z)$有相同的下级$\mu$. 于是应用引理3.6，置其中的$\gamma=\mu$，我们就得到A. Edrei - W. Fuchs的一个结果[15b].

定理3.4 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数，并且具有两个亏值，则其下级$\mu>0$.

系. 下级为零的亚纯函数至多具有一个亏值.

早期，G. Valiron已经证明了零级亚纯函数至多具有一个亏值[39e].

当$f(z)$是整函数时，我们可以得到更强的结果[18b].

定理3.5 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数，并且具有一个有穷亏值，则其下级$\mu>\frac{1}{2}$.

我们将在§4.2节给出这个定理的证明.

现在继续对$F(z)$作讨论. 首先，类似于引理3.6的证明过程，我

们可以判定存在一个依赖于 δ_1 和 δ_2 的正数 $\eta = \eta(\delta_1, \delta_2) > 0$, 使得

$$\varliminf_{R \to +\infty} \frac{RT'(R, F)}{T(R, F)} \geqslant \eta. \tag{3.28}$$

进一步，对任意值 $\sigma \geqslant 1$, 根据中值定理有

$$\frac{\log T(\sigma r, F) - \log T(r, F)}{\log \sigma r - \log r} = \frac{RT'(R, F)}{T(R, F)}, \quad r \leqslant R \leqslant \sigma r.$$

于是

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\log T(\sigma r, F) - \log T(r, F)}{\log \sigma}$$

$$\geqslant \varliminf_{R \to +\infty} \frac{RT'(R, F)}{T(R, F)} \geqslant \eta. \tag{3.29}$$

另一方面，根据第一基本定理有

$$T(\sigma r, F) \leqslant T(\sigma r, f) + O(1), \tag{3.30}$$

$$T(r, F) \geqslant T(r, f) - O(1). \tag{3.31}$$

于是，根据 (3.29), (3.30) 和 (3.31) 式，我们得到

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\log T(\sigma r, f) - \log T(r, f)}{\log \sigma} \geqslant \eta,$$

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{T(\sigma r, f)}{T(r, f)} \geqslant \sigma^{\eta},$$

从而证明了下述结果：[40b]

引理 3.7 设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数，具有两个亏值 a_1 和 a_2, 其相应亏量 $\delta(a_1, f) = \delta_1 > 0$, $\delta(a_2, f) = \delta_2 > 0$, 则存在一个依赖于 δ_1 和 δ 的正数 $\eta = \eta(\delta_1, \delta_2)$, 使得对任意

值$\sigma \geqslant 1$有

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{T(\sigma r, f)}{T(r, f)} \geqslant \sigma^{\eta}.$$

3.3.2. 关于亏值的一个引理

我们首先证明下述引理：

引理3.8 设$f(z)$是圆$|z| \leqslant R(1 < R < +\infty)$上的亚纯函数，$\alpha_i(i = 1, 2, \cdots, n(R', f = \infty))$是$f(z)$在圆$|z| < R'(1 < R' < R)$内的极点，$(\gamma)$是相应于这$n(R', f = \infty)$个点及正数$H$的欧氏除外圆，则对于位在圆$|z| < r\ (4eH < r < R')$内并在圆$(\gamma)$外的点$z$，有

$$\log|f(z)| \leqslant \left\{\frac{R' + r}{R' - r} + \frac{\log\frac{2R'}{H}}{\log\frac{R}{R'}}\right\} T(R, f). \qquad (3.32)$$

证. 应用Poison-Jensen公式，当$|z| < r$时有

$$\log|f(z)| \leqslant \frac{R' + r}{R' - r} m(R', f)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n(R', f=\infty)} \log\left|\frac{R'^2 - \bar{\alpha}_i z}{R'(z - \alpha_i)}\right|$$

$$\leqslant \frac{R' + r}{R' - r} m(R', f) + n(R', f = \infty)\log(2R')$$

$$+ \log \frac{1}{\prod_{i=1}^{n(R', f=\infty)} |z - d_i|}.$$

进一步当 $z \in (\gamma)$ 时，导出

$$\log|f(z)| \leqslant \frac{R'+r}{R'-r} m(R', f) + n(R', f=\infty) \log \frac{2R'}{H}.$$

注意到

$$n(R', f=\infty) \leqslant \frac{1}{\log \frac{R}{R'}} \left\{ \int_0^R \frac{n(t,\infty) - n(0,\infty)}{t} dt \right.$$

$$\left. + n(0,\infty)\log R - n(0,\infty)\log R' \right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{R}{R'}} N(R,\infty),$$

则得 (3.32) 式，即引理 3.8 得证.

以下，我们证明一个关于亏值的重要引理：

引理 3.9 设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数，具有 p 个亏值 a_v $(v = 1, 2, \cdots p; 1 \leqslant p < +\infty)$，其相应的亏量 $\delta(a_v, f) = \delta_v > 0$. 当 $a_v \neq \infty$ $(1 \leqslant v \leqslant p)$ 时，设

$$f(z) - a_v = c_v z^{sv} + c_{v+1} z^{sv+1} + \cdots, c_v \neq 0.$$

置

$$\delta = \min_{1 < v < p} \{\delta_v\},$$

$$|a| = \max_{1 < v < p} \{|a_v|, a_v \neq \infty\}, \tag{3.33}$$

$$|c| = \min_{1 < v < p} \{|c_v|, a_v \neq \infty\}, \tag{3.34}$$

和任意取定数$h(h>0)$, $H(H>0)$和$K>0(hH\leqslant K\leqslant 2hK)$和数$\sigma$, $0<\sigma<\frac{1}{2}h$. 如果对某个充分大的值r, $r\geqslant 1$满足下述条件:

$$T(re^h, f)\leqslant e^K T(r,f)(1+O(1))\leqslant 2e^K T(r,f), \tag{3.35}$$

以及当$R\geqslant r$时有

$$\frac{\delta}{2}T(R,f)\leqslant m(R,a_\nu), \quad \nu=1,2,\cdots,p; \tag{3.36}$$

$$T\left(R,\frac{1}{f-a_\nu}\right)<2T(R,f), \quad \nu=1,2,\cdots,p; \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T(R,f)}\Bigg\{&8\log 2+\log^+\log^+|a|+\log^+\log^+\frac{1}{|c|}+\frac{1}{2}h\\&+3K+3\log\frac{1}{e^{\frac{1}{2}h}-e^\sigma}+\log^+\frac{4(p+1)e^\sigma}{e^\sigma-1}\\&+2\log^+\frac{2(2p+1)}{h}+2\log R+3\log^+T(R,f)\Bigg\}\\&<\frac{\delta}{8},\end{aligned} \tag{3.38}$$

则在区间$[r,e^\sigma r]$中必定存在值R和一个相应的值$\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$集合$E_\nu(R)(1\leqslant\nu\leqslant p)$, 使得当$\theta\in E_\nu(R)$和$a_\nu\neq\infty$时有

$$\log\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a_\nu|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(R,f), \tag{3.39}$$

$$\log\frac{1}{|f'(Re^{i\theta})|}\geqslant\frac{\delta}{8}T(R,f); \tag{3.40}$$

而当 $a_\nu = \infty$ 时，有

$$\log|f(Re^{i\theta})| \geqslant \frac{\delta}{4} T(R,f),$$

并且

$$\operatorname{mes} E_\nu(R) \geqslant \frac{\pi\delta}{8e^{2hH}\left\{\dfrac{e^{\frac{1}{2}h}+e^{\sigma}}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}+\dfrac{2}{h}\log\dfrac{16(p+1)e^{1+\frac{1}{2}h}}{e^{\sigma}-1}\right\}}$$

$$= M(\delta, h, H, \sigma) > 0. \tag{3.41}$$

证． 我们不妨假设 $a_\nu \neq \infty\ (1 \leqslant \nu \leqslant p)$. 否则，只需对证明作一个十分明显的修正．设 $f(z)$ 在圆 $|z| < re^{\frac{1}{2}h}$ 内的 a_ν- 值点为 $\alpha_{\nu j}$ ($j = 1, 2, \cdots, n(re^{\frac{1}{2}h}, a_\nu)$)，极点为 β_m ($m = 1, 2, \cdots, n(re^{\frac{1}{2}h}, \infty)$)，$(\gamma)_\nu$ 是相应于这 $n(re^{\frac{1}{2}h}, a_\nu)$ 个点及正数 H_1 的欧氏除外圆．置

$$N = n(re^{\frac{1}{2}h}, \infty) + \sum_{\nu=1}^{p} n(re^{\frac{1}{2}h}, a_\nu),$$

$$(\gamma)' = \bigcup_{\nu=1}^{p}\left\{\bigcup_{j=1}^{n(re^{\frac{1}{2}h}, a_\nu)}\left(|z-a_{\nu j}| < \frac{2eH_1}{N}\right)\right\}$$

$$\bigcup\left\{\bigcup_{m=1}^{n(re^{\frac{1}{2}h}, \infty)}\left(|z-\beta_m| < \frac{2eH_1}{N}\right)\right\},$$

$$(\gamma) = \bigcup_{\nu=1}^{p}(\gamma)_\nu \bigcup (\gamma)',$$

则 (γ) 的半径和不超过 $2e(p+1)H_1$. 若取

$$H_1 = \frac{e^{\sigma}-1}{8e(p+1)} r,$$

则在区间 $[r, re^{\sigma}]$ 中存在值 R, 使得圆周 $|z|=R$ 与 (γ) 无交. 再置

$$E_{\nu}(R)=E\left\{\theta \,|\, 0\leqslant\theta<2\pi,\ \log\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a_{\nu}|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(R,f)\right\}. \tag{3.42}$$

以下我们证明

$$\operatorname{mes}E_{\nu}(R)\geqslant M(\delta,h,H,\sigma). \tag{3.43}$$

首先, 根据(3.36)和(3.39), 我们有

$$\frac{\delta}{2}T(R,f)\leqslant m(R,a_{\nu})=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log^{+}\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a_{\nu}|}d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{E_{\nu}(R)}\log^{+}\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a_{\nu}|}d\theta+\frac{\delta}{4}T(R,f),$$

$$\frac{\delta}{4}T(R,f)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{E_{\nu}(R)}\log^{+}\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a_{\nu}|}d\theta. \tag{3.44}$$

其次, 应用引理3.8, 置其中的 $r=re^{\sigma}$, $R'=re^{\frac{1}{2}h}$, $R=re^{h}$ 和 $(\gamma)=(\gamma)_{\nu}$, 则(3.32)式给出

$$\log^{+}\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a|}\leqslant\left\{\frac{e^{\frac{1}{2}h}+e^{\sigma}}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{h}\log\frac{16(p+1)e^{1+\frac{1}{2}h}}{e^{\sigma}-1}\right\}T\left(re^{h},\frac{1}{f-a_{\nu}}\right).$$

将此式代入(3.44)式, 并注意到 $hH\leqslant K\leqslant 2hH$, (3.37)和(3.35)式, 即得(3.43)式.

现在证明(3.40)式. 首先根据(1.35)式, 我们判定当 $z=Re^{i\theta}$, $\theta\in E_{\nu}(R)$, $z\overline{\in}(\gamma)'$ 时有

$$
\begin{aligned}
\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_v}\right| \leqslant {} & \log^+(re^{\frac{1}{2}h}) + 2\log^+\frac{1}{re^{\frac{1}{2}h}-R} \\
& + 2\log 2 + \log^+ T(re^{\frac{1}{2}h}, f-a_v) \\
& + \log^+\log^+\frac{1}{|c_v|}{}^{1)} + \log 2 \\
& + \log^+\frac{n(re^{\frac{1}{2}h}, a_v) + n(re^{\frac{1}{2}h}, \infty)}{R} \\
& + \log^+\left(\frac{4(p+1)RN}{(e^\sigma-1)r}\right) \\
& + \log^+\frac{R}{re^{\frac{1}{2}h}-R} + 2\log 2.
\end{aligned}
$$

进一步根据(3. 33)和(3. 34)式以及 $1 \leqslant r \leqslant R \leqslant re^\sigma$, 可以导出

$$
\begin{aligned}
\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_v}\right| \leqslant {} & \log(re^{\frac{1}{2}h}) + 3\log^+\frac{1}{e^{\frac{1}{2}h}-e^\sigma} \\
& + 3\log 2 + \log^+ T(re^{\frac{1}{2}h}, f) + \log^+\log^+|a| \\
& + \log 2 + \log^+\log^+\frac{1}{|c|} + 2\log^+ N + \log R \\
& + \log^+\frac{4e^\sigma(p+1)}{e^\sigma-1} + 2\log 2 .
\end{aligned}
$$

再根据(3. 37)式有

$$
N = n(re^{\frac{1}{2}h}, \infty) + \sum_{v=1}^{p} n(re^{\frac{1}{2}h}, a_v)
$$

---

1)这里须用 $\log^+\log^+\dfrac{1}{|c_v|}$ 代替(1. 35)式中的 $\log^+\log^+\dfrac{1}{|f(0)-a_v|}$.

$$\leqslant \frac{2}{h}\left\{N(re^{h},\infty)+\sum_{\nu=1}^{p}N(re^{h},a_{\nu})\right\}$$

$$\leqslant \frac{2}{h}\left\{T(re^{h},f)+\sum_{\nu=1}^{p}T\left(re^{h},\frac{1}{f(z)-a_{\nu}}\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{2}{h}(2p+1)T(re^{h},f).$$

于是

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_{\nu}}\right|\leqslant 6\log 2+\frac{1}{2}h+\log^{+}\log^{+}|a|$$

$$+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|c|}+3\log\frac{1}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}$$

$$+\log^{+}\frac{4e^{\sigma}(p+1)}{e^{\sigma}-1}+2\log^{+}\frac{2(2p+1)}{h}$$

$$+\log r+3\log^{+}T(re^{h},f)+\log R.$$

最后根据(3. 39), (3. 35)和(3. 38)式,我们判定

$$\log^{+}\frac{1}{|f'(Re^{i\theta})|}\geqslant\frac{\delta}{8}T(R,f),$$

即(3. 40)式成立,从而引理3. 9完全得证.

3. 3. 3. 亚纯函数的增长性与零点和极点分布

我们考虑一个具有亏值的亚纯函数的增长性与它的零点和极点分布或Julia方向分布间的关系,证明了下述结果:[44a]

定理3. 6 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数,具有一个非零有穷亏值,$\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots$

$<\theta_q;\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi$)是$z$平面上的$q(1\leqslant q<+\infty)$条半直线，并且对任意小的数$\varepsilon>0$有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\bar{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}}{\log r}=0,$$

$$X=0,\infty. \qquad (3.45)$$

则当下级$\mu<+\infty$时，必有级$\lambda\leqslant\frac{\pi}{\omega}$，其中

$$\omega=\min_{1<k<q}\{\theta_{k+1}-\theta_k\}.$$

证．(1)首先根据下级的定义，存在序列$\{r_n\}$，$r_n<r_{n+1}\to+\infty(n\to+\infty)$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}=\mu<+\infty.$$

然后任意取定数$h(0<h<+\infty)$，$h_1(0<h_1<h)$和$H\left(\max\left\{\mu,\frac{\pi}{\omega}\right\}<H\right)$，并且置

$$K_1=h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)H,\quad K=h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)H,$$

$$E=E\{t\mid T(te^{h_1},f)\leqslant e^{K_1}T(t,f)$$

$$\text{和 } T(e^h t,f)\leqslant e^K T(t,f),\ t\geqslant r_0\geqslant 1\}, \qquad (3.46)$$

$$E[r_0,r_n]=E\cap[r_0,r_n],$$

则根据引理2.1有

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\log r_n}\int_{E[r_0,r_n]}\frac{dt}{t}\geqslant 1-\frac{\mu}{H}.$$

设a是$f(z)$的一个非零有穷亏值，其相应亏量$\delta(a,f)=\delta>0$. 根据引理3.9，我们判定对于任意取定的值$\sigma\left(0<\sigma<\frac{1}{2}h_1\right)$和充分大的值$t\in E$，在区间$[t,e^{\sigma}t]$内必定存在值$R_t$和与之相应的值$\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$集合$E(R_t)$，使得当$\theta\in E(R_t)$时有

$$\log\frac{1}{|f(R_te^{i\theta})-a|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(R_t,f),\tag{3.47}$$

并且

$$\operatorname{mes}E(R_t)\geqslant M=M(\delta,h_1,H,\sigma)>0.$$

现在，我们任意取定数ε

$$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{\omega}{8},\frac{M}{8q}\right\},$$

则根据(3.45)式有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}}{\log r}=0,$$

$$X=0,\infty.\tag{3.48}$$

另一方面，在q个集合$E(R_t)\bigcap[\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon]$ $(k=1,2,\cdots,q)$中至少存在一个集合$E(R_t)\bigcap[\theta_{k_t}+2\varepsilon,\theta_{k_t+1}-2\varepsilon]$ $(1\leqslant k_t\leqslant q)$，使得

$$\operatorname{mes}\{E(R_t)\bigcap[\theta_{k_t}+2\varepsilon,\theta_{k_t+1}-2\varepsilon]\}\geqslant\frac{M}{2q}.\tag{3.49}$$

(2) 通过旋转变换 $ze^{-\frac{i}{2}(\theta_{k_t}+\theta_{k_t+1})}$ 可以将 $\Omega(\theta_{k_t}+\varepsilon,\ \theta_{k_t+1}-\varepsilon)$ 变为 $\Omega(-\theta,\ \theta)$, $\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k_t+1}-\theta_{k_t})-\varepsilon$. 因此, 我们不妨假定 $\Omega\ (\theta_{k_t}+\varepsilon,\ \theta_{k_t+1}-\varepsilon)\equiv\Omega(-\theta,\ \theta)$. 明显地, 存在值 $\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant 2)$ 使得 $\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\neq 0,\ \infty$. 作变换

$$\zeta=\zeta(z)=\frac{z^{\frac{\pi}{2\theta}}-\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}}{z^{\frac{\pi}{2\theta}}+\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}},\tag{3.50}$$

则 $\Omega(-\theta,\ \theta)$ 变为 ζ 平面上的单位圆 $|\zeta|<1$, 点 $z=\alpha$ 变为 ζ 平面上的原点 $\zeta=0$. 进一步根据引理2.9, 我们判定 $\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\ \theta-\varepsilon;\alpha,\ R_t)$ 在 ζ 平面上的像域必定含于圆 $|\zeta|\leqslant\rho$ 内, 而

$$\rho=1-\frac{\varepsilon}{2\theta}R_t^{-\frac{\pi}{2\theta}}.\tag{3.51}$$

圆 $|\zeta|\leqslant\frac{1}{2}(1+\rho)$ 在 z 平面上的原像含于域 $\Omega(-\theta,\ \theta;R_1)$ 内, 而

$$R_1=\alpha\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\cdot R_t,\tag{3.52}$$

并且当 $|\zeta|\leqslant\frac{1}{2}(1+\rho)$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha\theta}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\frac{1}{R_t}&\leqslant|z'(\zeta)|\\&\leqslant\frac{2\alpha\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}R_t^{1+\frac{\pi}{2\theta}},\end{aligned}\tag{3.53}$$

其中$z(\zeta)$是(3.50)式的逆变换.继续作变换

$$\xi=\xi(\zeta)=\frac{2}{1+\rho}\zeta, \tag{3.54}$$

则ζ平面上的圆$|\zeta|\leqslant\frac{1}{2}(1+\rho)$变为$\xi$平面上的单位圆$|\xi|\leqslant 1$,圆$|\zeta|\leqslant\rho$变为圆$|\xi|\leqslant\tau$, 而

$$\tau=\frac{2\rho}{1+\rho}. \tag{3.55}$$

记$\zeta(\xi)$为(3.54)式的逆变换,则有$\frac{1}{2}\leqslant|\zeta'(\xi)|\leqslant 1$. 再记$z(\xi)=z(\zeta(\xi))$, 则根据(3.53)式,我们判定当$|\xi|\leqslant 1$时有

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\theta}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\frac{1}{R_t}&\leqslant|z'(\xi)|\\&\leqslant\frac{2\alpha\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}R_t^{1+\frac{\pi}{2\theta}}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

明显地,z平面上的圆弧$\Gamma(-\theta, \theta, R_t)$在$\xi$平面上的像$\Gamma_\xi(-\theta, \theta, R_t)$正交于单位圆周$|\xi|=1$, 以及圆弧$\Gamma(-\theta+\varepsilon, \theta+\varepsilon; R_t)$在$\xi$平面上的像$\Gamma_\xi(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_t)$位在圆$|\xi|\leqslant\tau$内.置

$$\xi_0=\frac{2}{1+\rho}\cdot\frac{R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}-\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}}{R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}+\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}}, \tag{3.57}$$

则有$\xi_0\in\Gamma_\xi(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_t)$. 作变换

$$x=x(\xi)=\frac{\xi-\xi_0}{1-\xi_0\xi}, \tag{3.58}$$

则 $\Gamma_\xi(-\theta,\ \theta;R_t)$ 变为 x 平面上的一条通过原点 $x=0$ 的直线段 $\Gamma_x(-\theta,\ \theta;R_t)$. 另一方面,(3.58)式的逆变换为

$$\xi=\xi(x)=\frac{x+\xi_0}{1+\xi_0 x}.$$

于是当 $|x|<1$ 时有

$$\frac{1-\xi_0}{2}\leqslant|\xi'(x)|\leqslant\frac{2}{1-\xi_0}.$$

进一步根据(3.57)式,我们有

$$1-\xi_0=1-\frac{2}{1+\rho}\cdot\frac{R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}-\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}}{R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}+\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}}$$

$$=\frac{\rho\left(R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}+\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}\right)-R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}+3\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}}{(1+\rho)\left(R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}+\alpha^{\frac{\pi}{2\theta}}\right)}.$$

再注意到 $1\leqslant\alpha\leqslant2,\ 0<\varepsilon<\dfrac{\omega}{8}$ 以及 $0<\omega\leqslant2\pi$, 则根据(3.51)式,我们判定

$$1-\xi_0\geqslant R_t^{-\frac{\pi}{2\theta}}.$$

于是

$$\frac{1}{2}R_t^{-\frac{\pi}{2\theta}}\leqslant|\xi'(x)|\leqslant2R_t^{\frac{\pi}{2\theta}}.\tag{3.59}$$

记$z(x)=z(\zeta(\xi(x)))$，则根据(3.56)和(3.59)式，我们判定当$|x|<1$时有

$$\frac{\alpha\theta}{2\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{1}{R_t}\right)^{1+\frac{\pi}{2\theta}}\leqslant|z'(x)|$$

$$\leqslant\frac{4\alpha\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}R_t^{1+\frac{\pi}{\theta}}. \tag{3.60}$$

(3) 置$F(\xi)=f(z(\zeta(\xi)))$. 明显地，$\dfrac{F'(0)}{F(0)}\neq 0,\infty$，于是根据Jensen-Nevanlinna公式，对于任意值r，$0<r<1$，我们有

$$\log\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right|=m\left(r,\frac{F'}{F}\right)-m\left(r,\frac{F}{F'}\right)$$

$$+N\left(r,\frac{F'}{F}\right)-N\left(r,\frac{F}{F'}\right)$$

$$\leqslant m\left(r,\frac{F'}{F}\right)-m\left(r,\frac{F}{F'}\right)+N(r,F)$$

$$+N\left(r,\frac{1}{F}\right)-N\left(r,\frac{1}{F'}\right). \tag{3.61}$$

另一方面，我们以$F(\xi)$的每个零点和极点为心，以$\dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{1-\tau}{32\times 2}$($N=n(1,F=0)+n(1,F=\infty)$)为半径作圆，其全体记为$(\gamma)_\xi$，则$(\gamma)_\xi$的半径之和不超过$\dfrac{1-\tau}{32\times 2}$. 于是在区间$\left[\dfrac{1+\tau}{2},\dfrac{3+\tau}{4}\right]$和$\left[\dfrac{7+\tau}{8},\dfrac{15+\tau}{16}\right]$内分别存在值$\tau_1$和$\tau_2$，使得圆周$|\xi|=\tau_i$($i=1,2$)均与圆$(\gamma)_\xi$无交. 以下，我们利用(3.61)式分别估

计 $m\left(\tau_1, \dfrac{F}{F'}\right)$ 和 $n(\tau_1, F'=0)$.

1) 首先，我们估计 $m\left(\tau', \dfrac{F'}{F}\right)$, 其中 $0<\tau'\leqslant\dfrac{15+\tau}{16}$, 并且圆周 $|\xi|=\tau'$ 与圆 $(\gamma)_\xi$ 无交. 设圆周 $|\xi|=\tau'$ 在 z 平面上的像为 Γ', β_ξ 表示 $F(\xi)$ 的一个零点或极点，它在 z 平面上的像为 β, l' 是 β 到 Γ' 的最短连线，l' 在 ξ 平面上的像为 l'_ξ. 根据假设，圆周 $|\xi|=\tau'$ 在圆 $(\gamma)_\xi$ 外，于是我们判定 l' 的长度

$$\operatorname{mes} l' = \int_{l'} |dz| = \int_{l'_\xi} |z'(\xi)||d\xi|$$

$$\geqslant \min_{|\xi|<1} |z'(\xi)| \frac{1-\tau}{32\times 2}\cdot\frac{1}{N}. \tag{3.62}$$

进一步根据 (3.48) 和 (3.52) 式，对于任意取定的数 $\eta>0$, 只要 $t\in E$ 充分大就有

$$n(1, F=0)+n(1, F=\infty)$$

$$\leqslant n\{\Omega(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_1), f=0\}$$

$$+n\{\Omega(-\theta_1+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_1), f=\infty\}$$

$$\leqslant 2R_1^\eta = 2\alpha^\eta\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta\eta}{\pi}} R_t^\eta, \tag{3.63}$$

以及根据 (3.51) 式有

$$1-\tau = 1-\frac{2\rho}{1+\rho}\geqslant\frac{1}{2}(1-\rho)=\frac{\varepsilon}{4\theta}R_t^{-\frac{\pi}{2\theta}}. \tag{3.64}$$

于是(3.56),(3.62),(3.63)和(3.64)式给出

$$\text{mes}\, l' \geqslant \frac{\alpha\theta}{32\times 8}\cdot\frac{1}{\pi\alpha^{\eta}}\cdot\left(\frac{1}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}(1+\eta)}\left(\frac{1}{R_t}\right)^{1+\frac{\pi}{2\theta}+\eta}$$

$$= AR_t^{-(1+\frac{\pi}{2\theta}+\eta)}.$$

其中 $A>0$ 是与 t 无关的常数.另一方面,设圆周 $|\xi|=1$ 在 z 平面上的像为 Γ, Γ' 与 Γ 之间的距离为 $d(\Gamma', \Gamma)$, l 为连接 Γ' 和 Γ 上最近两点间的直线段, l 在 ξ 平面上的像为 l_ξ. 于是我们有

$$d(\Gamma'; \Gamma) = \text{mes}\, l = \int_l |dz| = \int_{l_\xi} |z'(\xi)||d\xi|$$

$$\geqslant \min_{|\xi|<1} |z'(\xi)|(1-\tau')$$

$$\geqslant \min_{|\xi|<1} |z'(\xi)|\left(\frac{1-\tau}{16}\right)$$

$$\geqslant AR_t^{-\left(1+\frac{\pi}{2\theta}+\eta\right)}.$$

于是,我们判定 $f(z)$ 在 z 平面上的每个零点和极点到 Γ' 的距离 $\geqslant AR_t^{-\left(1+\frac{\pi}{2\theta}+\eta\right)}$.

现在我们应用(1.35)式,置其中的 $r=R_1$, $\rho'=2R_1$, 则当 $|z|<R_1$ 时有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \log^+ 2R_1 + \log^+ T(2R_1 f)$$

$$+\log^+\frac{n(2R_1)}{R_1} + \log^+\frac{R_1}{\delta(z)} + O(1),$$

其中$\delta(z)$表示点z到$f(z)$的零点和极点的最小距离，以及

$$n(2R_1)=n\left(2R_1,\frac{1}{f}\right)+n(2R_1,f).$$

注意到

$$\begin{aligned}n(2R_1,f)&\leqslant\frac{1}{\log2}\int_{2R_1}^{4R_1}\frac{n(t,f)}{t}dt\\&\leqslant\frac{1}{\log2}\left\{N(4R_1 f)+n(0,f)\log\frac{1}{2R_1}\right\}\\&\leqslant\frac{1}{\log2}T(4R_1 f)\end{aligned}$$

和

$$n\left(2R_1,\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{1}{\log2}T\left(4R_1,\frac{1}{f}\right),$$

则有

$$n(2R_1)\leqslant\frac{2}{\log2}T(4R_1,f)+O(1).$$

于是，特别地当$z\in\Gamma'$时有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant A\log[R_1T(4R_1,f)]+O(1),\qquad(3.65)$$

其中$A<+\infty$是与t无关的常数．进一步根据等式

$$\frac{F'}{F}=\frac{f'}{f}z'(\xi),$$

以及根据(3.56)和(3.65)式，当$|\xi| = \tau'$时，我们得到

$$\log^+\left|\frac{F'}{F}\right| \leqslant \log^+\left|\frac{f'}{f}\right| + \log^+|z'(\xi)|$$

$$\leqslant A\log[R_1 T(4R_1 f)] + \log R^{1+\frac{\pi}{2\theta}} + O(1)$$

$$\leqslant A\log[R_1 T(4R_1, f)] + O(1)$$

进而我们判定当$0 < \tau' \leqslant \frac{15+\tau}{16}$，并且圆周$|\xi| \doteq \tau'$与$(\gamma)_\xi$无交时有

$$m\left(\tau', \frac{F'}{F}\right) \leqslant A\log[R_1 T(4R_1, f)] + O(1), \qquad (3.66)$$

其中$A < +\infty$是与t无关的常数.

2)其次估计$m\left(\tau_1, \frac{F}{F'}\right)$. 根据(3.61)和(3.66)式，置其中的$r = \tau' = \tau_1$，我们得到

$$\log\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right| \leqslant A\log[R_1 T(4R_1, f)] - m\left(\tau_1, \frac{F}{F'}\right)$$

$$+ N\left(\tau_1, \frac{1}{F}\right) + N\left(\tau_1, \frac{1}{F}\right).$$

注意到当$\frac{F'(0)}{F(0)} \neq 0, \infty$时有$F(0) \neq 0, \infty$. 我们任意取定一个数$\sigma_0$, $0 < \sigma_0 < \tau_1$则有

$$N(\tau_1, F) + N\left(\tau_1, \frac{1}{F}\right)$$

$$= \int_0^{\tau_1} \frac{n(t, F = \infty)}{t} dt + \int_0^{\tau_1} \frac{n(t, F = 0)}{t} dt$$

$$= \int_0^{\sigma_0} \frac{n(t, F = \infty)}{t} dt + \int_{\sigma_0}^{\tau_1} \frac{n(t, F = \infty)}{t} dt$$

$$+ \int_0^{\sigma_0} \frac{n(t, F = 0)}{t} dt + \int_{\sigma_0}^{\tau_1} \frac{n(t, F = 0)}{t} dt$$

$$\leqslant \int_0^{\sigma_0} \frac{n(t, F = \infty)}{t} dt + \int_0^{\sigma_0} \frac{n(t, F = 0)}{t} dt$$

$$+ \{n(1, F = 0) + n(1, F = \infty)\} \log \frac{\tau_1}{\sigma_0}.$$

进一步根据(3.63)式我们判定，对于充分大的$t \in E$有

$$N(\tau_1 F) + N\left(\tau_1, \frac{1}{F}\right) \leqslant BR_1^{\eta},$$

其中$B < +\infty$是与t无关的常数．于是

$$\log\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right| \leqslant A \log[R_1 T(4R_1 f)] + BR_1^{\eta} - m\left(\tau_1, \frac{F}{F'}\right),$$

$$m\left(\tau_1, \frac{F}{F'}\right) \leqslant A \log[R_1 T(4R_1, f)] + BR_1^{\eta} + \log\left|\frac{F(0)}{F'(0)}\right|.$$

因此，当$t \in E$充分大时，我们判定

$$m\left(\tau_1, \frac{F}{F'}\right) \leqslant R_1^{2\eta} \log T(4R_1, f). \qquad (3.67)$$

3）最后估计$n(\tau_1, F' = 0)$．根据(3.61)和(3.66)式，置其中的

$r=\tau'=\tau_2$, 我们得到

$$\log\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right|\leqslant A\log[R_1T(4R_1,f)]+BR_1^{\eta}-N\left(\tau_2,\frac{1}{F'}\right).$$

注意到$F'(0)\neq 0$, 则有

$$N\left(\tau_2,\frac{1}{F'}\right)\geqslant\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{n(t,F'=0)}{t}dt\geqslant\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2}n(\tau_1,F'=0),$$

进一步有

$$\tau_2-\tau_1\geqslant\frac{7+\tau}{8}-\frac{3+\tau}{4}\geqslant\frac{1}{16}(1-\rho)$$

$$=\frac{\varepsilon}{32\theta}R_t^{-\frac{\pi}{2\theta}},\quad 0<\tau_2<1.$$

于是

$$N\left(\tau_2,\frac{1}{F'}\right)\geqslant C\cdot R_t^{-\frac{\pi}{2\theta}}n(\tau_1,F'=0),$$

其中$C>0$是与$t\in E$无关的常数,进而得到

$$\log\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right|\leqslant A\log[R_1T(4R_1,f)]$$

$$+BR_1^{\eta}-CR_1^{-\frac{\pi}{2\theta}}n(\tau_1,F'=0).$$

因此,对于充分大的$t\in E$, 我们判定

$$n(\tau_1,F'=0)\leqslant R_1^{+\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(4R_1,f)\tag{3.68}$$

4) 置$E_z(R_t)=E\{R_te^{i\theta}\,|\,\theta\in E(R_t)\cap[\theta_{k_t}+2\varepsilon,\ \theta_{k_t+1}-2\varepsilon]\}$.

根据(3.47)式，当$z\in E_z(R_t)$时有

$$\frac{\delta}{4}T(R_t,f)\leqslant\log\frac{1}{|f(z)-a|}.$$

进一步根据恒等式

$$\frac{1}{f(z)-a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{f(z)}{f'(z)}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)-a}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right\},$$

我们判定当$z\in E_z(R_t)$时有

$$\frac{\delta}{4}T(R_{t_1}f)\leqslant\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a}\right|+\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$$

$$+\log^+\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|+O(1).\tag{3.69}$$

以下，我们对(3.69)式右端各项分别进行估计.

1)首先根据(3.49)式有

$$\operatorname{mes}E_z(R_t)\geqslant\frac{M}{2q}R_t.$$

然后，我们以$f(z)$的每个零点和极点以及a值点为心，以$\frac{M}{8q}\cdot\frac{R_t}{N'}(N'=n(2R_1,f=0)+n(2R_1,f=\infty)+n(2R_1,f=a))$为半径作圆，其全体记为$(\gamma)_z$，则$(\gamma)_z$的半径之和不超过$\frac{MR_t}{8q}$. 于是若置$\tilde{E}_z(R_t)=E_z(R_t)-[E_z(R_t)\bigcap(\gamma)_z]$，则有

$$\operatorname{mes}\tilde{E}_z(R_t)\geqslant\frac{M}{4q}R_t>0.$$

以下当$z\in\tilde{E}_z(R_t)$时，类似于(3.65)式的证明，我们可以判定

$$\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant A\log[R_1T(4R_1,f)]+O(1) \tag{3.70}$$

和

$$\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a}\right|\leqslant A\log[R_1T(4R_1,f)]+O(1), \tag{3.71}$$

其中$A>0$是与t无关的常数.

2) 设$a_\nu(\nu=1,2,\cdots,n(\tau_1,F'=0))$是$F'(\xi)$在圆$|\xi|<\tau_1$内的零点.应用Poisson-Jensen 公式，置其中的$\gamma=\tau,\rho=\tau_1$，则当$|\xi|\leqslant\tau$时，我们得到

$$\log\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right|\leqslant\frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau}m\left(\tau_1,\frac{F}{F'}\right)+\sum_{\nu=1}^{n(\tau_1,F'=0)}\log\left|\frac{\tau_1^2-\bar{a}_\nu\xi}{\tau_1(\xi-a_\nu)}\right|.$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\tau_1^2-\bar{a}_\nu\xi}{\tau_1(\xi-a_\nu)}\right|&=\left|\frac{1-\bar{a}_\nu\xi}{\xi-a_\nu}\right|\left|\frac{\tau_1^2-\bar{a}_\nu\xi}{\tau_1(1-\bar{a}_\nu\xi)}\right|\\&\leqslant\left|\frac{1-\bar{a}_\nu\xi}{\xi-a_\nu}\right|\left|1+\frac{\bar{a}_\nu\xi-\dfrac{\bar{a}_\nu\xi}{\tau_1^2}}{1-\bar{a}_\nu\xi}\right|\\&\leqslant\left|\frac{1-\bar{a}_\nu\xi}{\xi-a_\nu}\right|\left(1+\frac{|\bar{a}_\nu\xi|}{\tau_1^2}\right)\\&\leqslant2\left|\frac{1-\bar{a}_\nu\xi}{\xi-a_\nu}\right|,\end{aligned}$$

则当$|\xi|<\tau$时有

$$\log\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right| \leqslant \frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau} m\left(\tau_1, \frac{F}{F'}\right)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n(\tau_1, F'=0)} \log\left|\frac{1-\bar{a}_\nu \xi}{\xi - a_\nu}\right|$$

$$+ n(\tau_1, F'=0)\log 2. \tag{3.72}$$

设$\tilde{E}_z(R_t)$在ξ平面和x平面上的像分别为$\tilde{E}_\xi(R_t)$和$\tilde{E}_x(R_t)$. 明显地，$\tilde{E}_\xi(R_t) \subset \Gamma_\xi(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_t)$ 和$\tilde{E}_x(R_t) \subset \Gamma_x(-\theta, \theta; R_t)$，以及根据(3.60)式有

$$\frac{M}{4q} R_t \leqslant \int_{\tilde{E}_z(R_t)} |dz| = \int_{\tilde{E}_\xi(R_t)} |z'(\xi)|\,|d\xi|$$

$$= \int_{\tilde{E}_x(R_t)} |z'(x)|\,|dx|$$

$$\leqslant \frac{4\alpha\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} R_t^{1+\frac{\pi}{\theta}} \operatorname{mes}\tilde{E}_x(R_t),$$

$$\operatorname{mes}\tilde{E}_x(R_t) \geqslant \frac{M\pi}{16q\alpha\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} R_t^{-\frac{\pi}{\theta}}. \tag{3.73}$$

进一步设$(\gamma)'_\xi$是相应于这$n(\tau_1, F'=0)$个点及数H_1的伪非欧除外圆，则其半径之和不超过$2eH_1$. 设$(\gamma)'_x$是$(\gamma)'_\xi$在x平面上的像. 于是$(\gamma)'_x$的伪非欧半径之和不超过$2eH_1$. 注意到一个伪非欧圆的伪非欧半径不小于该圆的欧氏半径，以及$\Gamma_x(-\theta, \theta; R_t)$是一条直线段. 于是若取

$$H_1 = \frac{M\pi}{8e\times 16q\alpha\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{1}{R_t}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}, \tag{3.74}$$

则在 $\tilde{E}_x(R_t)$ 上必定存在一点 $x_1 \bar{\in} (\gamma)'_x$. 记 x_1 在 ξ 平面上的像为 ξ_1, 则 $\xi_1 \in \tilde{E}_\xi(R_t)$ 和 $\xi_1 \bar{\in} (\gamma)'_\xi$. 于是根据(2.72)式，当 $\xi = \xi_1$ 时，我们有

$$\log\left|\frac{F(\xi_1)}{F'(\xi_1)}\right| \leqslant \frac{2}{\tau_1 - \tau} m\left(\tau_1, \frac{F}{F'}\right) + n(\tau_1, F' = 0)\log\frac{2}{H_1}.$$

注意到

$$\tau_1 - \tau \geqslant \frac{1+\tau}{2} - \tau \geqslant \frac{1}{4}(1-\rho) = \frac{\varepsilon}{8\theta} R_t^{-\frac{\pi}{2\theta}},$$

以及根据(3.67), (3.68)和(3.74)式我们判定

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{F(\xi_1)}{F'(\xi_1)}\right| &\leqslant AR_1^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(4R_1, f) \\ &\quad + R_1^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log R_1^{\frac{\pi}{\theta}} + O(1) \\ &\leqslant AR_1^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(4R_1, f) + O(1),\end{aligned} \tag{3.75}$$

其中 $A>0$ 是与 t 无关的常数. 设 ξ_1 在 z 平面上的像为 z_1, 则 $z_1 \in \tilde{E}_z(R_t)$. 于是根据等式

$$\frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = \frac{F(\xi_1)}{F'(\xi_1)} z'(\xi_1),$$

我们有

$$\log^+\left|\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}\right| \leqslant \log^+\left|\frac{F(\xi_1)}{F'(\xi_1)}\right| + \log^+|z'(\xi_1)|.$$

进一步根据 (3.56) 和 (3.75) 式得到

$$\log^+\left|\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}\right| \leqslant AR_1^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(4R_1, f)$$

$$+\log R_1^{1+\frac{\pi}{2\theta}}+O(1)$$

$$\leqslant AR_1^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(4R_1,f)+O(1), \qquad (3.76)$$

其中 $A<+\infty$ 是与 t 无关的常数. 最后 (3.69), (3.70), (3.71) 和 (3.76) 式给出

$$T(R_t,f)\leqslant AR_1^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(4R_1,f)+O(1),$$

其中 $A<+\infty$ 是与 t 无关的常数. 进一步根据 h 取法的任意性, 我们可以取值 h 使得 $8e^{h_1}\left(\dfrac{8\theta}{\varepsilon}\right)^2<e^h$, 即有 $4R_1<e^ht$. 于是根据 (3.46) 式有

$$T(R_t,f)\leqslant AR_t^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(t,f)+O(1),$$

即对于充分大的值 $t\in E$ 有

$$T(t,f)\leqslant At^{\frac{\pi}{2\theta}+2\eta}\log T(t,f)+O(1)$$

$$\leqslant At^{\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+2\eta}\log T(t,f)+O(1),$$

其中 $A<+\infty$ 是与 t 无关的常数. 因此

$$\overline{\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t\in E}}}\frac{\log T(t,f)}{\log t}\leqslant\frac{\pi}{\omega-2\varepsilon}+2\eta.$$

命 $\varepsilon\to0$ 和 $\eta\to0$, 我们判定

$$\overline{\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t\in E}}}\frac{\log T(t,f)}{\log t}\leqslant\frac{\pi}{\omega}. \qquad (3.77)$$

进一步根据引理2.1，我们有

$$\varliminf_{\substack{t\to+\infty \\ t\in E}} \frac{1}{\log t}\int_{E[r_0,t]}\frac{dt}{t} \geqslant 1-\frac{\pi}{H\omega}.$$

进而有

$$\varlimsup_{\substack{t\to+\infty \\ t\in E}} \frac{1}{\log t}\int_{CE[r_0,t]}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{\pi}{H\omega}, \tag{3.78}$$

其中 $CE[r_0,t]=[r_0,t]-E[r_0,t]$. 于是对于充分大的值 $t\in E$, 当 $H>\dfrac{6\pi}{\omega}$ 时，我们判定在区间 $[t,t^{1+\frac{2\pi}{H\omega}})$ 中必定存在值 $t'\in E$. 事实上，如果不然，则有 $[t,t^{1+\frac{2\pi}{H\omega}}]\subset CE[r_0,t^{1+\frac{2\pi}{H\varpi}}]$, 取值 t'', 使得 $t''\in E$ 且有 $[t,t'')\subset CE[r_0,t'']$,明显地有 $t''\geqslant t^{1+\frac{2\pi}{H\varpi}}$. 于是，一方面，我们有

$$\int_t^{t''}\frac{dt}{t}=\log t''-\log t.$$

另一方面，根据 (3.78) 式得到

$$\int_t^{t''}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{3\pi}{2H\omega}\log t'',$$

即有

$$\log t''-\log t\leqslant\frac{3\pi}{2H\omega}\log t'',$$

$$\left(1+\frac{2\pi}{H\omega}\right)\left(1-\frac{3\pi}{2H\omega}\right)\log t\leqslant\left(1-\frac{3\pi}{2H\omega}\right)\log t''\leqslant\log t,$$

$$\frac{2\pi}{H\omega} \leqslant \frac{3\pi}{2H\omega}\left(1 + \frac{2\pi}{H\omega}\right), \quad H \leqslant \frac{6\pi}{\omega}.$$

但是这与H的取法相矛盾.因此,对任意取定的数$\eta > 0$,根据(3.77)式有

$$T(t,f) \leqslant T(t',f) \leqslant t'^{\frac{\pi}{\omega}+\eta} \leqslant t^{\left(\frac{\pi}{\omega}+\eta\right)\left(1+\frac{2\pi}{H\omega}\right)},$$

$$\varlimsup_{\substack{t\to+\infty\\ t\overline{\in} E}} \frac{\log T(t,f)}{\log t} \leqslant \left(\frac{\pi}{\omega} + \eta\right)\left(1 + \frac{2\pi}{H\omega}\right).$$

命$H \to +\infty$和$\eta \to 0$,我们得到

$$\varlimsup_{\substack{t\to+\infty\\ t\overline{\in} E}} \frac{\log T(t,f)}{\log t} \leqslant \frac{\pi}{\omega}.$$

再结合(3.77)式,我们判定$f(z)$的级$\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega}$,即定理3.6完全得证.

在定理3.6的假设中,用Julia方向的分布代替零点和极点的分布,则有下述结果:

定理3.7 设$f(z)$是开平面$|z| < +\infty$上的一个亚纯函数,具有一个亏值a和q $(1 \leqslant q < +\infty)$条Julia方向$\Delta(\theta_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, q; 0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < 2\pi; \theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi)$,如果下级$\mu < +\infty$,则必有级$\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega}$,其中

$$\omega = \min_{1\leqslant k \leqslant q} \{\theta_{k+1} - \theta_k\}.$$

证.根据定理2.13和有限覆盖定理,我们判定存在三个判别复

数 α, β, γ 使得对任意小的数 $\varepsilon > 0$ 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}^{*} \frac{\log^{+} n\left\{\bigcup_{k=1}^{q} \overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon, \theta_{k+1}-\varepsilon; r), f=X\right\}}{\log r} = 0,$$

$$X = \alpha, \beta, \gamma.$$

明显地，α, β, γ 三个值中，至少有两个，不妨假设 α, β 判别于值 a. 作变换

$$F(z) = \frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta},$$

则 $F(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数，具有一个亏值 $\frac{a-\alpha}{a-\beta}$，并且对任意小的数 $\varepsilon > 0$ 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^{+} n\left\{\bigcup_{k=1}^{q} \overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon, \theta_{k+1}-\varepsilon; r), F=X\right\}}{\log r} = 0,$$

$$X = 0, \infty.$$

于是根据定理3.6, 我们判定 $F(z)$ 的级 $\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega}$，即 $f(z)$ 的级 $\lambda \leqslant \frac{\pi}{\omega}$，从而定理 3.7 得证.

§ 3.4. Weitsman 定理

引理 3.10 设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个超越亚纯函数，并且 $f(z)$ 的亏量总和

$$\Delta(f) = \sum_{\nu} \delta(a_\nu, f) = 2, \quad \delta(a_\nu, f) > 0, \tag{3.79}$$

则有

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\overline{\in}E_0}}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f'}\right)}{T(r,f')}=0$$

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\overline{\in}E_0}}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}=2-\delta(\infty,f),$$

其中 E_0 的线性测度 $\operatorname{mes}E_0\leqslant 2$.

证. 根据条件 (3. 79), 对任意小的数 $\varepsilon>0$, 只要 q 充分大, 就有

$$\sum_{\nu=1}^{q}\delta(a_\nu,f)+\delta(\infty,f)>2-\varepsilon, \tag{3.80}$$

其中 a_ν 是 $f(z)$ 的有穷亏值. 现在, 根据 (1. 45) 式, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{q}m(r,a_\nu)&\leqslant m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{f-a_\nu}\right)+O(1)\\&\leqslant m\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)\\&=T\left(r,\frac{1}{f'}\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f),\end{aligned} \tag{3.81}$$

以及

$$\begin{aligned}T(r,f')&=m(r,f')+N(r,f')\\&\leqslant m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m(r,f)+N(r,f')\\&\leqslant T(r,f)+N(r,f)+S(r,f),\end{aligned} \tag{3.82}$$

其中$S(r,f)$具有定理1.4中余项的性质，即

$$S(r,f)=O\{\log[rT(r,f)]\},$$

但可能要除去一个关于值r的例外集合E_0, $\operatorname{mes} E_0 \leqslant 2$, 并且$E_0$与$a_v(v=1,2,\cdots,q)$和$q$无关.进一步，根据$f(z)$是超越亚纯函数的假设，我们有

$$S(r,f)=o\{T(r,f)\}\ (r\to+\infty),\ r\bar{\in} E_0. \tag{3.83}$$

因此，(3.82)式给出

$$\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in} E}}\frac{T(r,f)}{T(r,f)}\leqslant 2-\delta(\infty,f).$$

另一方面，(3.80)和(3.81)式给出

$$2-\delta(\infty,f)-\varepsilon\leqslant\varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in} E}}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}.$$

由于ε可以任意小，所以我们判定

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in} E_0}}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}=2-\delta(a,f). \tag{3.84}$$

进一步，(3.81)式给出

$$\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in} E_0}}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f'}\right)}{T(r,f')}+\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in} E_0}}\frac{T(r,f)}{T(r,f')}\cdot\sum_{v=1}^{q}\varliminf_{r\to+\infty}\frac{m(r,a_v)}{T(r,f)}$$

$$\leqslant 1+\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\bar{\in} E_0}}\frac{T(r,f)}{T(r,f')}\cdot\frac{S(r,f)}{T(r,f)}.$$

再根据(3.80),(3.83)和(3.84)式,我们得到

$$\varlimsup_{\substack{r \to +\infty \\ r \overline{\in} E}} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \leqslant \frac{\varepsilon}{2 - \delta(\infty, f)}.$$

由于ε可以任意小,所以我们判定

$$\varlimsup_{\substack{r \to +\infty \\ r \overline{\in} E_0}} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} = 0.$$

于是引理3.10得证.

以下我们证明A. Weitsman的一个重要结果[40a]:

定理3.8 设$f(z)$是开平面$|z| < +\infty$上的一个亚纯函数,其下级$\mu < +\infty$,并且$f(z)$的亏量总和

$$\Delta(f) = \sum_{v} \delta(a_v, f) = 2, \quad \delta(a_v, f) > 0,$$

则$f(z)$的亏值总数$p \leqslant 2\mu$.

证. (1)首先根据假设$\Delta(f) = 2$,必有$p \geqslant 2$.于是根据定理3.4,我们判定$\mu > 0$.因此$f(z)$是超越亚纯函数.

我们任取$f(z)$的$p(p < +\infty)$个亏值$a_v(v = 1, 2, \cdots, p)$,其相应亏量$\delta(a_v, f) = \delta_v > 0$.不失一般性,可以假设$a_v(v = 1, 2, \cdots, p)$均为有穷亏值.否则,只需作一适当的分式线性变换.置

$$\delta = \min_{1 < v < p} \{\delta_v\},$$

$$|a| = \max_{1 < v < p} \{|a_v|\},$$

$$|c| = \min_{1 < v < p} \{|C_v|\},$$

其中 C_v 是 $f(z)-a_v$ 在原点 $z=0$ 的邻域内展式中的首项非零系数.任意取定数 $h\ (0<h<+\infty)$, $h_1\ (0\leqslant h_1<h)$[1],则根据下级 μ 的定义和引理 2.2, 存在序列 $\{R_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n,f)}{\log R_n}=\mu,$$

以及

$$T(e^hR_n,f)\leqslant e^{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu}T(R_n,f)(1+o(1))\ (n\to+\infty),$$

$$T(e^{h_1}R_n,f)\leqslant e^{h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu}T(R_n,f)(1+o(1))\ (n\to+\infty).$$

我们再任意取定数 $\sigma, 0<\sigma<\frac{1}{5}h_1$, 并且置 $K=h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu$ 和 $K_1=h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu$, 则存在正整数 n_0, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时有

$$R_n\geqslant 1, \tag{3.85}$$

$$T(R_ne^h,f)\leqslant e^kT(R_n,f)(1+o(1))\leqslant 2e^kT(R_n,f), \tag{3.86}$$

$$T(R_ne^{h_1},f)\leqslant e^{k_1}T(R_n,f)(1+o(1))\leqslant 2e^{k_1}T(R_n,f), \tag{3.87}$$

以及当 $R\geqslant R_n$ 时有

$$\frac{\delta}{2}T(R,f)\leqslant m(R,a_v),\ v=1,2,\cdots,p,$$

$$T\left(R,\frac{1}{f-a_v}\right)\leqslant 2T(R,f),\ v=1,2,\cdots,p,$$

---

1) 如果仅是为了证明定理 3.8, 则只要取 $h_1=0$ 即可,我们在这里的取法是为了照顾到定理 3.9 的证明.

$$\frac{1}{T(R,f)}\left\{10\log 2+\log^+\log^+|a|+\log^+\log^+\frac{1}{|c|}\right.$$

$$+\frac{1}{2}h+3K_1+3\log^+\frac{1}{e^{\frac{1}{2}h}-e^{\sigma}}$$

$$+\log^+\frac{4(p+1)e^{\sigma}}{e^{\sigma}-1}+2\log\frac{2(2p+1)}{h}$$

$$\left.+2\log R+3\log^+T(R,f)\right\}<\frac{\delta}{8}.$$

因此，根据引理3.9，我们判定在区间 $[R_n, R_ne^{\sigma}]$ 中存在值 t_n 和一个相应的值 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 集合 $E_{\nu}(t_n)$ $(1\leqslant\nu\leqslant p)$，使得当 $\theta\in E_{\nu}(t_n)$ 时有

$$\log\frac{1}{|f(t_ne^{i\theta})-a_{\nu}|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(t_n,f), \tag{3.88}$$

$$\log\frac{1}{|f'(t_ne^{i\theta})|}\geqslant\frac{\delta}{8}T(t_n,f), \tag{3.89}$$

并且

$$\operatorname{mes}E_{\nu}(t_n)\geqslant M(\delta,h,\mu,\sigma). \tag{3.90}$$

设 $f'(z)$ 在原点 $z=0$ 的邻域内有展开式

$$f'(z)=C_sz^s+C_{s+1}z^{s+1}+\cdots,\quad c_s\neq 0,$$

γ_k 表示 $f'(z)$ 的零点．置

$$\pi(z)=\prod_{0<|\gamma_k|<R_ne^{h-2\sigma}}\frac{R_ne^{h-2\sigma}(z-\gamma_k)}{(R_ne^{h-2\sigma})^2-\bar{\gamma}_kz},$$

$$\alpha = \frac{c_s}{\pi(0)},$$

$$G(z) = \frac{\alpha z^s \pi(z)}{f'(z)}, \tag{3.91}$$

则$G(z)$在圆$|z| < R_n e^{h-2\sigma}$内全纯, $G(0)=1$, 并且

$$\log^+|\alpha| \leqslant \log^+|c_s| + \sum_{0<|\gamma_k|<R_n e^{h-2\sigma}} \log\frac{R_n e^{h-2\sigma}}{|\gamma_k|}$$

$$= \log^+|c_s| + \int_0^{R_n e^{h-2\sigma}} \frac{n(t,f'=0)-n(0,f'=0)}{t}dt$$

$$\leqslant \log^+|c_s| + N\left(R_n e^{h-2\sigma}, \frac{1}{f'}\right)$$

$$- n(0,f'=0)\log R_n e^{h-2\sigma}, \tag{3.92}$$

以及

$$\log^+\frac{1}{|\alpha|} \leqslant \log^+\frac{1}{|c_s|} + \log^+|\pi(0)| \leqslant \log^+\frac{1}{|c_s|}. \tag{3.93}$$

(2)现在,我们取正整数$n_1 \geqslant n_0$, 使得当$n \geqslant n_1$时有

$$\text{mes}[R_n e^{h-\sigma}, R_n e^h] \geqslant 3, \tag{3.94}$$

以及根据引理3.10当$R \geqslant R_n$和$R \bar{\in} E_0$时有

$$\left\{\left[\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,\mu,\sigma)}\right]\frac{N\left(R,\frac{1}{f'}\right)}{T(R,f')}\cdot\frac{T(R,f')}{T(R,f)}\right.$$

$$+\frac{\log^+\frac{1}{|c_s|}}{T(R,f)}+\frac{n(0,f'=\infty)\log R}{T(R,f)}\Bigg\}e^K<\frac{\delta}{32}, \tag{3.95}$$

$$\left\{\frac{N\left(R,\frac{1}{f'}\right)}{T(R,f')}\cdot\frac{T(R,f')}{T(R,f)}+\frac{\log^+|c_s|}{T(R,f)}\right\}2e^K<\frac{\delta}{8\times16}, \tag{3.96}$$

$$\frac{T(R,f')}{T(R,f)}+\frac{\log^+\frac{1}{|c_s|}}{T(R,f)}\leqslant 4. \tag{3.97}$$

以下，我们进一步证明在集合 $E_v(t_n)\,(n\geqslant n_1,\ 1\leqslant v\leqslant p)$ 中存在值 θ_{vn}，使得当 $z_{vn}=t_ne^{i\theta_{vn}}$ 时有

$$\log|G(z_{vn})|\geqslant\frac{\delta}{16}T(t_n,f), \tag{3.98}$$

以及在区间 $[R_oe^{h-\sigma},R_ne^h]$ 中存在值 $t'_n\overline{\in}E_0$，使得

$$\log M(R_ne^{h-4\sigma},G)\leqslant 8\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}T(t'_n,f). \tag{3.99}$$

首先，根据 Boutroux - Cartan 定理，满足不等式

$$\prod_{0<|\gamma_k|<R_ne^{h-2\sigma}}|z-\gamma_k|<H'$$

的点集合能被包含在一些圆 $(\gamma)'$ 内，其欧氏半径之和不超过 $2eH'$. 取

$$H'=\frac{1}{8e}M(\delta,h,\mu,\sigma)R_n,$$

则根据 (3.90) 式，在 $E_v(t_n)$ 中存在值 θ_{vn}，使得 $z_{vn}=t_ne^{i\theta_{vn}}\overline{\in}(\gamma)'$. 于

是(3.89),(3.91)和(3.93)式给出

$$\frac{\delta}{8}T(t_n,f) \leqslant \log\frac{1}{|f'(z_{vn})|}$$

$$\leqslant \log|G(z_{vn})| + \log\frac{1}{|\pi(z_{vn})|} + \log^+\frac{1}{|\alpha|}\log\frac{1}{|z_{vn}|^s}$$

$$\leqslant \log|G(z_{vn})| + \log\frac{1}{|\pi(z_{vn})|} + \log^+\frac{1}{|c_s|} + s\log\frac{1}{t_n}.$$

注意到

$$s = \begin{cases} n(0,f'=0), & s \geqslant 0, \\ -n(0,f'=0), & s < 0 \end{cases} \tag{3.100}$$

和

$$\log\frac{1}{|\pi(z_{vn})|} \leqslant n(R_n e^{h-2\sigma},f'=0)\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,\mu,\sigma)}$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,\mu,\sigma)}\right]N\left(R_n e^{h-\sigma},\frac{1}{f'}\right),$$

我们导出

$$\frac{\delta}{8}T(t_n,f) \leqslant \log|G(z_{vn})|$$

$$+\left[\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,\mu,\sigma)}\right]N\left(R_n e^{h-2\sigma},\frac{1}{f'}\right)$$

$$+\log^+\frac{1}{|c_s|} + n(0,f'=\infty)\log t_n.$$

进一步根据(3.94)式和mes $E_0 \leqslant 2$,我们判定在区

间 $[R_ne^{h-\sigma}, R_ne^h]$ 中存在值 $t'_n \bar{\in} E_0$, 使得

$$t_n \leqslant R_ne^{\sigma} \leqslant R_ne^{h-\sigma} \leqslant t'_n,$$

以及

$$\frac{\delta}{8}T(t_n,f) \leqslant \log|G(z_{vn})|$$

$$+\left[\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M(\delta,h,\mu,\sigma)}\right]N\left(t'_n,\frac{1}{f'}\right)$$

$$+\log^+\frac{1}{|c_s|}+n(0,f'=\infty)\log t'_n.$$

再根据 (3.95) 和 (3.86) 式得到

$$\frac{\delta}{8}T(t_n,f) \leqslant \log|G(z_{vn})|+e^{-k}\frac{\delta}{32}T(t'_n,f)$$

$$\leqslant \log|G(z_{vn})|+e^{-k}\frac{\delta}{32}T(R_ne^h,f)$$

$$\leqslant \log|G(z_{vn})|+\frac{\delta}{16}T(t_n,f),$$

$$\log|G(z_{vn})| \geqslant \frac{\delta}{16}T(t_n,f),$$

即 (3.98) 式成立. 另一方面, 应用 Poisson-Jensen 公式, 则根据 (3.91) 和 (3.92) 式有

$$\log M(R_ne^{h-4\sigma},G) \leqslant \frac{R_ne^{h-3\sigma},+R_ne^{h-4\sigma}}{R_ne^{h-3\sigma},-R_ne^{h-4\sigma}}m(R_ne^{h-3\sigma},G)$$

$$\leqslant \frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\left\{m\left(R_n e^{h-3\sigma}, \frac{1}{f'}\right)+\log^+|\alpha|\right.$$

$$\left.+n(0, f'=0)\log R_n e^{h-3\sigma}\right\}$$

$$\leqslant \frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\left\{m\left(R_n e^{h-3\sigma}, \frac{1}{f'}\right)\right.$$

$$\left.+N\left(R_n e^{h-2\sigma}, \frac{1}{f'}\right)+\log^+|c_s|\right\}$$

$$\leqslant \frac{2(e^\sigma+1)}{e^\sigma-1}\left\{T(t_n', f')+\log^+\frac{1}{|c_s|}\right\}.$$

进一步根据(3.97)式得到

$$\log M(R_n e^{h-4\sigma}, G) \leqslant \frac{8(e^\sigma+1)}{e^\sigma-1}T(t_n', f),$$

即(3.99)式成立.

(3)置

$$d=\min_{1\leqslant \nu\neq\nu'\leqslant p}\{|a_\nu-a_{\nu'}|\}>0.$$

我们取正整数$n_2\geqslant n_1$，使得当$n\geqslant n_2$时有

$$e^{\frac{\delta}{16}T(t_n, f)}\geqslant 16,$$

$$2R_n e^{h-4\sigma}\left\{1+\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\frac{16}{\sigma}e^k T(R_n, f)}\right\}e^{-\frac{\delta}{8\times 16}T(R_n, f)}$$

$$+e^{-\frac{\delta}{2}T(R_n, f)}\leqslant e^{-\frac{\delta}{256}T(R_n, f)}<\frac{d}{4}. \qquad (3.101)$$

对 $G(z)$ 应用引理3.5，置其中的 $R=R_ne^{h-3\sigma}$, $r=R_ne^{h-4\sigma}$, $z_0=z_{\nu n}$, $A=e^{\frac{\delta}{16}T(t_n,f)}\geqslant 16$, 则在区间 $[\sqrt[4]{A},\sqrt{A}]$ 中存在值 A', 使得 $G'(z)$ 在等位线 $|G(z)|=A'$ 上无零点，并且集合

$$\Omega(A')=E\{z\mid |G(z)|>A',\ |z|<R_ne^{h-3\sigma}\}\qquad(3.102)$$

位在圆 $|z|<R_ne^{h-4\sigma}$ 内部分且含有点 $z_{\nu n}$ 的连通分支的闭包 $\overline{\Omega}(z_{\nu n})$ 上的任意一点 z, 可以找到一条连接点 z 和 $z_{\nu n}$ 的逐段解析曲线 L，其长度

$$\operatorname{mes} L\leqslant 2R_ne^{h-4\sigma}+2\sqrt{2}\,\pi R_ne^{h-4\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma}T(R_ne^{h-3\sigma},G)},$$

并且当 $z\in L$ 时有

$$|G(z)|\geqslant e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{16}T(t_n,f)},\ |z|\leqslant R_ne^{h-4\sigma}.$$

于是根据(3.91), (3.92), (3.97) 和 (3.86) 式判定

$$\begin{aligned}\operatorname{mes} L&\leqslant 2R_ne^{h-4\sigma}+2\sqrt{2}\,\pi R_ne^{h-4\sigma}\sqrt{\frac{8}{\sigma}T(t_n',f)}\\&\leqslant 2R_ne^{h-4\sigma}\left\{1+\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\frac{8}{\sigma}T(R_ne^{h},f)}\right\}\\&\leqslant 2R_ne^{h-4\sigma}\left\{1+\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\frac{16}{\sigma}e^{K}T(R_n,f)}\right\},\end{aligned}\qquad(3.103)$$

以及当 $z\in L$ 时，根据 (3.91), (3.92), (3.96) 和 (3.98) 式判定

$$e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{16}T(R_n,f)}\leqslant e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{16}T(t_n,f)}\leqslant|G(z)|\leqslant\frac{|\alpha|\,|z|^{S}}{|f'(z)|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|f'(z)|}e^{\log|\alpha|+n(0,f'=0)\log R_ne^{h-4\sigma}}$$

$$\leqslant \frac{1}{|f'(z)|} e^{\log^+|c_s| + N\left(R_n e^{h-2\sigma}, \frac{1}{f'}\right)}$$

$$\leqslant \frac{1}{|f'(z)|} e^{\log^+|c_s| + N\left(t_n', \frac{1}{f'}\right)}$$

$$\leqslant \frac{1}{|f'(z)|} e^{\frac{1}{8} \cdot \frac{\delta}{16} T(R_n, f)}, \tag{3.104}$$

$$|f'(z)| \leqslant e^{-\frac{\delta}{8 \cdot 16} T(R_n, f)}.$$

因此，当 $z \in \Omega(z_{vn})$ 时，根据 (3.88) 式有

$$\begin{aligned}
|f(z) - a_v| &\leqslant |f(z) - f(z_{vn})| + |f(z_{vn}) - a_v| \\
&\leqslant \int_L |f'(z)|\,|dz| + e^{-\frac{\delta}{4} T(t_n, f)} \\
&\leqslant 2R_n e^{h-4\sigma} \left\{ 1 + \sqrt{2}\,\pi \sqrt{\frac{16}{\sigma} e^K T(R_n, f)} \right\} \\
&\quad \times e^{-\frac{\delta}{8 \times 16} T(R_n, f)} + e^{-\frac{\delta}{4} T(R_n, f)}.
\end{aligned}$$

进一步根据 (3.101) 式，我们判定

$$|f(z) - a_v| < e^{-\frac{\delta}{256} T(R_n, f)} < \frac{d}{4}.$$

于是 p 个区域 $\Omega(z_{vn})$ $(n \geqslant n_2, v = 1, 2, \cdots, p)$ 彼此无交.

(4) 由于 $p \geqslant 2$, 所以圆周 $|z| = t\,(t \geqslant t_n, n \geqslant n_2)$ 不能整个地位在 $\Omega(z_{vn})$ $(1 \leqslant v \leqslant p)$ 内. 记圆周 $|z| = t$ 位在 $\Omega(z_{vn})$ 内的部分为 θ_{vt}, 其线性测度为 $t\theta_v(t)$. 于是当 $n \geqslant n_2$ 时，应用定理 3.1，则根

据 (3.98), (3.102) 和 (3.99) 式有

$$\frac{\delta}{16}T(t_n,f) \leqslant \log|G(z_{\nu n})| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{16}T(t_n,f)$$

$$+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2t_n}^{\frac{1}{2}R_ne^{h-4\sigma}}\frac{dt}{t\theta_\nu(t)}}\log M(R_ne^{h-4\sigma},G),$$

$$\frac{\delta}{32}T(t_n,f) \leqslant 9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2t_n}^{\frac{1}{2}R_ne^{h-4\sigma}}\frac{dt}{t\theta_\nu(t)}}8\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}T(t_n',f)$$

$$\pi\int_{2R_ne^\sigma}^{\frac{1}{2}R_ne^{h-4\sigma}}\frac{dt}{t\theta_\nu(t)} \leqslant \log\left\{\frac{72\times32\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\right\}$$

$$+\log T(R_ne^h,f)-\log T(t_n,f).$$

进一步根据 (3.87) 式得到

$$\pi\int_{2R_ne^\sigma}^{\frac{1}{2}R_ne^{h-4\sigma}}\frac{dt}{t\theta_\nu(t)} \leqslant \log\left\{\frac{72\times64\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\right\}$$

$$+h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu,\ \nu=1,\cdots,p. \tag{3.105}$$

最后,我们考虑不等式

$$p^2=\left\{\sum_{\nu=1}^{p}\sqrt{\theta_\nu(\theta)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_\nu(t)}}\right\}^2$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{p}\theta_\nu(t)\cdot\sum_{\nu=1}^{p}\frac{1}{\theta_\nu(t)}\leqslant 2\pi\sum_{\nu=1}^{p}\frac{1}{\theta_\nu(t)},$$

$$\frac{p^2}{2}\leqslant\pi\sum_{\nu=1}^{p}\frac{1}{\theta_\nu(t)},$$

则当 $n \geqslant n_2$ 时，根据 (3.105) 式有

$$\frac{p^2}{2}\int_{2R_n e^{\sigma}}^{\frac{1}{2}R_n e^{h-4\sigma}} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{v=1}^{p} \pi \int_{2R_n e^{\sigma}}^{\frac{1}{2}R_n e^{h-4\sigma}} \frac{dt}{t\theta_v(t)}$$

$$\leqslant p\log\left\{\frac{72\times 64\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right\}+ph\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu.$$

$$\frac{p}{2}(h-5\sigma-\log 4) \leqslant \log\left\{\frac{72\times 64\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right\}$$

$$+h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu.$$

由于 h 可以取得任意大，所以必有 $p \leqslant 2\mu$, 即定理 3.8 得证.

A. Weitsman 于 1969 年证明了定理 3.8. 而早在 1946 年 A. Pfluger 曾经对具有亏量总和等于 2 的整函数进行过深入研究[34a].特别地，关于有穷亏值的个数，他证明了下述结果：

定理 3.9 设 $f(z)$ 是一个整函数，其下级 $\mu < +\infty$, 并且 $f(z)$ 的亏量总和

$$\Delta(f) = \sum_{v}\delta(a_v,f) = 2,\ \delta(a_v,f) > 0,$$

则 $f(z)$ 的有穷亏值总数 $p \leqslant \mu$.

证. 首先根据 $\mu > 0$, $f(z)$ 是一个超越整函数. 我们任意取 p 个有穷亏值 $a_v\ (v = 1, 2, \cdots, p)$, 其亏量 $\delta(a_v,f) = \delta_v > 0$. 置

$$\delta = \min_{1<v<p}\{\delta_v\}, \tag{3.106}$$

$$|a| = \max_{1<v<p}\{|a_v|\}, \tag{3.107}$$

$$d = \min_{1<v\neq v'<p}\{|a_v - a'_v|\}, \tag{3.108}$$

则重复定理3.8的证明，我们有

(1)对任意取定的数h $(0<h<+\infty)$和数$\sigma\left(0<\sigma<\frac{1}{5}h\right)$，置$h_1=2\sigma<h$，则存在序列$\{R_n\}$，使得

$$R_n \geqslant 1,$$

$$T(R_ne^h,f) \leqslant e^K T(R_n,f)^{(1+o(1))} \leqslant 2e^K T(R_n,f),$$

$$K = h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu, \tag{3.109}$$

$$T(R_ne^{h_1},f) \leqslant e^{K_1} T(R_n,f)^{(1+o(1))} \leqslant 2e^{K_1} T(R_n,f),$$

$$K_1 = h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu. \tag{3.110}$$

(2)当$n \geqslant n_1$时，存在点$z_{vn}=t_ne^{i\theta vn}$ $(R_n \leqslant t_n \leqslant R_ne^{\sigma})$使得

$$\log|G(z_{vn})| \geqslant \frac{\delta}{16}T(t,f), \tag{3.111}$$

以及在区间$[R_ne^{h-\sigma}, R_ne^h]$上存在值$t'_n \bar{\in} E_0$，使得

$$\log M(R_ne^{h-4\sigma},G) \leqslant 8\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}T(t'_n,f).$$

(3)当$n \geqslant n_2$, $n_2 \geqslant n_1$时，存在含有点z_{vn}的域$\Omega(z_{vn})$使得当$z\in\Omega(z_{vn})$时有

$$|f(z)-a_v| \leqslant e^{-\frac{\delta}{256}T(R_n,f)} < \frac{d}{4} \tag{3.112}$$

以及当z属于$\Omega(z_{vn})$位在圆$|z|<R_ne^{h-4\sigma}$内的边界上时有

$$|G(z)| < e^{\frac{\delta}{2\times 16}T(t_n,f)}, \tag{3.113}$$

并且p个域$\Omega(z_{vn})\ (v=1,2,\cdots,p)$彼此无交.

我们取定一个足够大的正整数$\tau\geqslant 1$,使得

$$e^{(\tau-1)\sigma}>4,$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{18\times 32\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma}>\frac{\delta}{2\times 16},\tag{3.114}$$

$$\frac{\delta}{4\times 48\times 36\times 32\sqrt{2}}\cdot e^{(\tau-1)\sigma}\geqslant\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}2e^{h_1(1+\frac{h_1}{h})\mu}\tag{3.115}$$

并且记$\Omega(z_{vn})$位在圆$|z|<Re^{\tau\sigma}$内且含有点z_{vn}的连通分支为$\Omega'(z_{vn})$,圆周$|z|=t$位在$\Omega'(z_{vn})$内部分为$\tilde{\theta}_{vt}$,其线性测度为$t\tilde{\theta}_v(t)$.再假设$G(z)$在集合$\Omega'(z_{vn})\bigcap(|z|=R_ne^{\tau\sigma})$上的最大值于$\tilde{z}_{vn}$点达到.于是,应用定理3.1,并根据(3.111)和(3.113)式有

$$\frac{\delta}{16}T(t_n,f)\leqslant\log|G(z_{vn})|\leqslant\frac{\delta}{2\times 16}T(t_n,f)$$

$$+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_{vn}|}^{\frac{1}{2}R_ne^{\tau\sigma}}\frac{dt}{t\tilde{\theta}_v(t)}}\cdot\log|G(\tilde{z}_{vn})|,$$

$$\log|G(\tilde{z}_{vn})|\geqslant\frac{\delta}{18\times 16\sqrt{2}}e^{\pi\int_{2tn}^{\frac{1}{2}Rne^{\tau\sigma}}\frac{dt}{t\tilde{\theta}_v(t)}}\cdot T(t_n,f)$$

注意到$\tilde{\theta}_v(t)\leqslant 2\pi$和$t_n\leqslant R_ne^{\sigma}$,我们判定

$$\log|G(\tilde{z}_{vn})|\geqslant\frac{\delta}{18\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma}T(t_n,f).$$

现在,取正整数$n_3\geqslant n_2$,使得当$n\geqslant n_3$时有

$$e^{\frac{\delta}{18\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma}T(t_n,f)}\geqslant 16.$$

我们对$G(z)$应用引理3.5,置其中的$R=R_ne^{h-3\sigma}$, $r=R_ne^{h-4\sigma}$, z_0

$= \tilde{z}_{\nu n}$, $A = e^{\frac{\delta}{18\times 32\sqrt{2}} e^{(\tau-1)\sigma T(t_n f)}}$, 则在区间$[\sqrt[4]{A}, \sqrt{A}]$中存在值$A'$, 使得$G'(z)$在等位线$|G(z)| = A'$上无零点, 即等位线是解析的, 并且集合

$$\Omega(A') = E\{z \mid |G(z)| > A', |z| < R_n e^{h-3\sigma}\}$$

位在圆$|z| < R_n e^{h-4\sigma}$内部分且含有点$\tilde{z}_{\nu n}$的连通分支的闭包$\overline{\Omega}(\tilde{z}_{\nu n})$上的任意一点$z$, 可以找到一条连接点$z$和$\tilde{z}_{\nu n}$的逐段解析曲线$L$, 其长度[1)]

$$\operatorname{mes} L \leqslant 2 R_n e^{h-4\sigma}\left\{1 + \sqrt{2}\,\pi \sqrt{\frac{16}{\sigma} e^{K} T(R_n, f)}\right\},$$

以及当$z \in L$时, 有

$$|G(z)| \geqslant e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{18\times 32\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma T(t_n, f)}}, \quad |z| < R_n e^{h-4\sigma}.$$

于是

$$e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{18\times 32\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma T(R_n, f)}} \leqslant |G(z)|$$

$$\leqslant \frac{|\alpha|\,|z|^{s}}{|f'(z)|} \leqslant \frac{1}{|f'(z)|} e^{\frac{1}{8}\cdot\frac{\delta}{16} T(R_n, f)}\ ^{2)}.$$

进一步根据(3.14)式得到

$$|f'(z)| \leqslant e^{-\frac{\delta}{8\times 18\times 32\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma T(R_n, f)}}.$$

---

1) 参见(3.103)式.

2) 参见(3.104)式.

因此，当 $z \in \Omega(\tilde{z}_{vn})$ 时，有

$$|f(z)-f(z_{vn})| \leqslant \int_L |f'(z)||dz|$$

$$\leqslant 2R_n e^{h-4\sigma}\left\{1+\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\frac{16}{\sigma}e^K T(R_n,f)}\right\}$$

$$\times e^{-\frac{\delta}{8\times 18\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma T(t_n,f)}}.$$

取正整数 n_4, $n_4 \geqslant n_3$, 使得当 $n \geqslant n_4$ 和 $z \bar{\in} \Omega(\tilde{z}_{vn})\ (1 \leqslant v \leqslant p)$ 时，有

$$|f(z)-f(\tilde{z}_{vn})| \leqslant e^{-\frac{\delta}{2\times 8\times 18\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma T(R_n,f)}}. \tag{3.116}$$

另外根据 (3.114) 式，判定 $\Omega(\tilde{z}_{vn}) \subset \Omega(z_{vn})$. 于是点 $\tilde{z}_{vn}$ 是 $\Omega(z_{vn})$ 的内点，因此，当 $v \neq v'$ 时，根据 (3.108) 和 (3.112) 式有

$$|f(\tilde{z}_{vn})-f(\tilde{z}_{v'n})| = |f(\tilde{z}_{vn})-a_v+a_v-a_{v'}+a_{v'}-f(\tilde{z}_{v'n})|$$

$$\geqslant |a_v-a_{v'}|-|f(\tilde{z}_{vn})-a_v|-|a_{v'}-f(\tilde{z}_{v'n})| \geqslant \frac{d}{2}. \tag{3.117}$$

以及根据 (3.107) 和 (3.112) 式有

$$|f(\tilde{z}_{vn})| \leqslant |f(\tilde{z}_{vn})-a_v|+|a_v| \leqslant \frac{d}{4}+|a|,$$

$$(1 \leqslant v \leqslant p). \tag{3.118}$$

我们在 $\Omega(\tilde{z}_{vn})$ 内，自 $\tilde{z}_{vn}$ 点始向圆周 $|z| = R_n e^{h-4\sigma}$ 引一条简单连续曲线 L_{vn}，记 L_{vn} 介于 L_{vn} 与圆周 $|z| = Re^{\tau\sigma}$ 的最后一个交点和与圆周 $|z| = R_n e^{\tau\sigma+5\pi}$ 的第一个交点间的部分为 l_{vn}. 如此得到 p 条曲线 $l_{vn}\ (v=1,\cdots,p)$ 分割圆环 $\Gamma_n: R_n e^{\tau\sigma} \leqslant |z| \leqslant R_n e^{\tau\sigma+5\pi}$ 成 p 个域 $\Omega_{mn}\ (m=1,\cdots,p)$. 设 $\Omega_{mn}\ (1 \leqslant m \leqslant p)$ 的边界位在 Γ_n 内部分

为 l_{vn} 和 $l_{v'n}$, 则根据 (3.117) 和 (3.118) 式, 应用定理 3.2, 我们判定

$$\left\{\frac{d}{4}+|a|+N\right\}\left\{\varepsilon_1^{\frac{1}{3}}+\varepsilon_2^{\frac{1}{3}}\right\}\geqslant\frac{d}{2},$$

其中 N 表示 $|f(z)|$ 在 $\tilde{\Omega}_{mn}$ 上的最大值, 以及根据 (3.116) 式有

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=e^{-\frac{\delta}{2\times 8\times 18\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma T(R_n,f)}}.$$

因此在 $\overline{\Omega}_{mn}$ 上存在点 z'_{mn}, $R_n e^{\tau\sigma}\leqslant|z'_{mn}|\leqslant R_n e^{\tau\sigma+5\pi}$, 使得

$$|f(z'_{mn})|=N\geqslant\frac{d}{4}e^{\frac{\delta}{3\times 16\times 18\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma}T(R_n,f)}-\frac{d}{4}-|a|.$$

取正整数 n_5, $n_5>n_4$ 使得当 $n\geqslant n_5$ 时, 有

$$|f(z'_{mn})|\geqslant e^{\frac{\delta}{2\times 48\times 18\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma}T(R_n,f)},$$

以及

$$e^{\frac{\delta}{4\times 48\times 36\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma}T(R_n,f)}>\max\left\{16,\frac{d}{4}+|a|\right\}. \tag{3.119}$$

在区间 $\left[e^{\frac{\delta}{4\times 48\times 36\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma}T(R_n,f)}, e^{\frac{\delta}{2\times 48\times 36\times 32\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\tau-1)}T(R_n,f)}\right]$ 内存在值 A', 使得 $f'(z)$ 在等位线 $|f(z)|=A'$ 上无零点, 即等位线是解析的. 考虑集合

$$\Omega(A')\coloneqq E\{z\,|\,|f(z)|>A'\}, \tag{3.120}$$

并且记 $\Omega(A')$ 位在圆 $|z|<R_n e^{h-4\sigma}$ 内部分且含有点 z'_{mn} 的连通分支为 $\Omega(z'_{mn})$. 我们应用 Poisson-Jensen 公式导出

$$\log M(t_n,f)\leqslant\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}m(R_n e^{h_1},f)\leqslant\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}T(R_n e^{h_1},f),$$

进一步根据 (3.110) 式得到

$$\log M(t_n, f) \leqslant \frac{e^\sigma + 1}{e^\sigma - 1} 2e^{h_1(1+\frac{h_1}{h})^\mu} T(R_n, f).$$

再结合(3.115)和(3.120)式，判定 $\overline{\Omega}(z'_{mn})$ 与圆周 $|z| = t_n$ 无交. 于是根据最大模原理，$\overline{\Omega}(z'_{mn})$ 与圆周 $|z| = R_n^{h-4\sigma}$ 必有交，并且交集中含有内点. 另一方面，根据 (3.120)，(3.119) 和 (3.112) 式，我们判定 $\Omega(z'_{mn})$ 与 $\Omega(z_{vn})$ 和 $\Omega(z_{v'n})$ 均无交. 于是 $\Omega(z'_{mn})$ 必介于 $\Omega(z_{vn})$ 和 $\Omega(z_{v'n})$ 之间，以及 $2p$ 个域 $\{\Omega(z_{vn})\}$ 和 $\{\Omega(z'_{mn})\}$ 彼此均无交. 我们对这 $2p$ 个域予以一个新的统一编号：$\Omega(z''_{kn})$ $(n \geqslant n_5, k = 1, 2, \cdots, 2p)$. 记圆周 $|z| = t$ 位在 $\Omega(z''_{kn})$ 内部分为 θ_{kt}，其线性测度为 $t\theta_k(t)$. 我们应用定理 3.1，当 z''_{kn} 表示某个点 z_{vn} 时，有

$$\pi \int_{2R_n e^\sigma}^{\frac{1}{2}R_n e^{h-4\sigma}} \frac{dt}{t\theta_k(t)} \leqslant \log\left\{\frac{72 \times 64\sqrt{2}}{\delta} \cdot \frac{e^\sigma + 1}{e^\sigma - 1}\right\} + h\left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mu^{1)};$$

当 z''_{kn} 表示某个点 z'_{mn} 时，有

$$\frac{\delta}{2 \times 48 \times 18 \times 32\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma} T(R_n, f) \leqslant \log|f(z'_{mn})|$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2 \times 48 \times 36 \times 32\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}(\tau-1)\sigma} T(R_n, f) + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z'_{mn}|}^{\frac{1}{2}R_n e^{h-4\sigma}} \frac{dt}{t\theta_k(t)}} \log M(R_n e^{h-4\sigma}, f).$$

---

1) 参见 (3.105) 式.

注意到 $|z'_{mn}| \leqslant R_n e^{\tau\sigma+5\pi}$, 以及根据 Poisson - Jensen 公式和 (3.109) 式有

$$\log M(R_n e^{h-4\sigma}, f) \leqslant \frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1} T(R_n e^{h-3\sigma}, f)$$

$$\leqslant \frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1} T(R_n e^{h}, f) \leqslant \frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1} \cdot 2e^{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu} T(R_n, f),$$

则得到

$$\pi \int_{2R_n e^{\tau\sigma+5\pi}}^{\frac{1}{2}R_n e^{h-4\sigma}} \frac{dt}{t\theta_k(t)}$$

$$\leqslant \log\left\{\frac{72\times 32\times 36\times 48}{\delta} \cdot \frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right\} + h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\mu,$$

$$1 \leqslant k \leqslant 2p.$$

最后,根据不等式

$$(2p)^2 = \left\{\sum_{k=1}^{2p} \sqrt{\theta_k(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta_k(t)}}\right\}^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{2p} \theta_k(t) \cdot \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{\theta_k(t)} \leqslant 2\pi \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{\theta_k(t)},$$

我们导出

$$\frac{4p^2}{2} \int_{2R_n e^{\tau\sigma+5\pi}}^{\frac{1}{2}R_n e^{h-4\sigma}} \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{2p} \pi \int_{2R_n e^{\tau\sigma+5\pi}}^{\frac{1}{2}R_n e^{h-4\sigma}} \frac{dt}{t\theta_k(t)}$$

$$\leqslant 2p\log\left\{\frac{72\times 32\times 36\times 48}{8} \cdot \frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right\}$$

$$+ 2ph\left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mu,$$

$$p(h - \tau\sigma - 5\pi - \log 4)$$

$$\leqslant \log\left\{\frac{72 \times 32 \times 36 \times 48}{8} \cdot \frac{e^{\sigma} + 1}{e^{\sigma} - 1}\right\} + h\left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mu.$$

由于 h 可以取任意大，所以必有 $p \leqslant \mu$, 即定理 3.9 得证.

§ 3.5. Edrei – Fuchs 定理

3.5.1 某些准备

变换

$$\zeta = \zeta(z) = \frac{z^{\frac{\pi}{2\theta}} - R^{\frac{\pi}{2\theta}}}{z^{\frac{\pi}{2\theta}} + R^{\frac{\pi}{2\theta}}}, \quad 0 < \theta \leqslant \pi, 0 < R < +\infty \tag{3.121}$$

将区域 $\Omega(-\theta, \theta)$ 变为 ζ 平面上的单位圆 $|\zeta| < 1$, 点 $z = R$ 变为原点 $\zeta = 0$.

引理 3.11 在 (3.121) 式的变换下，$\overline{\Omega}(-\theta + \varepsilon, \theta - \varepsilon; R_1, R_2)$ $(0 < \varepsilon < \theta, R_1 \leqslant R \leqslant R_2)$ 在 ζ 平面上的像域必定含于圆 $|\zeta| \leqslant \rho$ 内，而

$$\rho = 1 - \frac{\varepsilon}{2\theta}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}, \tag{3.122}$$

圆 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}(1 + \rho)$ 在 z 平面上的原像必定含于 $\overline{\Omega}(-\theta, \theta; R'_3, R_3)$

内，而

$$R_3' = \left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 R_1,$$

$$R_3 = \left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 R_2, \tag{3.123}$$

以及当 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}(1+\rho)$ 时，有

$$\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 R_1 \leqslant |z'(\zeta)|$$

$$\leqslant \frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 R_2, \tag{3.124}$$

其中 $z = z(\zeta)$ 表示 (3.121) 式的逆变换.

证． 设 $z = re^{i\varphi} \in \overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_1, R_2)$，则有

$$|\zeta| = \left|\frac{r^{\frac{\pi}{2\theta}} e^{i\frac{\varphi\pi}{2\theta}} - R^{\frac{\pi}{2\theta}}}{r^{\frac{\pi}{2\theta}} e^{i\frac{\varphi\pi}{2\theta}} + R^{\frac{\pi}{2\theta}}}\right|$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4R^{\frac{\pi}{2\theta}} r^{\frac{\pi}{2\theta}} \cos\frac{\varphi\pi}{2\theta}}{r^{\frac{\pi}{\theta}} + R^{\frac{\pi}{\theta}} - 2R^{\frac{\pi}{2\theta}} r^{\frac{\pi}{2\theta}} \cos\frac{\varphi\pi}{2\theta}}}.$$

注意到

$$r^{\frac{\pi}{\theta}} + R^{\frac{\pi}{\theta}} + 2R^{\frac{\pi}{2\theta}} r^{\frac{\pi}{2\theta}} \cos\frac{\varphi\pi}{2\theta} \leqslant 4R_2^{\frac{\pi}{\theta}},$$

$$4R^{-\frac{\pi}{2\theta}}r^{\frac{\pi}{2\theta}}\cos\frac{\varphi\pi}{2\theta}\geqslant 4R_1^{-\frac{\pi}{\theta}}\sin\frac{\varepsilon\pi}{2\theta}\geqslant\frac{4\varepsilon}{\theta}R_1^{-\frac{\pi}{\theta}},$$

则得

$$|\zeta|\leqslant\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\theta}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}}\leqslant 1-\frac{\varepsilon}{2\theta}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}=\rho,$$

即 (3.122) 式得证.

另一方面，(3.121) 式的逆变换为

$$z=z(\zeta)=R\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}},$$

则当 $|\zeta|\leqslant\frac{1}{2}(1+\rho)$ 时，有

$$|z|\leqslant R\left(\frac{4}{1-p}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\leqslant\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 R_2=R_3,$$

以及

$$|z|\geqslant R\left(\frac{1-\rho}{4}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\geqslant\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 R_1=R_3',$$

即 (3.123) 式得证.

最后，根据表达式

$$z'(\zeta)=\frac{4\theta}{\pi}R\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\cdot\frac{1}{1-\zeta^2},$$

则当 $|\zeta|\leqslant\frac{1}{2}(1+\rho)$ 时，有

$$|z'(\zeta)| \leqslant \frac{4\theta}{\pi} R_2 \left(\frac{4}{1-\rho} \right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \frac{2}{1-\rho}$$

$$= \frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{8\theta}{\varepsilon} \right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_2$$

以及

$$|z'(\zeta)| \geqslant \frac{4\theta}{\pi} R_1 \left(\frac{1-\rho}{4} \right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{8\theta} \right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 R_1.$$

即 (3.124) 式得证.

引理3.12 设$f(z)$是单位圆$|z| \leqslant 1$上的亚纯函数，值r, t, R和H适合条件:$0 < 4eH < r < t \leqslant R < 1$. 再设$(\gamma)$是相应于这$n(1, f=0) + \bar{n}(1, f=\infty)$个点及数$H$的欧氏除外圆，则当$z$位在圆$|z| \leqslant r$内且在圆$(\gamma)$外时有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{R+r}{R-r} m\left(R, \frac{f'}{f}\right) - \frac{R-r}{R+r} m\left(R, \frac{f}{f'}\right)$$

$$+ \{n(1, f=0) + \bar{n}(1, f=\infty)\} \log \frac{2}{H}$$

$$- \frac{(R-t)^2}{4R^2} n(t, f'=0).$$

证. 我们用a_i表示$f(z)$的零点，b_j表示$f(z)$的极点和c_k表示$f'(z)$的零点，则对圆$|z| < R$内的任意点$z = r'e^{i\varphi}$，根据 Poisson -

Jensen 公式有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f'(Re^{i\theta})}{f(Re^{i\theta})}\right|\frac{R^2-r'^2}{R^2-2Rr'\cos(\theta-\varphi)+r'^2}d\theta$$

$$+\left\{\sum_{|a_i|<R}{}'\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_iz}{R(z-a_i)}\right|+\sum_{|b_j|<R}{}'\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_jz}{R(z-b_j)}\right|\right\}$$

$$-\left\{\sum_{|c_k|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{c}_kz}{R(z-c_k)}\right|-\sum_{|a_i|<R}{}''\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_iz}{R(z-a_i)}\right|\right\},$$

其中 $\sum'_{|b_j|<R}$ 表示每个 b_j 仅仅计算一次；$\sum'_{|a_i|<R}$ 表示每个 a_i 仅仅计算一次以及 $\sum''_{|a_i|<R}$ 表示每个 a_i 计算 m_i-1 次 (m_i 是 a_i 的重值极). 于是

$$\sum_{|a_i|<R}{}'\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_iz}{R(z-a_i)}\right|+\sum_{|a_i|<R}{}''\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_iz}{R(z-a_i)}\right|$$

$$=\sum_{|a_i|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_iz}{R(z-a_i)}\right|,$$

以及

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f'(Re^{i\theta})}{f(Re^{i\theta})}\right|\frac{R^2-r'^2}{R^2-2Rr'\cos(\theta-\varphi)+r'^2}d\theta$$

$$+\sum_{|a_i|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_iz}{R(z-a_i)}\right|+\sum_{|b_j|<R}{}'\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_jz}{R(z-b_j)}\right|$$

$$-\sum_{|c_k|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{c}_k z}{R(z-c_k)}\right|. \tag{3.125}$$

进一步，当点 z 位在圆 $|z|\leqslant r$ 内且在圆 (γ) 外时，有

$$\sum_{|a_i|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_i z}{R(z-a_i)}\right|+\sum_{|b_j|<R}{}'\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_j z}{R(z-b_j)}\right|$$

$$\leqslant\sum_{|a_i|<R}\log\frac{2}{|z-a_i|}+\sum_{|b_j|<R}{}'\log\frac{2}{|z-b_j|}$$

$$\leqslant\{n(1,f=0)+\bar{n}(1,f=\infty)\}\log\frac{2}{H}.$$

另一方面，当 $|z|\leqslant r$ 时，有

$$\sum_{|c_k|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{c}_k z}{R(z-c_k)}\right|\geqslant\sum_{|c_k|<t}\log\left|\frac{R^2-\bar{c}_k z}{R(z-c_k)}\right|$$

$$\geqslant\sum_{|c_k|<t}\log\left|\frac{R^2+|z||c_k|}{R(|z|+|c_k|)}\right|$$

$$=\sum_{|c_k|<t}\log\left\{1+\frac{(R-|z|)(R-|c_k|)}{R(|z|+|c_k|)}\right\}$$

$$\geqslant n(t,f'=0)\log\left\{1+\frac{(R-t)^2}{2R^2}\right\}$$

$$\geqslant n(t,f'=0)\frac{(R-t)^2}{4R^2}.$$

因此，当点 $z=r'e^{i\varphi}$ 位在圆 $|z|\leqslant r$ 内且在圆 (γ) 外时，(3.125) 式给出

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{R+r'}{R-r'}m\left(R,\frac{f'}{f}\right)-\frac{R-r'}{R+r'}m\left(R,\frac{f}{f'}\right)$$

$$+\{n(1,f=0)+\bar{n}(1,f=\infty)\}\log\frac{2}{H}$$

$$-\frac{(R-t)^2}{4R^2}n(t,f'=0)$$

$$\leqslant\frac{R+r}{R-r}m\left(R,\frac{f'}{f}\right)-\frac{R-r}{R+r}m\left(R,\frac{f}{f'}\right)$$

$$+\{n(1,f=0)+\bar{n}(1,f=\infty)\}\log\frac{2}{H}$$

$$-\frac{(R-t)^2}{4R^2}n(t,f'=0),$$

即引理 3.12 得证.

现在我们证明一个在以后应用上起十分重要作用的引理:

引理 3.13[43i] 设$f(z)$是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数,其级 $\lambda<+\infty$,并且满足条件:

(1) 在 $\bar{\Omega}(-\theta,\theta)$ $(0<\theta\leqslant\pi)$ 上有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\{\bar{\Omega}(-\theta,\theta;r),f=X\}}{\log r}\leqslant\lambda'<+\infty,$$

$$X=0,\ \infty. \tag{3.126}$$

(2) 对于取定的某个数 ε, $0<\varepsilon<\theta$, 存在序列 $\{R_n\}$, 使得集合

$$E_n=E\left\{z\left|\log\frac{1}{|f(z)-a|}\geqslant N_n,\right.\right.$$

$$\left.|z|=R_n,\ -\theta+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta-\varepsilon\right\} \tag{3.127}$$

的线性测度 mes $E_n\geqslant\alpha R_n\left(\alpha\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 其中 a 是一个不为 0 和 ∞ 的复

数，$N_n>0$是一个实数，且有

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{6+2(\lambda'+\eta_0)+\frac{3\pi}{\theta}}R_{n2}^{\lambda'+2\eta_0}\log R_{n2}\right\}N_n^{-1}=0,\tag{3.128}$$

其中$\eta_0>0$是某个取定的实数，以及$R_{n1}\leqslant R_n\leqslant R_{n2}$，$R_{n1}\to+\infty$ $(n\to+\infty)$.

在上述假定之下，只要n充分大，则对位在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_{n1},R_{n2})$上且在一些圆$(\gamma)$外的点$z$有

$$\log\frac{1}{|f(z)-a|}\geqslant\frac{A(\alpha,\varepsilon,\theta)}{B(\theta)\log\dfrac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\varepsilon,\theta)}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}\cdot N_n.$$

其中(γ)的欧氏半径之和不超过$\frac{1}{8}\varepsilon R_{n1}$，$(\gamma)$所含圆的个数为有穷，但依赖于值$n$；$A(\alpha,\varepsilon,\theta)>0$和$C(\alpha,\varepsilon,\theta)<+\infty$是依赖于$\alpha,\varepsilon,\theta$且与$n$无关的常数，以及$B(\theta)<+\infty$是依赖于$\theta$且与$n$无关的常数.

证. 作变换

$$\zeta=\zeta(z)=\frac{z^{\frac{\pi}{2\theta}}-R_n^{\frac{\pi}{2\theta}}}{z^{\frac{\pi}{2\theta}}+R_n^{\frac{\pi}{2\theta}}},$$

则$\Omega(-\theta,\theta)$被映射为ζ平面上的单位圆$|\zeta|<1$，根据引理3.11，我们判定$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_{n1},R_{n2})$在$\zeta$平面上的像域必定含于圆$|\zeta|\leqslant\rho$内，而

$$\rho=1-\frac{\varepsilon}{2\theta}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}.\tag{3.129}$$

圆 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}(1+\rho)$ 在 z 平面上的原像必定含于 $\overline{\Omega}(-\theta, \theta; R_{n3})$ 内，而

$$R_{n3} = \left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^2 R_{n2}, \tag{3.130}$$

以及当 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}(1+\rho)$ 时，有

$$\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^2 R_{n1} \leqslant |z'(\zeta)|$$

$$\leqslant \frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_{n2}.$$

我们继续作变换 $\xi = \frac{2\zeta}{1+\rho}$，则圆 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}(1+\rho)$ 变为 ξ 平面上的单位圆 $|\xi| \leqslant 1$，以及圆 $|\zeta| \leqslant \rho$ 变为圆 $|\xi| \leqslant \tau$，而

$$\tau = \frac{2\rho}{1+\rho}, \tag{3.131}$$

并且当 $|\xi| \leqslant 1$ 时有

$$\frac{1}{2} \leqslant |\zeta'(\xi)| \leqslant 1,$$

$$\frac{\theta}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^2 R_{n1} \leqslant |z'(\xi)| = |z'(\zeta)|\,|\zeta'(\xi)|$$

$$\leqslant \frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_{n2}\,. \tag{3.132}$$

设 E_ξ 表示 E_n 在 ξ 平面上的像集合，则 E_ξ 位在圆 $|\xi| \leqslant \tau$ 内，并且分布在虚轴上，以及有

$$\alpha R_n \leqslant \text{mes}\, E_n = \int_{E_n} |dz| = \int_{E_\xi} |z'(\xi)|\,|d\xi|$$

$$\leqslant \frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_{n2}\,\text{mes}\, E_\xi,$$

$$\text{mes}\, E_\xi \geqslant \frac{\pi\alpha}{2\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} \frac{R_{n1}}{R_{n2}}$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon\pi}{4\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}} \tag{3.133}$$

置 $F(\xi) = f(z(\xi))$，则 $F(\xi)$ 在单位圆 $|\xi| \leqslant 1$ 上亚纯，并且根据 (3.129) 和 (3.130) 式，对任意取定的数 $\eta, 0 < \eta \leqslant \eta_0$，存在值 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$n(1, F = X) \leqslant n\{\Omega(-\theta, \theta; R_{n3}), f = X\}$$

$$\leqslant A(\varepsilon, \theta)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2(\lambda' + \eta)} R_{n2}^{\lambda' + \eta}, \quad X = 0, \infty, \tag{3.134}$$

其中 $A(\varepsilon, \theta) < +\infty$ 是依赖于 ε, θ 且与 n 无关的常数. 我们以 $F(\xi)$ 位在圆 $|\xi| < 1$ 内的每个零点和极点为心，以 $\dfrac{1}{n(1, F=0) + n(1, F=\infty)} \cdot \dfrac{1-\tau}{4\times 32}$ 为半径作圆. 记其全体为 $(\gamma)_1$，则 $(\gamma)_1$ 的半径和不超过 $\dfrac{1-\tau}{4\times 32}$. 于是在区间 $\left[\dfrac{1}{4}(3+\tau), \dfrac{1}{8}(7+\tau)\right]$ 中存在值 t_1，以及在区间 $\left[\dfrac{1}{16}(15\right.$

$+\tau), \frac{1}{32}(31+\tau)\Big]$ 中存在值 t_2, 使得两个圆周 $|\xi|=t_1$ 和 $|\xi|=t_2$ 均不与 $(\gamma)_1$ 相交.再设 $(\gamma)_2$ 是相应于这 $n(1, F=0)+\bar{n}(1, F=\infty)$ 个点及数 H_2 的欧氏除外圆.取

$$H_2=\frac{1}{8e}\cdot\frac{\varepsilon\pi}{4\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}, \tag{3.135}$$

则根据引理 3.12, 当点 ξ 位在圆 $|\xi|\leqslant\frac{1}{2}(1+\tau)$ 内且在圆 $(\gamma)_2$ 外时,有

$$\begin{aligned}
\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| &\leqslant \frac{R+\frac{1+\tau}{2}}{R-\frac{1+\tau}{2}}m\left(R, \frac{F'}{F}\right) \\
&\quad -\frac{R-\frac{1+\tau}{2}}{R+\frac{1+\tau}{2}}m\left(R, \frac{F}{F'}\right) \\
&\quad +\{\bar{n}(1, F=\infty)+n(1, F=0)\}\log\frac{2}{H_2} \\
&\quad -\frac{(R-t)^2}{4R^2}n(t, F'=0) \\
&\leqslant \frac{4}{2R-(1+\tau)}m\left(R, \frac{F'}{F}\right) \\
&\quad -\frac{2R-(1+\tau)}{4}m\left(R, \frac{F}{F'}\right)
\end{aligned}$$

$$+\{n(1,F=\infty)+n(1,F=0)\}\log\frac{2}{H_2}$$

$$-\frac{(R-t)^2}{4R^2}n(t,F'=0), \tag{3.136}$$

其中$\frac{1+\tau}{2}<t\leqslant R<1$.

以下,对于任意取定的值R, $\frac{1+\tau}{2}<t\leqslant R\leqslant\frac{31+\tau}{32}$,并且圆周$|\xi|=R$与圆$(\gamma)_1$无交,我们估计$m\left(R,\frac{F'}{F}\right)$. 设圆周$|\xi|=R$在$z$平面上的原像为$\Gamma$, β_ξ表示$F(\xi)$在圆$|\xi|<1$内的一个零点或极点,β_ξ在z平面上的原像为β, l是β到Γ的最短连线,以及l在ξ平面上的像为l_ξ. 注意到圆周$|\xi|=R$位在圆$(\gamma)_1$外,所以我们有

$$\operatorname{mes} l=\int_l|dz|=\int_{l_\xi}|z'(\xi)||d\xi|$$

$$\geqslant\min_{|\xi|<1}|z'(\xi)|\frac{1}{n(1,F=0)+n(1,F=\infty)}\cdot\frac{1-\tau}{4\times32}.$$

进一步根据(3.129), (3.131), (3.132)和(3.134)式判定

$$\operatorname{mes} l\geqslant A(\varepsilon,\theta)\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}+3(\lambda_\prime+\eta)}R_{n1}^{1-(\lambda_\prime+\eta)},$$

其中$A(\varepsilon,\theta)>0$是依赖于ε,θ且与n无关的常数. 明显地,在z平面上,$f(z)$的任何一个零点和极点到Γ的距离$\geqslant\operatorname{mes} l$, 现在,我们应用(1.35)式,置其中的$r=R_{n3}$, $\rho'=2R_{n3}$, 则当$z\in\Gamma$时,有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\log^+(2R_{n1})+2\log^+\frac{1}{R_{n3}}$$

$$+\log^+ T(2R_{n2},f)+\log^+\frac{n(2R_{n3})}{R_{n1}}$$

$$+\log\left\{\frac{1}{A(\varepsilon,\theta)}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}+3(\lambda\prime+\eta)}R_{n_1}^{\lambda\prime+\eta-1}\right\}+O(1),$$

其中

$$n(2R_{n3})=n(2R_{n3},f=0)+n(2R_{n3},f=\infty)$$

$$\leqslant\frac{1}{\log 2}\left\{N\left(4R_{n3},\frac{1}{f}\right)+N(4R_{n3},f)\right\}$$

$$\leqslant\frac{2}{\log 2}T(4R_{n3},f)+O(1).$$

注意到$f(z)$的级$\lambda<+\infty$，则当n充分大时，有

$$T(4R_{n3},f)\leqslant(4R_{n3})^{\lambda+1}. \tag{3.137}$$

于是存在值$n_1\geqslant n_0$，使得$n\geqslant n_1$和$z\in\Gamma$时，有

$$\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant A(\theta)\log R_{n3} \tag{3.138}$$

其中$A(\theta)<+\infty$是依赖于θ且与n无关的常数．因此，我们判定

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{|\xi|=R}\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right||d\xi|\leqslant A(\theta)\log R_{n3}.$$

进一步，根据等式

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}=\frac{f'(z)}{f(z)}z'(\xi).$$

我们得到

$$m\left(R,\frac{F'}{F}\right)\leqslant\frac{1}{2\pi R}\int_{|\xi|=R}\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right||d\xi|$$

$$+\frac{1}{2\pi R}\int_{|\xi|=R}\log^+|z'(\xi)||d\xi|,$$

再根据 (3.130) 和 (3.132) 式判定

$$m\left(R,\frac{F'}{F}\right)\leqslant A(\theta)\log R_{n3}$$

$$+\log\left\{\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_{n2}\right\}$$

$$\leqslant A(\theta)\log\left\{\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2}\cdot R_{n2}\right\}$$

$$+\log\left\{\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_{n2}\right\}.$$

取充分大的值 $n_2\geqslant n_1$, 使得当 $n\geqslant n_2$ 和圆周 $|\xi|=R\left(\frac{1+\tau}{2}<t\leqslant R\leqslant\frac{31+\tau}{32}\right)$ 与圆 $(\gamma)_1$ 无交时, 有

$$m\left(R,\frac{F'}{F}\right)\leqslant A(\theta)\log R_{n2}, \tag{3.139}$$

其中 $A(\theta)<+\infty$ 是依赖于 θ 且与 n 无关的常数.

在以下的讨论中，我们区分两种情况进行：

$$(1)\, n(t_1, F'=0) > \left\{\log\left[\frac{32e\theta}{\alpha\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}\right]\right\}^{-1}$$

$$\times\left\{\frac{\alpha}{16\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{4\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{\pi}{\theta}}N_n\right\}. \qquad (3.140)$$

$$(2)\, n(t_1, F'=0) \leqslant \left\{\log\left[\frac{32e\theta}{\alpha\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}\right]\right\}^{-1}$$

$$\times\left\{\frac{\alpha}{16\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{\pi}{\theta}}N\right\}. \qquad (3.141)$$

首先考虑情况(1)，根据(3.134)，(3.135)，(3.136)，(3.139)和(3.140)式，对位在圆 $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(1+\tau)$ 内且在圆 $(\gamma)_2$ 外的点 ξ，有

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| \leqslant \frac{t_2+\frac{1+\tau}{2}}{t_2-\frac{1+\tau}{2}} m\left(t_2, \frac{F'}{F}\right)$$

$$+\{n(1, F=\infty)+n(1, F=0)\}\log\frac{2}{H}$$

$$-\frac{(t_2-t_1)^2}{4t_1{}^2} n(t, F'=0)$$

$$\leqslant \frac{2}{t_2 - \frac{1+\tau}{2}} A(\theta)\log R_{n2}$$

$$+ 2A(\varepsilon, \theta)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2(\lambda' + \eta)} R_{n2}^{\lambda' + \eta}$$

$$\times \log\left\{\frac{64e\theta}{\varepsilon\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}\right\}$$

$$- \frac{(t_2 - t_1)^2}{4}\left\{\log\left[\frac{32e\theta}{2\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}\right]\right\}^{-1}$$

$$\times \left\{\frac{\alpha}{16\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{4\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{\pi}{\theta}} N_n\right\}.$$

注意到

$$t_2 - \frac{1+\tau}{2} \geqslant \frac{15+\tau}{16} - \frac{1+\tau}{2}$$

$$\geqslant \frac{7}{32}(1-\rho) = \frac{7}{32} \cdot \frac{\varepsilon}{2\theta}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}},$$

$$t_1 - t_2 \geqslant \frac{15+\tau}{16} - \frac{7+\tau}{8}$$

$$\geqslant \frac{1}{32}(1-\rho) = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2\theta}\right)\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}},$$

则得

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| \leqslant \frac{2\times 64\theta}{7\varepsilon}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}} A(\theta)\log R_{n2}$$

$$+ 2A(\varepsilon,\theta)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2(\lambda'+\eta)} R_{n2}^{\lambda'+\eta}$$

$$\times \log\left\{\frac{64e\theta}{\varepsilon\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}\right\}$$

$$-\left(\frac{\varepsilon}{4\times 32\theta}\right)^{2}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{2\pi}{\theta}}$$

$$\times\left\{\log\left[\frac{32e\theta}{\alpha\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right]\right\}^{-1}$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon}{16\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{4\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{\pi}{\theta}} N_n\right\}.$$

进一步根据条件 (3.128) 式，存在 $n_3 \geqslant n_2$，使得当 $n \geqslant n_3$ 和点 ξ 位在圆 $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(1+\tau)$ 内且在圆 $(\gamma)_2$ 外时，有

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| \leqslant -\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{\pi}{\theta}} N_n, \tag{3.142}$$

其中 $A(\alpha,\theta,\varepsilon)>0$ 和 $C(\alpha,\varepsilon,\theta)<+\infty$ 是依赖于 $\alpha,\theta,\varepsilon$ 且与 n 无关的常数，$B(\theta)<+\infty$ 是依赖于 θ 且与 n 无关的常数.

其次，我们考虑情况 (2). 根据 (3.134), (3.135), (3.136)

和 (3.139) 式，对位在圆 $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(1+\tau)$ 内且在圆 $(\gamma)_2$ 外的点 ξ，有

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| \leqslant \frac{t_1+\frac{1+\tau}{2}}{t_1-\frac{1+\tau}{2}} m\left(t_1, \frac{F'}{F}\right)$$

$$-\frac{t_1-\frac{1+\tau}{2}}{t_1+\frac{1+\tau}{2}} m\left(t_1, \frac{F}{F'}\right)$$

$$+\{n(1, F=\infty)+n(1, F=0)\}\log\frac{2}{H_2}$$

$$\leqslant \frac{4}{2t_1-(1+\tau)} A(\theta)\log R_{n2}$$

$$-\frac{2t_1-(1+\tau)}{4} m\left(t_1, \frac{F}{F'}\right)$$

$$+2A(\varepsilon, \theta)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2(\lambda'+\eta)} R_{n2}^{\lambda'+\eta}$$

$$\times \log\left\{\frac{64e\theta}{\varepsilon\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}\right\}.$$

注意到

$$t_1-\frac{1+\tau}{2} \geqslant \frac{3+\tau}{4}-\frac{1+\tau}{2}$$

$$\geqslant \frac{1}{8}(1-\rho)=\frac{1}{8}\cdot\frac{\varepsilon}{2\theta}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}, \tag{3.143}$$

则得

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| \leqslant \frac{32\theta}{\varepsilon}A(\theta)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}$$

$$\times \log R_{n2} - \frac{\varepsilon}{32\theta}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}} m\left(t_1, \frac{F}{F'}\right)$$

$$+ 2A(\varepsilon, \theta)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2(\lambda'+\eta)} R_{n2}^{\lambda'+\eta}$$

$$\times \log\left\{\frac{64e\theta}{\varepsilon\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}\right\}.$$

取充分大的值$n_4 \geqslant n_3$，使得当$n \geqslant n_4$和当ξ位在圆$|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(1+\tau)$内且在圆$(\gamma)_2$外有

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| \leqslant A(\theta, \varepsilon)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2(\lambda'+\eta)+\frac{\pi}{\theta}} R_{n2}^{\lambda'+2\eta}$$

$$-\frac{\varepsilon}{32\theta}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}} m\left(t_1, \frac{F}{F'}\right). \tag{3.144}$$

以下，我们估计$m\left(t_1, \frac{F}{F'}\right)$. 设$(\gamma)_3$是相应于这$n(t_1, F'=0)$个点及数$H_3$的欧氏除外圆. 取

$$H_3 = \frac{1}{8e}\cdot \operatorname{mes} E_\xi \geqslant \frac{1}{8e}\cdot\frac{2\pi}{2\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n3}}{R_{n2}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}} \tag{3.145}$$

和记 E_ξ 位在圆 $(\gamma)_3$ 外的部分为 $\tilde{E}_\xi$，则有

$$\operatorname{mes}\tilde{E}_\xi \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes}E_\xi \geqslant \frac{2\pi}{4\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n3}}{R_{n2}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}} \tag{3.146}$$

以及当 $\xi\in\tilde{E}_\xi$ 时，根据 Poisson - Jensen 公式和 (3.129) 和 (3.131) 式有

$$\begin{aligned}\log^+\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right| &\leqslant \frac{t_1+\dfrac{1+\tau}{2}}{t_1-\dfrac{1+\tau}{2}}m\left(t_1,\frac{F}{F'}\right)\\ &\quad + n(t_1,F'=0)\log\frac{2}{H_3}\\ &\leqslant \frac{32\theta}{\varepsilon}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}m\left(t_1,\frac{F}{F'}\right)\\ &\quad + n(t_1,F'=0)\log\frac{2}{H_3}.\end{aligned}$$

进一步得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi R_n}\int_{\tilde{E}_\xi}\log^+\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right||z'(\xi)||d\xi|\\ &\leqslant\left\{\frac{32\theta}{\varepsilon}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}m\left(t_1,\frac{F}{F'}\right)\right.\\ &\quad\left.+n(t_1,F'=0)\log\frac{2}{H_3}\right\}\frac{1}{2\pi R_n}\int_{\tilde{E}_\xi}|z'(\xi)||d\xi|.\end{aligned}$$

记 $\tilde{E}_\xi$ 在 z 平面上的原像为 $\tilde{E}_n$, 则根据 (3.132) 和 (3.146) 式有

$$2\pi R_n \geqslant \operatorname{mes} \tilde{E}_n = \int_{\tilde{E}_n} |dz| = \int_{\tilde{E}'_\xi} |z'(\xi)|\,|d\xi|$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{4}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{4\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{5+\frac{\pi}{\theta}} R_{n1}. \tag{3.147}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi R_n}\int_{E_\xi} \log^+\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right| |z'(\xi)|\,|d\xi|$$

$$\leqslant \frac{32\theta}{\varepsilon}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}} m\left(t, \frac{F}{F'}\right) + n(t_1, F'=0)\log\frac{2}{H_3},$$

$$m\left(t_1, \frac{F}{F'}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{32\theta}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}$$

$$\times \frac{1}{2\pi R_n}\int_{E_\xi} \log\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right| |z'(\xi)|\,|d\xi|$$

$$-\frac{\varepsilon}{32\theta}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}} n(t_1, F'=0)\log\frac{2}{H_3}. \tag{3.148}$$

再进一步, 根据等式

$$\frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{F(\xi)}{F'(\xi)} z'(\xi),$$

我们导出

$$\frac{1}{2\pi R_n}\int_{E_n} \log^+\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right| |dz|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi R_n}\int_{\Gamma_\xi}\log^+\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right|\cdot|z'(\xi)||d\xi|$$

$$+\frac{1}{2\pi R_n}\int_{\Gamma_\xi}\log^+|z'(\xi)|\cdot|z'(\xi)||d\xi|.$$

注意到(3.132)式，则得

$$\frac{1}{2\pi R_n}\int_{\Gamma_n}\log^+\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right||dz|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi R_n}\int_{\Gamma_\xi}\log^+\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right||z'(\xi)||d\xi|$$

$$+\log\left\{\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_{n2}\right\},$$

$$\frac{1}{2\pi R_n}\int_{\Gamma_\xi}\log\left|\frac{F(\xi)}{F'(\xi)}\right||z'(\xi)||d\xi|$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi R_n}\int_{\Gamma_n}\log\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right||dz|$$

$$-\log\left\{\frac{2\theta}{\pi}\cdot\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_{n2}\right\}. \tag{3.149}$$

现在，从恒等式

$$\frac{1}{f(z)-a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{f(z)}{f'(z)}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)-a}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right\},$$

我们导出

$$\frac{1}{2\pi R_n}\int_{\Gamma_n}\log^+\frac{1}{|f(z)-a|}|dz|$$

$$\leqslant \log^+ \frac{1}{|a|} + \frac{1}{2\pi R_n} \int_{E_n} \log \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| |dz|$$

$$+ m\left(R_n, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right) + \log 2,$$

$$\frac{1}{2\pi R_n} \int_{E_n} \log^+ \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| |dz|$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi R_n} \int_{E_n} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a|} |dz|$$

$$- \left\{ m\left(R_n, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right) + \log^+ \frac{1}{|a|} + \log 2 \right\}.$$

进一步根据 (3.127) 和 (3.147) 式得到

$$\frac{1}{2\pi R_n} \int_{E_n} \log^+ \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| |dz|$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi R_n} \cdot \frac{\alpha}{4} \left(\frac{\varepsilon}{8\theta} \right)^{1+\frac{4\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}} \right)^{5+\frac{\pi}{\theta}} R_{n1} \cdot N_n$$

$$- \left\{ m\left(R_n, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right) + \log^+ \frac{1}{|a|} + \log 2 \right\}$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{8\pi} \left(\frac{\varepsilon}{8\theta} \right)^{1+\frac{4\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}} \right)^{6+\frac{\pi}{\theta}} N_n$$

$$- \left\{ m\left(R_n, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right) + \log^+ \frac{1}{|a|} + \log 2 \right\}. \tag{3.150}$$

我们应用引理 1.3，置其中的 $r=R_n, \rho=2R_n$，则有

$$m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right) \leqslant 4\log^+ T(2R_n, f)$$

$$+5\log^+(2R_n)+7\log^+\frac{1}{R_n}+O(1)$$

$$m\left(R_n, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant 4\log^+ T(2R_n, f-a)$$

$$+5\log^+(2R_n)+7\log^+\frac{1}{R_n}+O(1)$$

$$\leqslant 4\log^+ T(2R_n, f)+5\log^+(2R_n)$$

$$+7\log^+\frac{1}{R_n}+O(1).$$

根据$f(z)$的级 $\lambda<+\infty$，则当 n 充分大时，有

$$T(2R_n, f) \leqslant (2R_n)^{\lambda+1} \leqslant (2R_{n2})^{\lambda+1}. \tag{3.151}$$

于是存在值 $n_5 \geqslant n_4$，使得当 $n \geqslant n_5$ 时，有

$$m\left(R_n \frac{f'}{f-a}\right)+m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right)+\log^+\frac{1}{|a|}$$

$$+\log 2 \leqslant A\log R_{n2}, \tag{3.152}$$

其中 $A<+\infty$ 是数字常数.

总结我们对情况(2)的讨论，则(3.141)，(3.145)，(3.148)，(3.149)，(3.150)和(3.152)式给出

$$m\left(t_1, \frac{F}{F'}\right) \geqslant \frac{\alpha}{64\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{2+\frac{4\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{2\pi}{\theta}} N_n$$

$$-\frac{\varepsilon}{32}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}\left\{\log\left[\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_{n2}\right]+A\log R_{n2}\right\},$$

进一步结合(3.144)式得到

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right|\leqslant-\frac{\alpha}{4\times 64\pi}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{3+\frac{4\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n$$

$$+A(\varepsilon,\theta)\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2(\lambda'+\eta)+\frac{\pi}{\theta}}R_{n2}^{\lambda'+2\eta}$$

$$+\left(\frac{\varepsilon}{32\theta}\right)^{2}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{2\pi}{\theta}}$$

$$\times\left\{\log\left[\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_{n2}\right]\right.$$

$$\left.+A\log R_{n2}\right\},$$

再根据条件(3.128)式，存在$n_6\geqslant n_5$，使得当$n\geqslant n_6$和点ξ位在圆$|\xi|\leqslant\frac{1}{2}(1+\tau)$内且在圆$(\gamma)_2$外时，有

$$\log\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right|\leqslant-A(\alpha,\varepsilon,\theta)\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n,\tag{3.153}$$

其中$A(\alpha,\varepsilon,\theta)>0$是依赖于$\alpha,\theta,\varepsilon$而与$n$无关的常数.

当满足情况(1)时有(3.142)，当满足(2)时有(3.153)式，因此，

当 $n \geqslant n_6$ 和点 ξ 位在圆 $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(1+\tau)$ 内且在圆 $(\gamma)_2$ 时，我们恒有

$$\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right| \leqslant \exp\left\{-\frac{A(\alpha, \varepsilon, \theta)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha, \varepsilon, \theta)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}} N_n\right\}, \tag{3.154}$$

其中 $A(\alpha, \theta, \varepsilon)>0, C(\alpha, \theta, \varepsilon)<+\infty$ 是依赖于 $\alpha, \theta, \varepsilon$ 且与 n 无关的常数，$B(\theta)<+\infty$ 是依赖于 θ 且与 n 无关的常数.

根据(3.133)和(3.135)式，我们判定在 E_ξ 上存在点 $\xi_0 \bar{\in} (\gamma)_2$. 设 ξ_0 在 z 平面上的原像为 $z_0 \in E_n$. 对于位在圆 $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(1+\tau)$ 内且在圆 $(\gamma)_2$ 外的任何一点 ξ, 我们用直线连接，若遇圆 $(\gamma)_2$, 则用较小圆周弧取代，如是求得一条连接点 ξ 和点 ξ_0 的曲线 L_ξ, 其长度 $\operatorname{mes} L_\xi \leqslant 2+\pi e H_2 \leqslant 3$. 于是借助于积分，根据(3.154)式，我们有

$$\begin{aligned}
&|\log|F(\xi)|-\log|F(\xi_0)|| \\
&\leqslant |\log F(\xi)-\log F(\xi_0)| = \left|\int_{L_\xi}\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}d\xi\right| \\
&\leqslant \int_{L_\xi}\left|\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\right||d\xi| \\
&\leqslant 3\exp\left\{-\frac{A(\alpha, \theta, \varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha, \theta, \varepsilon)}\right. \\
&\qquad \left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}} N_n\right\},
\end{aligned}$$

$$|F(\xi)| \leqslant |F(\xi_0)|$$

$$\times \exp\left\{3\exp\left[-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\dfrac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right]\right\}.$$

进一步，根据(3.127)式有

$$|F(\xi_0)| = |f(z_0)| \leqslant |f(z_0)-a| + |a| \leqslant e^{-N_n} + |a|.$$

于是我们得到

$$|F(\xi)| \leqslant \{e^{-N_n} + |a|\}$$

$$\times \exp\left\{3\exp\left\{-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\dfrac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right\}\right\}.$$

再根据条件(3.128)式，存在值$n_7 \geqslant n_6$，使得$n \geqslant n_7$和点ξ位在圆$|\xi| \leqslant \dfrac{1}{2}(1+\tau)$内且在圆$(\gamma)_2$外时有

$$|F(\xi)| \leqslant 2|a|.$$

于是，结合(3.154)式，得到

$$|F'(\xi)| \leqslant 2|a|$$

$$\times \exp\left\{-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right\}.$$

再次借助于积分，并根据(3. 127)式，我们导出

$$|F(\xi)-F(\xi_0)|=\left|\int_{L_\xi}F'(\xi)d\xi\right|\leqslant 6|a|$$

$$\times \exp\left\{-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right\},$$

$$|f(z)-a|\leqslant|F(\xi)-F(\xi_0)|+|f(z_0)-a|$$

$$\leqslant 6|a|\exp\left\{-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right\}+e^{-N_n}$$

$$\leqslant 12|a|\exp\left\{-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right\},$$

$$\log\frac{1}{|f(z)-a|}\geqslant\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}$$

$$\times \left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}} \right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}} N_n - \log^+(12|a|).$$

记$(\gamma)_2$在z平面上的原像集合为$(\gamma)'$，我们取$n_8 \geqslant n_7$，使得当$n \geqslant n_8$，以及点z位在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_{n1}, R_{n2})$上且在$(\gamma)'$外时有

$$\log \frac{1}{|f(z)-a|} \geqslant \frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log \dfrac{R_{n2}}{R_{n1}} + C(\alpha,\theta,\varepsilon)} \left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}} \right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}} N_n. \tag{3.155}$$

最后，我们证明$(\gamma)'$必定能被包含在一些圆(γ)内，并且(γ)的半径之和不超过$\frac{1}{8}\varepsilon R_{n1}$. 事实上，考虑$(\gamma)_2$中的一个圆$C_\xi$: $|\xi-\xi_1|<t$，C_ξ在z平面上的原像为C，ξ_1的原像为z_1，则在$\bar{C}$上存在一点z'，使得以点z_1为心，以连接z_1和z'的直线段l'的长度为半径作圆$C' \supset C$. 设z'在ξ平面上的像点为ξ'，连接ξ_1和ξ'的直线段为l'_ξ，l'_ξ在z平面上的像为一条连接z_1和z'的曲线Γ'. 于是根据(3.132)式我们有

$$\operatorname{mes} l' \leqslant \int_{\Gamma'} |dz| = \int_{l'_\xi} |z'(\xi)|\,|d\xi|$$

$$\leqslant \frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{8\theta}{\varepsilon} \right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}} \right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_{n2}\, t.$$

记全体圆(C')为(γ)，则根据(3.135)式，(γ)的半径之和不超过

$$\frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{8\theta}{\varepsilon} \right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}} \right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_{n2}$$

$$\times \frac{1}{4} \frac{\varepsilon\pi}{4\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}} \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon R_{n1}.$$

于是引理3.13完全得证.

在引理3.13中,如果我们进一步假设$f(z)$是一个整函数,则根据(3.129)和(3.131)式,以及$0<\varepsilon<\theta$,我们判定

$$8eH_2=\frac{\varepsilon\pi}{4\theta}\left(\frac{\varepsilon}{8\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon\pi}{4\theta}\cdot\frac{1}{2\pi}\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}=\frac{1}{4}(1-\rho)=\frac{1+\tau}{2}-\tau.$$

于是在区间$\left[\tau, \frac{1}{2}(1+\tau)\right]$中存在值$t_0$,使得圆周$|\xi|=t_0$与圆$(\gamma)_2$无交.因此,根据(3.154)式,我们进一步判定

$$|n(t_0, F=0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=t_0}\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}d\xi\right|$$

$$\leqslant t_0\exp\left\{-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right\}\leqslant t_0<1,$$

即$n(t_0,F=0)=0$,这说明$F(\xi)$在圆$|\xi|\leqslant t_0$上无零点,所以(3.154)式在圆$|\xi|\leqslant t_0$上一致地成立.从而我们可以证明(3.155)式在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_{n1},R_{n2})$上一致地成立.因而我们有下述结果:

引理3.14 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数,其级λ

$<+\infty$, 并且满足条件:

(1) 在 $\overline{\Omega}(-\theta,\theta)$ $(0<\theta\leqslant\pi)$ 上有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^{+}n\{\Omega(-\theta,\theta;r),f=0\}}{\log r}=\lambda'<+\infty,$$

(2) 对于某个取定的数 ε, $0<\varepsilon<\theta$, 存在序列 $\{R_n\}$, 使得集合

$$E_n=E\{z\mid\log\frac{1}{|f(z)-a|}\geqslant N_n,$$

$$|z|=R_n,\quad -\theta+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta-\varepsilon\}$$

的线性测度 $\operatorname{mes}E_n\geqslant\alpha R_n\left(\alpha\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 其中 a 是一个不为 0 和 ∞ 的复数, $N_n>0$ 是一个实数, 且有

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{6+2(\lambda'+\eta_0)+\frac{3\pi}{\theta}}R_{n2}^{\lambda'+2\eta_0}\log R_{n2}\right\}N_n^{-1}=0,$$

其中 $\eta_0>0$ 是某个取定的实数, 以及 $R_{n1}\leqslant R_n\leqslant R_{n2}$, $R_{n1}\to\infty$ $(n\to+\infty)$.

在上述假定之下, 只要 n 充分大, 则对于位在 $\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_{n1},R_{n2})$ 上的点 z 有

$$|f(z)-a|\leqslant\exp\left\{-\frac{A(\alpha,\theta,\varepsilon)}{B(\theta)\log\frac{R_{n2}}{R_{n1}}+C(\alpha,\theta,\varepsilon)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{R_{n1}}{R_{n2}}\right)^{6+\frac{3\pi}{\theta}}N_n\right\},$$

其中 $A(\alpha,\theta,\varepsilon)>0$ 和 $C(\alpha,\theta,\varepsilon)<+\infty$ 是依赖于 $\alpha,\theta,\varepsilon$ 且与 n 无关的

常数，$B(\theta)<+\infty$ 是依赖于 θ 且与 n 无关的常数.

3.5.2. Edrei-Fuchs定理

60年代初期，**A. Edrei-W. Fuchs** 曾经考虑一类具有零点和极点分布在有限条曲线上的亚纯函数.他们对于这类亚纯函数证明了可以用曲线的个数介囿这类函数的非零有穷亏值的个数[15d,e].下述两个定理是他们结果的一种简单形式.

定理3.10 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个 $\lambda(0<\lambda<+\infty)$ 级亚纯函数，$\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2\cdots q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q;\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$ 是 z 平面上的 $q(0\leqslant q<+\infty)$ 条半直线，并且对于任意小的数 $\varepsilon>0$ 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r).\ f=X\right\}^{1)}}{\log r}<\lambda,$$

$$X=0,\infty. \qquad (3.156)$$

如果记 $f(z)$ 的非零有穷亏值数为 p，则有 $p\leqslant q$.

证. 首先考虑 $q=0$ 时的情况.根据(3.156)式，我们有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n(r,f=X)}{\log r}=\lambda'<\lambda,\ X=0,\infty. \qquad (3.157)$$

设 $f(z)$ 具有一个非零有穷亏值 a，其相应亏量 $\delta(a,f)=\delta>0$. 根据恒等式

$$\frac{1}{f(z)-a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{f}{f'}\left(\frac{f'}{f-a}-\frac{f'}{f}\right)$$

---

1) 当 $q=0$ 时，$n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\ \theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}=n(r,f=X)$.

导出

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \log^+ \frac{1}{|a|} + m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$$

$$+ m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \log 2.$$

进一步根据引理 1.3 和 $\lambda < +\infty$, 我们判定当 r 充分大时，有

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant O(\log r), \tag{3.158}$$

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant O(\log r). \tag{3.159}$$

于是

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \geqslant m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - O(\log r). \tag{3.160}$$

再根据亏值的定义，当 r 充分大时，有

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \geqslant \frac{\delta}{2} T(r,f) - O(\log r). \tag{3.161}$$

作变换 $\zeta = \frac{z}{2r}$, 置 $F(\zeta) = f(2r\zeta)$. 再设 (γ) 是相应于这 $n(1, F = 0) + \bar{n}(1, F = \infty)$ 个点及数 $H\left(H = \frac{1}{16er}\right)$ 的欧氏除外圆, $(\gamma)'$ 是 (γ) 在 z 平面上的像. 于是 $(\gamma)'$ 的半径不超过 $\frac{1}{4}$. 我们对 $F(\zeta)$ 应用引理 3.12, 置其中的 $r = \frac{1}{2r}$, $R = \frac{1}{2}$, 则当 ζ 位在圆 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2r}$ 内且

在圆(γ)外时有

$$\log\left|\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}} m\left(\frac{1}{2}, \frac{F'}{F}\right)$$

$$-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}} m\left(\frac{1}{2}, \frac{F}{F'}\right)$$

$$+\{n(1, F=0)+\bar{n}(1, F=\infty)\} \log (32er)$$

$$\leqslant \frac{r+1}{r-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right)-\frac{r-1}{r+1} m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$$

$$+\{n(2r, f=0)+\bar{n}(2r, f=\infty)\} \log (32er)$$

$$+\left\{\frac{r+1}{r-1}+\frac{r-1}{r+1}\right\} \log (2r).$$

进一步根据(3.157), (3.159)和(3.160)式, 当r充分大时, 对位在圆$|z|<1$内且在圆$(\gamma)'$外的点z有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant -\frac{\delta}{4} T(r, f)+O\left(r^{\lambda'+\eta} \log r\right),$$

其中$0<\eta<\frac{1}{4}(\lambda-\lambda')$. 特别地, 取序列$r_n$, $r_n<r_{n+1}\to+\infty$, $(n\to+\infty)$使得

$$T(r_n, f) \geqslant r_n^{\lambda-\eta}.$$

于是当$n\to+\infty$时，有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant-\frac{\delta}{4}T(r_n,f)+O(r_n^{\lambda'+\eta}\log r_n)\to-\infty.$$

因此，我们判定$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$恒等于零，即$f(z)$是常数.但是这与级$\lambda>0$相矛盾.从而证明了$q=0$时$f(z)$不能具有非零有穷亏值，即定理3.10成立.

现在我们考虑一般情况：$0<q<+\infty$. 设$a_\nu(\nu=1,2,\cdots,p)$是$f(z)$的p个非零有穷亏值，相应的亏量$\delta(a_\nu,f)=\delta_\nu>0$. 置

$$\omega=\min_{1\leqslant k\leqslant q}(\theta_{k+1}-\theta_k),$$

$$\delta=\min_{1\leqslant\nu\leqslant p}\{\delta_\nu\},$$

$$d=\min_{1\leqslant\nu\neq\nu'\leqslant p}\{|a_\nu-a_{\nu'}|\},$$

$$|a|=\max_{1\leqslant\nu\leqslant p}\{|a_\nu|\},$$

$$|c|=\min_{1\leqslant\nu\leqslant p}\{|c_\nu|\},$$

其中c_ν是$f(z)-a_\nu$在原点$z=0$领域内展开式中的首项非零系数.任意取定数$h(0<h<+\infty)$和$h_1(0<h_1<h)$，则根据级的定义和引理2.3，存在序列$\{R_n\}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n,f)}{\log R_n}=\lambda,$$

以及

$$T(R_ne^h,f)\leqslant e^{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\lambda}T(R_n,f)(1+o(1))\ (n\to+\infty),$$

$$T(R_n e^{h_1}, f) \leqslant e^{h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\lambda} T(R_n, f)(1+o(1))\,(n \to +\infty).$$

再任取定数σ, $0<\sigma<\frac{1}{5}h_1$, 并且置$k=h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\lambda$, $k_1=h_1\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\lambda$, 则存在正整数$n_0$, 使得当$n \geqslant n_0$时有

$$R_n \geqslant 1,$$

$$T(R_n e^h, f) \leqslant e^k T(R_n, f)(1+o(1)) \leqslant 2e^k T(R_n, f), \tag{3.162}$$

$$T(R_n e^{h_1}, f) \leqslant e^{k_1} T(R_n, f)(1+o(1)) \leqslant 2e^{k_1} T(R_n, f),$$

以及当$R \geqslant R_n$时有

$$\frac{\delta}{2} T(R, f) \leqslant m(R, a_\nu), \ \nu=1, 2, \cdots, p,$$

$$T\left(R, \frac{1}{f-a_\nu}\right) \leqslant 2T(R, f), \ \nu=1, 2, \cdots, p,$$

$$\frac{1}{T(R, f)}\left\{10\log 2 + \log^+\log^+|a| + \log^+\log^+\frac{1}{|c|}\right.$$

$$+\frac{1}{2}h_1 + 3k_1 + 3\log^+\frac{1}{e^{\frac{1}{4}h_1} - e^\sigma}$$

$$+\log\frac{4(p+1)e^\sigma}{e^\sigma - 1} + 2\log\frac{2(2p+1)}{h_1}$$

$$\left. + 2\log R + 3\log^+ T(R, f)\right\} < \frac{\delta}{8}.$$

因此进一步根据引理3.9我们判定在区间$[R_n, R_n e^\sigma]$中存在值t_n和一个相应的值$\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi)$的集合$E_\nu(t_n)(1 \leqslant \nu \leqslant p)$, 使得

当$\theta \in E_\nu(t_n)$时有

$$\log \frac{1}{|f(t_n e^{i\theta}) - a_\nu|} \geqslant \frac{\delta}{4} T(t_n, f),$$

并且

$$\text{mes}\, E_\nu(t_n) \geqslant M = M(\delta, h_1, \lambda, \sigma) > 0,$$

其中

$$M(\delta, h_1, \lambda, \sigma)$$

$$= \frac{\pi\delta}{8e^{2h_1\lambda}\left\{\dfrac{e^{\frac{1}{2}h_1} + e^\sigma}{e^{\frac{1}{2}h_1} - e^\sigma} + \dfrac{2}{h_1}\log\dfrac{16(p+1)e^{1+\frac{1}{2}h_1}}{e^\sigma - 1}\right\}}.$$

任意取定数ε,

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{M}{8q}, \frac{\omega}{2}\right\},$$

则在q个集合$E_\nu(t_n) \cap [\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon]$ $(k = 1, 2, \cdots, q, \theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi)$ 中至少存在一个集合$E_\nu(t_n) \cap [\theta_{k_\nu} + 2\varepsilon, \theta_{k_\nu+1} - 2\varepsilon]$ $(1 \leqslant k_\nu \leqslant q)$,其线性测度

$$\text{mes}\,\{E_\nu(t_n) \cap [\theta_{k_\nu} + 2\varepsilon, \theta_{k_\nu+1} - 2\varepsilon]\} \geqslant \frac{M}{2q}.$$

进一步根据(3.156)式,我们判定

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ n\{\Omega(\theta_{k_\nu} + \varepsilon, \theta_{k_\nu+1} - \varepsilon; r), f = X\}}{\log r} \leqslant \lambda' < +\infty,$$

$$X = 0, \infty.$$

最后,应用引理3.13,置其中的$N_n = \dfrac{\delta}{4} T(t_n, f)$, $\alpha = \dfrac{M}{2q}$, R_{n1}

$= R_n e^{-Q}, R_{n2} = R_n e^{Q}, Q > \max\left\{\dfrac{\varepsilon}{16}, \sigma\right\}$, 并注意到

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{6+2(\lambda'+\eta_0)+\frac{3\pi}{\theta}} R_{n2}^{\lambda'+2\eta_0}\log R_{n2}\right\}N_n^{-1}$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{O(R_n^{\lambda'+2\eta_0}\log R_n)}{T(R_n, f)}\right\}=0.$$

其中$0<\eta_0<\dfrac{1}{4}(\lambda-\lambda')$, 则当$n$充分大时对位在$\overline{\Omega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon, \theta_{k_v+1}-2\varepsilon, R_n e^{-Q}, R_n e^{Q})$上且在圆$(\gamma)$外的点$z$有

$$\log\left|\frac{1}{|f(z)-a}\right| \geqslant A(\alpha, \varepsilon, Q, \sigma, \delta)T(t_n, f) > \log\frac{4}{d}, \qquad (3.163)$$

其中(γ)的半径之和不超过$\dfrac{1}{8}\varepsilon R_n e^{-Q} < (e^{Q}-e^{-Q})R_n$, $A(\alpha, \varepsilon, Q, \sigma, \delta)>0$是与$n$无关的常数.因此,对于充分大的$n$, 每个亏值$a_v$对应一个集合$\overline{\Omega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon, \theta_{k_v+1}-2\varepsilon; R_n e^{-Q}, R_n e^{Q})$, p个亏值对应p个集合$\overline{\Omega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon, \theta_{k_v+1}-2\varepsilon; R_n e^{-Q}, R_n e^{Q})$ $(v=1, 2, \cdots, p)$. 根据(3.163)式,我们判定这p个集合彼此无交,从而有$p\leqslant q$. 于是定理3.10完全得证.

在定理3.10的假设中,如果我们进一步假设$f(z)$是一个整函数,则在定理3.10的证明中,应用引理3.14代替引理3.13, 我们可以判定当n充分大时,对位在$\overline{\Omega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon, \theta_{k_v+1}-2\varepsilon; R_n e^{-Q}, R_n e^{Q})$上的点$z$有

$$|f(z)-a_v| \leqslant \exp\{-A(\alpha, \theta, \varepsilon, Q, \sigma, \delta)T(t_n, f)\} < \frac{d}{4} \qquad (3.164)$$

并且这p个集合$\{\overline{\Omega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon, \theta_{k_v+1}-2\varepsilon; R_n e^{-Q}, R_n e^{Q}) \mid v=1, 2, \cdots, p\}$

彼此无交.再次应用引理3.14，置其中的$N_n=\frac{\delta}{4}T(t_n,f)$，$\alpha=\frac{M}{2q}$，$R_{n1}=R_ne^{-h+\sigma}$，$R_{n2}=R_ne^{h-\sigma}(h>h_1)$并注意到

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(\frac{R_{n2}}{R_{n1}}\right)^{6+2(\lambda'+\eta_0)+\frac{3\pi}{\theta}}R_{n2}^{\lambda'+2\eta_0}\log R_{n2}\right\}N_n^{-1}$$

$$\leqslant\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{O(R_n^{\lambda'+2\eta_0}\log R_n)}{T(R_n,f)}\right\}=0,$$

其中$0<\eta_0<\frac{1}{4}(\lambda-\lambda')$. 则当$n$充分大时，对位在域$\overline{\Omega}(\theta_{k_\nu}+2\varepsilon,\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon;R_ne^{-h+\sigma},R_ne^{h-\sigma})$上的点$z$有

$$|f(z)-a_\nu|\leqslant\exp\{-A(\alpha,\varepsilon,h,\sigma,\delta)T(t_n,f)\}$$

其中$A(\alpha,\varepsilon,\theta,h,\sigma,\delta)>0$是与$n$无关的常数.于是进一步得到当$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k_\nu}+2\varepsilon,\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon;R_ne^{-h+\sigma},R_ne^{h-\sigma})$时有

$$|f(z)|\leqslant|f(z)-a_\nu|+|a|<1+|a|\quad(\nu=1,2,\cdots,p).\tag{3.165}$$

不失一般性，我们可以假设$\theta_{k_\nu}<\theta_{k_{\nu+1}}(\nu=1,2,\cdots,p)$. 以下，我们证明

$$(\theta_{k_{\nu+1}}+2\varepsilon)-(\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon)\geqslant\frac{\pi}{\lambda}\quad(1\leqslant\nu\leqslant p).\tag{3.166}$$

事实上，如果不然，则应有

$$(\theta_{k_{\nu+1}}+2\varepsilon)-(\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon)<\frac{\pi}{\lambda}(1-\eta),\quad\eta>0.\tag{3.167}$$

如果在定理3.10的证明中，我们取$Q\geqslant 3\pi$，则根据定理3.2应有

$$\{N+|a|\}\{\varepsilon_1^{\frac{1}{3}}+\varepsilon_2^{\frac{1}{3}}\}\geqslant d,$$

其中N是$|f(z)|$在$\overline{\Omega}(\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon,\theta_{k_\nu+1}+2\varepsilon;R_ne^{-Q},R_ne^{Q})$上的最大值，以及

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\exp\{-A(\alpha,\varepsilon,\theta,h,\sigma,\delta)T(t_n,f)\}.$$

设$\overline{\Omega}(\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon,\theta_{k_\nu+1}+2\varepsilon;R_ne^{-Q},R_ne^{Q})$上的点$z_\nu$有$|f(z_\nu)|=N$. 于是当$n$充分大时，我们判定

$$|f(z_\nu)|\geqslant\frac{d}{2}\exp\left\{+\frac{1}{3}A(\alpha,\varepsilon,\theta,Q,\sigma,\delta)T(t_n,f)\right\}-|a|$$

$$\log|f(z_\nu)|\geqslant\frac{1}{4}A(\alpha,\varepsilon,\theta,Q,\sigma,\delta)T(t_n,f)>|a|+1. \qquad (3.168)$$

另一方面，根据(3.165)式，当$z\in\Delta(\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon;R_ne^{-h+\sigma},R_ne^{h-\sigma})\bigcup\Delta(\theta_{k_\nu+1}+2\varepsilon;R_ne^{-h+\sigma},R_ne^{h-\sigma})$时，有

$$|f(z)|<1+|a|.$$

于是点$z_\nu\in\Omega(\theta_{k_\nu+1}-2\varepsilon,\theta_{k_\nu+1}+2\varepsilon;R_ne^{-h+\sigma},R_ne^{h-q})$. 现在，应用引理2.10，我们得到

$$\log|f(z_\nu)|\leqslant\log(1+|a|)$$

$$+\frac{4\left(\dfrac{R_ne^{-h+\sigma}}{|z_\nu|}\right)^{\frac{\pi}{\theta_{k_\nu+1}-\theta_{k_\nu+1}+4\varepsilon}}}{\pi\left\{1-\left(\dfrac{R_ne^{-h+\sigma}}{|z_\nu|}\right)^{\frac{2\pi}{\theta_{k_\nu+1}-\theta_{k_\nu+1}+4\varepsilon}}\right\}}\log M(R_ne^{-h+\sigma},f)$$

$$+\frac{4\left(\frac{|z_\nu|}{R_n e^{h-\sigma}}\right)^{\frac{\pi}{\theta_{k_{\nu+1}}-\theta_{k_{\nu+1}}+4\varepsilon}}}{\pi\left\{1-\left(\frac{|z_\nu|}{R_n e^{h-\sigma}}\right)^{\frac{2\pi}{\theta_{k_{\nu+1}}-\theta_{k_\nu}+4\varepsilon}}\right\}}\log M(R_n e^{h-\sigma},f). \quad (3.169)$$

进一步，根据(1.21)和(3.162)式有

$$\log M(R_n e^{-h+\sigma},f)\leqslant \log M(R_n e^{h-\sigma},f)$$

$$\leqslant \frac{R_n e^h+R_n e^{h-\sigma}}{R_n e^h-R_n e^{h-\sigma}}T(R_n e^h,f)\leqslant \frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}2e^{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\lambda}T(t_n,f).$$

$$(3.170)$$

于是(3.167)，(3.168)，(3.169)和(3.170)式给出

$$\frac{1}{4}A(\alpha,\varepsilon,\theta,Q,\sigma,\delta)T(t_n,f)\leqslant \log(1+|a|)$$

$$+\frac{4e^{(-h+Q+\sigma)\frac{\lambda}{1-\eta}}}{\pi\left\{1-e^{+(-h+Q+\sigma)\frac{2\lambda}{1-\eta}}\right\}}2\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}e^{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\lambda}T(t_n,f)$$

$$+\frac{4e^{(-h+Q+\sigma)\frac{\lambda}{1-\eta}}}{\pi\left\{1-e^{(-h+Q+\sigma)\frac{2\lambda}{1-\eta}}\right.}2\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}e^{h\left(1+\frac{h_1}{h}\right)\lambda}T(t_n,f)$$

令$n\to+\infty$，则得

$$\frac{1}{4}A(\alpha,\varepsilon,\theta,Q,\sigma,\delta)$$

$$\leqslant\frac{16(e^\sigma+1)}{\pi\left\{1-e^{(-h+Q+\sigma)\frac{2\lambda}{1-\eta}}\right\}}e^{-\frac{\eta\lambda h}{1-\eta}+\frac{(Q+\sigma)\lambda}{1-\eta}+h_1\lambda}.$$

但是我们若取 h 适当大，则上式不能成立，即说明(3.166)式必须成立.(3.166)式成立又进一步说明必须有 $p\leqslant\frac{q}{2}$ 和 $p<2\lambda$，从而我们证明了下述结果：

定理3.11 设 $f(z)$ 是一个 $\lambda(0<\lambda<+\infty)$ 级整函数，$\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2\cdots,q;\ 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi,\ \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$ 是 z 平面上的 $q(0\leqslant q<+\infty)$ 条半直线，并且对于任意小的数 $\varepsilon>0$ 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+\eta\{\bigcup_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=0\}}{\log r}<\lambda.$$

如果记 $f(z)$ 的非零有穷亏值数为 p，则有 $p\leqslant\frac{q}{2}$ 和 $p<2\lambda$.

现在，我们可以从定理3.10和定理3.11直接推导出杨乐、张广厚的下述两个结果.[42b][42c]

定理3.12 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个 λ 级 $(0<\lambda<+\infty)$ 亚纯函数，如果记 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向个数为 q，亏值个数为 p，则有 $p\leqslant q$.

定理3.13 设 $f(z)$ 是一个 $\lambda(0<\lambda<+\infty)$ 级整函数，如果记 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向个数为 q，有穷亏值个数为 p，则有 $p\leqslant\frac{q}{2}$，并且当 $q<+\infty$ 时有 $p<2\lambda$.

事实上，根据定理 2.14 和有限覆盖定理，我们判定存在两个判别有穷复数 b 和 c，使得 b 和 c 均判别于 $f(z)$ 的 p 个亏值 $a_v(v=1,2,\cdots,p)$，以及对于任意小的数 $\varepsilon>0$ 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}}{\log r}\leqslant\lambda'<\lambda,\ X=a,b.$$

作变换

$$F(z)=\frac{f(z)-b}{f(z)-c}.$$

则$F(z)$具有p个非零有穷亏值$\dfrac{a_v-b}{a_v-c}$ $(v=1,2,\cdots,p)$，并且对任意小的数$\varepsilon>0$有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\bigcup\limits_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),F=X\right\}}{\log r}\leqslant\lambda'<\lambda,$$

$$X=0,\infty.$$

于是根据定理3.10，我们判定定理3.12成立.

如果$f(z)$是整函数，则取$c=\infty$和作变换$F(z)=f(z)-b$. 于是根据定理3.11，我们判定定理3.13成立.

3.5.3. Edrei-Fuchs定理的改进

引理3.15 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数，其下级$\mu<+\infty$，并且满足条件：

(1)在$\overline{\Omega}(-\theta,\theta)$ $(0<\theta\leqslant\pi)$上有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\{\overline{\Omega}(-\theta,\theta;r),f=X\}}{\log r}\leqslant\mu'<+\infty,\quad X=0,\infty.$$

(2)对于某个取定的数$\sigma>0$和取定的充分大的数$h(0<h<+\infty)$，存在两个序列$\{R_n\}$和$\{t_n\}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n,f)}{\log R_n}=\mu,\tag{3.171}$$

$$\begin{aligned}T(R_ne^h,f)&\leqslant e^K T(R_n,f)(1+o(1))\\&\leqslant 2e^K T(R_n,f)\ (n\to+\infty),\end{aligned}\tag{3.172}$$

$$K \leqslant 2h\mu, \tag{3.173}$$

$$R_n \leqslant t_n \leqslant R_n e^{\sigma}, n = 1, 2, \cdots,$$

以及对某个取定的数 $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \theta$, 集合

$$E_n = E\left\{z \left| \log \frac{1}{|f(z) - a|} \geqslant N_n, \; |z| = t_n, \; -\theta + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \theta - \varepsilon \right.\right\}$$

的线性测度 $\operatorname{mes} E_n \geqslant \alpha R_n \left(\alpha \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 其中 a 是一个非零有穷复数, $N_n > 0$ 是一个实数, 并且有

$$\lim_{n \to +\infty} (R_n^{\mu' + 2\eta_0} \log R_n) N_n^{-1} = 0,$$

其中 $\eta_0 > 0$ 是某个取定的实数.

在上述假定之下, 只要 n 充分大, 则对位在 $\overline{\Omega}(-\theta + \varepsilon, \theta - \varepsilon; R_n Q^{-1}, R_n Q)$ $(Q \geqslant e^{\sigma})$[1] 内且在一些圆 (γ) 外的点 z 有

$$\log \frac{1}{|f(z) - a|} > A(\alpha, \varepsilon, \theta, Q) N_n,$$

其中 (γ) 的半径之和不超过 $\frac{1}{8} \varepsilon R_n$, (γ) 所含圆的个数为有穷但依赖于 n; $A(\alpha, \varepsilon, \theta, Q) > 0$ 是依赖于 $\alpha, \varepsilon, \theta, Q$ 而与 n 无关的常数.

事实上, 这个引理的证明基本上是引理 3.13 证明的重复. 在引理 3.13 的证明中, 只须用 μ' 代替 λ', 并且置 $R_{n1} = R_n Q^{-1}$, $R_{n2} = R_n Q$ 和 $R_{n3} = \left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} Q^5 R_n$, 以及从 (3.146) 式起到 (3.149) 式止, 置换其中的 R_n 为 t_n. 然而最关键的修正是 (3.137) 和 (3.151) 式, 在那里

---

1) $Q \geqslant e^{\sigma}$ 保证 $t_n \leqslant R_n Q$.

我们用到了级$\lambda<+\infty$的条件.在这里,我们取h充分大,使得

$$h>\log\left\{4\cdot\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}Q^5\right\},$$

则当n充分大时,根据(3.170),(3.171)和(3.172)式有

$$T(2R_{n3},f)\leqslant T(4R_{n3},f)\leqslant T(R_ne^h,f)$$

$$\leqslant 2e^KT(R_n,f)\leqslant 2e^{2h\mu}R_n^{\mu+\eta},\ \eta>0.$$

于是我们可以用此式代替(3.137)和(3.141)式,从而(3.138)和(3.152)式仍然成立.

相应于引理3.14,我们有

引理3.16 设$f(z)$是一个整函数,其下级$\mu<+\infty$,并且满足条件:

(1)在$\overline{\Omega}(-\theta,\theta)$ $(0<\theta\leqslant\pi)$上有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+n\{\Omega(-\theta,\theta;r),f=0\}}{\log r}\leqslant\mu'<+\infty.$$

(2)对于某个取定的数$\sigma>0$和取定的充分大的数h,$0<h<+\infty$,存在两个序列$\{R_n\}$和$\{t_n\}$,使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n,f)}{\log R_n}=\mu,$$

$$T(R_ne^h,f)\leqslant e^KT(R_n,f)(1+o(1))$$

$$\leqslant 2e^KT(R_n,f)\ (n\to+\infty),$$

$$K\leqslant 2h\mu,$$

$$R_n\leqslant t_n\leqslant R_ne^\sigma,\ n=1,2,\cdots,$$

以及对某个取定的数ε, $0<\varepsilon<\theta$, 集合

$$E_n=E\left\{z\left|\log\frac{1}{|f(z)-a|}\geqslant N_n,\ |z|=t_n,\right.\right.$$

$$\left.-\theta+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta-\varepsilon\right\}$$

的线性测度 $\operatorname{mes}E_n\geqslant\alpha R_n\left(\alpha\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 其中$a$是一个非零有穷复数, $N_n>0$是一个实数, 并且有

$$\lim_{n\to+\infty}(R_n^{\mu'+2\eta_0}\log R_n)N_n^{-1}=0,$$

其$\eta_0>0$是某个取定的实数.

在上述假定之下, 只要n充分大, 则对位在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_nQ^{-1},R_nQ)$ $(Q>e^{\sigma})$上的点z有

$$|f(z)-a|\leqslant\exp\{-A(\alpha,\varepsilon,\theta,Q)N_n\},$$

其中$A(\alpha,\varepsilon,\theta,Q)>0$是依赖于$\alpha,\varepsilon,\theta,Q$且与$n$无关的常数.

相应地, 我们可以应用引理3.15和引理3.16证明下述两个结果:

定理3.14 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个下级为$\mu(0<\mu<+\infty)$的亚纯函数, $\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi,\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$是$z$平面上的$q$ $(0\leqslant q<+\infty)$条半直线, 并且对于任意小的数$\varepsilon>0$有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+n\left\{\bigcup\limits_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}}{\log r}<\mu,\ X=0,\infty.$$

如果记$f(z)$的非零有穷亏值数为p, 则有$p\leqslant q$.

定理3.15 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个下级为$\mu(0<\mu<+\infty)$的整函数，$\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\cdots<\theta_q,\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$是$z$平面上的$q(0\leqslant q<+\infty)$条半直线，并且对于任意小的数$\varepsilon>0$有

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=0\right\}}{\log r}<\mu.$$

如果记$f(z)$的非零有穷亏值数为p，则有$p\leqslant\frac{q}{2}$和$p<2\mu$.

进一步，我们还可以得到下述两个结果：

定理3.16 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个下级为$\mu(\mu<+\infty)$的亚纯函数，并且有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=+\infty. \tag{3.174}$$

再 设$\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi,\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$是$z$平面上的$q(0\leqslant q<+\infty)$条半直线，并且对于任意小的数$\varepsilon>0$有

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}}{\log r}<+\infty,\ X=0,\infty$$

如果记$f(z)$的非零有穷亏值数为p，则有$p\leqslant q$.

定理3.17 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个下级为$\mu(\mu<+\infty)$的整函数，并且有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=+\infty.$$

再 设$\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi,\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$

是 z 平面上的 $q(0\leqslant q<+\infty)$ 条半直线，并且对于任意小的数 $\varepsilon>0$ 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=0\right\}}{\log r}<+\infty.$$

如果记$f(z)$的非零有穷亏值数为 p, 则有 $p\leqslant\frac{q}{2}$ 和 $p<2\mu$.

事实上，我们只须证明当 $q=0$ 时必有 $p=0$. 因为当 $q\geqslant1$ 时，如果$f(z)$是亚纯函数，且有 $p\geqslant2$, 则根据定理3.4, 应有 $\mu>0$. 于是再根据定理3.14, 判定 $p\leqslant q$. 如果$f(z)$是整函数且有 $p\geqslant1$, 则根据定理3.4应有 $\mu>0$, 于是再根据定理3.15, 判定 $p\leqslant\frac{q}{2}$ 和 $p<2\mu$.

现在，我们证明当 $q=0$ 时，必有 $p=0$. 首先，根据引理2.4, 对任意取定的值 $h(0<h<+\infty)$, 存在序列$\{R_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T(R_n,f)}{(\log R_n)^2}=+\infty,\tag{3.175}$$

$$\begin{aligned}T(R_ne^h,f)&\leqslant e^{h\mu}T(R_n,f)(1+0(1))\\&\leqslant 2e^{h\mu}T(R_n,f)\ (n\to+\infty).\end{aligned}\tag{3.176}$$

另一方面，根据 $q=0$, 我们判定

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{n(r,f=X)}{\log r}<+\infty,\quad X=0,\infty.$$

设$f(z)$具有一个非零有穷亏值 a, 其亏量 $\delta(a,f)=\delta>0$, 则根据恒等式

$$\frac{1}{f(z)-a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{f(z)}{f'(z)}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)-a}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right\},$$

导出

$$m\left(R_n, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \log^+ \frac{1}{|a|} + m\left(R_n, \frac{f}{f'}\right)$$

$$+ m\left(R_n, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right) + \log 2.$$

进一步根据(3.176)和引理1.3,置其中的$r=R_n$,$\rho=R_n e^h$,则有

$$m\left(R_n, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant O\{\log[R_n T(R_n, f)]\},$$

$$m\left(R_n, \frac{f'}{f}\right) \leqslant O\{\log[R_n T(R_n, f)]\}.$$

于是

$$m\left(R_n, \frac{f}{f'}\right) \geqslant \frac{\delta}{2} T(R_n, f) - O\{\log[R_n T(R_n, f)]\}.$$

以下,类似于在定理3.10的证明中对$q=0$时的讨论情况,我们可以证明当点z位在圆$|z|\leqslant 1$内且在圆$(\gamma)'$外时,有

$$\log\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant -\frac{\delta}{4} T(R_n, f) + O\{(\log R_n)^2\}.$$

其中$(\gamma)'$的半径和不超过$\frac{1}{4}$.于是根据(3.175)式判定$\frac{f'(z)}{f(z)}$恒等于零,即$f(z)$是个常数.但是这与(3.174)式相矛盾,从而当$q=0$时,$f(z)$不能具有非零有穷亏值.

§3.6.注记

我们已经比较详细地论述了亏值个数在什么条件下应当是有限的.

本节将简单扼要地介绍亏值理论的其它方面的重要成果[1]．

3.6.1. 反问题

我们在第一章已经证明了一个在开平面$|z|<+\infty$上不恒为常数的亚纯函数$f(z)$，其全体亏值$\{a\}$构成一个可数集，并且其亏量总和

$$\Delta(f)=\sum_{a}\delta(a,f)\leqslant 2.$$

那么，在理论上会很自然地提出下述反问题：

对于任意给定一组判别复数$a_i(i=1,2,\cdots,q;q\leqslant+\infty)$和一组相应的正数$\delta_i$，$0<\delta_i\leqslant 1\ (i=1,2,\cdots,q)$并且适合条件$\sum_i\delta_i\leqslant 2$，能否构造出一个亚纯函数$f(z)$，使得$f(z)$以给定的且仅以给定的这组复数$\{a_i\}$为亏值，其相应的亏量$\delta(a_i,f)=\delta_i(i=1,2,\cdots,q)$?

对于这个具有十分重要意义的反问题，自从1925年R. Nevanlinna的工作以来，始终只有特殊条件下的结果，直到1977年D. Drasin应用拟共形映照理论才出色地解决了这个问题．具体地，他证明了下述结果[12b]：

设$\{\delta_i\}$，$\{\theta_i\}$ $(1\leqslant i<N\leqslant+\infty)$是两个正数序列，并且适合条件：

$$0<\delta_i+\theta_i\leqslant 1(1\leqslant i<N),$$

$$\sum_i(\delta_i+\theta_i)\leqslant 2.$$

再设$\{a_i\}$ $(1\leqslant i<N)$是一个复数序列，并且适合条件：

$$a_i\neq a_j(1\leqslant i\neq j<N).$$

1) 关于亏值理论自Ntvanlinna以来的重要发展，请参见[16b]．

在上述假设之下，必定存在一个亚纯函数$f(z)$，使得

$$\delta(a_i, f) = \delta_i, \theta(a_i, f) = \theta_i \quad (1 \leqslant i < N),$$

$$\delta(a, f) = \theta(a, f) = 0 \quad (a \bar{\in} \{a_i\}).$$

进一步，如果 $\phi(r)$是一个正的非减函数，并且当$r \to +\infty$时有 $\phi(r) \to +\infty$，则可以要求$f(z)$适合条件：当r充分大时有 $T(r, f) \leqslant r^{\phi(r)}$.

对于整函数的情况，早在 1962 年 W. Fuchs 和 W. Hayman 就已经解决了这个反问题[17a].

在 D. Drasin 的结果中，以及在 W. Fuchs 和 W · Hayman 的结果中，一般构造的亚纯函数或整函数$f(z)$必须是无穷级．如果要求$f(z)$是有穷级，则上述反问题一般不再是可解的．事实上，A. Weitsman 在 1969 年证明了下述结果[1)]：

如果$f(z)$是一个下级μ为有穷的亚纯函数，并且满足条件：

$$\sum_a \delta(a, f) = 2,$$

则$f(z)$至多有2μ个亏值.

在 1972 年他又证明了下述结果[40c]：

如果$f(z)$是一个下级μ为有穷的亚纯函数，则有

$$\sum_a \delta^{\frac{1}{3}}(a, f) < +\infty.$$

对于 A. Weitsman 的第二个结果，我们作一点说明：指数 $^1/_3$ 是最佳的．事实上，当$\alpha < \dfrac{1}{3}$时，W. Hayman[21c]构造出有穷正级亚纯函数$f(z)$，使得

$$\sum_a \delta^{\alpha}(a, f) = +\infty.$$

---

1) 见定理 3. 8.

另外，我们再作一点说明：W. Hayman 的这个结果同时说明了存在具有无穷多个亏值的有穷正级亚纯函数．不过，更早期 A. Gold'berg 已经构造出这样的例子[18a]．事实上，W. Hayman 的这个结果正是基于 A. Goldberg 的方法得到的．对于整函数的情况，1966 年 N. Arakelyan 利用逼近论的方法证明了下述结果[3a]：

对于任意给定的数 $\lambda > \frac{1}{2}$，必定存在具有无穷多个亏值的整函数 $f(z)$，且其级为 λ.

N. Arakelyan 还猜测：对于有穷级整函数 $f(z)$ 必有

$$\sum_a \{ \log (1/\delta (a, f) \}^{-1} < +\infty.$$

3.6.2. 展布关系

1965 年 A. Edrei 引进了一个很有用的概念，即所谓 Polya 峰的[14a] 概念：设 $T(r)$ 是定义在区间 $[t_0, +\infty)$ $(t_0 \geqslant 0)$ 上的一个正的非减连续趋于 ∞ 的函数．一个序列 $\{r_n\}$ 称为 $T(r)$ 的一个 ρ $(0 \leqslant \rho < +\infty)$ 级 Pólya 峰序列，如果存在两个序列 $\{r_n'\}$ 和 $\{r_n''\}$ 使得

$$r_n' \to +\infty, \quad \frac{r_n}{r_n'} \to +\infty, \quad \frac{r_n''}{r_n} \to +\infty \, (n \to +\infty),$$

以及

$$\frac{T(r)}{T(r_n)} \leqslant \left\{ \frac{r}{r_n} \right\}^\rho (1 + o(1)) \, (n \to +\infty, r_n' \leqslant r \leqslant r_n'').$$

A. Edrei 证明了下述结果：

设 $T(r)$ 的下级为 μ, $\mu < +\infty$ 和级为 λ, $\lambda \leqslant +\infty$, 则对于每个有穷数 ρ, $\mu \leqslant \rho \leqslant \lambda$, 必定存在一个关于 $T(r)$ 的 ρ 级 Pólya 峰序列．

现在，我们介绍 A. Edrei 的一个著名猜测，即所谓的展布关系 (Spread relation)：

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个下级μ为有穷的亚纯函数，于是存在一个μ级 Pólya 峰序列$\{r_n\}$. 再设$\Lambda(r)$是一个正的函数，并且满足条件：

$$\Lambda(r)=o\{T(r,f)\}\ (r\to+\infty). \tag{3.177}$$

定义

$$E_\Lambda(r,a)=\begin{cases} E\{\theta \mid |f(re^{i\theta})-a|<e^{-\Lambda(r)},\ -\pi<\theta\leqslant\pi\},\ a\neq\infty, \\ E\{\theta \mid |f(re^{i\theta})|>e^{\Lambda(r)},\ -\pi<\theta\leqslant\pi\},\ a=\infty. \end{cases}$$

和置

$$\sigma_\Lambda(a)=\varliminf_{r\to+\infty}\operatorname{mes}E_\Lambda(r,a),$$

则关于复数a的展布

$$\sigma(a)=\inf_\Lambda\sigma_\Lambda(a),$$

这里的下确界是对全部适合条件(3.177)式的$\Lambda(r)$而取的.

1967 年 A. Edrei 猜测：下述展布关系[14a]

$$\sigma(a)\geqslant\min\left\{2\pi,\ \frac{4}{\mu}\sin^{-1}\sqrt{\frac{\delta(a,f)}{2}}\right\}$$

成立.

1973 年 A. Baernstein Ⅱ 证明了这个猜测的正确性[4a]. 他的证明基于引进了所谓的$T^*(z)$函数，其定义如下：

设$f(z)$是一个不恒为零的亚纯函数. 置

$$m^*(z)=\sup_E\frac{1}{2\pi}\int_E\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi$$

$$(z=re^{i\theta},\ 0<r<+\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

这里的上确界是对全部适合条件 $\text{mes}\, E=2\theta$ 的可测集合 $E\subset(-\pi,\pi)$ 而取的，则定义

$$T^*(z)=m^*(z)+N(|z|,f).$$

A. Baernstein Ⅱ 证明了 $T^*(z)$ 是上半平面 $\text{Im}\, z>0$ 内的一个次调和函数，同时在 H, $H=E\{z|\text{Im}\, z\geqslant 0 \quad z\neq 0\}$ 上是一个连续函数.

$T^*(z)$ 的重要性不仅表现在 Edrei 猜测的证明中，而且表现在许多其它极值问题的证明中[4b]. 因此，$T^*(z)$ 函数是一个十分强有力的工具. A. Baernstein Ⅱ 的这个工作有很重要的意义.

展布关系有许多重要应用. 例如，根据展布关系可以导出下述 A. Edrei-W. Fuchs 的著名椭圆定理[15c].

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数，其下级为 μ, $0\leqslant\mu\leqslant 1$. 再设 $f(z)$ 以两个判别复数 a 和 b 为亏值，并且记

$$\mu=1-\delta(a,f),\ v=1-\delta(b,f),$$

则有

$$u^2+v^2-2uv\cos\mu\pi\geqslant\sin^2\mu\pi,$$

并且当 $u\leqslant\cos\mu\pi$ 时，有 $v=1$, 以及当 $v\leqslant\cos\mu\pi$ 时，有 $u=1$.

另外，根据展布关系可以解决下级 $\mu\leqslant 1$ 时的亚纯函数的亏量问题. 1973 年，A. Edrei 基于展布关系证明了下述定理[14b]:

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个下级为 μ 的亚纯函数. 如果 $0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$, 则 $f(z)$ 的亏量总和

$$\sum_a\delta(a,f)<1-\cos\mu\pi,$$

但有一种情况除外，即当 $f(z)$ 仅有一个亏值时，其相应亏量能取区

间[0, 1]上的任何值；如果$\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$，则$f(z)$的亏量总和

$$\sum_a \delta(a, f)\leqslant 2-\sin\mu\pi;$$

其中等式仅当$f(z)$恰有两个亏值a_1和a_2，并且$\delta(a_1, f)=1$和$\delta(a_2, f)=1-\sin\mu\pi$时成立.

当$\mu>1$时，亏量问题尚未解决.这是一个非常值得研究的问题.

对于级$\lambda>1$的亚纯函数$f(z)$，D. Drasin 和 A. Weitsman 在1975年猜测[13a] $f(z)$的亏量总和

$$\sum_a \delta(a, f)\leqslant\Lambda=\max\{\Lambda_1, \Lambda_2\},$$

其中

$$\Lambda_1=2-\frac{2\sin\frac{\pi}{2}\{2\lambda\}}{[2\lambda]+2\sin\frac{\pi}{2}\{2\lambda\}},$$

$$\Lambda_2=2-\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\{2\lambda\}}{[2\lambda]+1},$$

此处$[x]$表示x的整数部分和$\{x\}=x-[x]$.

他们构造出例子说明这个上界Λ是准确的.

3.6.3. F. Nevanlinna猜测

通过一些例子的考查，1930年F. Nevanlinna作了下述著名猜测[31a]：

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数，其亏量总和$\sum_a \delta(a, f)=2$，则有下述性质：

(1) $f(z)$ 的级 $\lambda \geqslant 1$ 是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍；

(2) $f(z)$ 的亏值总数 $\leqslant 2\lambda$；

(3) $f(z)$ 的每个亏值的亏量是 $\frac{1}{\lambda}$ 的整数倍.

1946年，A. Pfluger 考虑了整函数的情况，他证明了下述结果[34a]：

设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个整函数，其级 $\lambda < +\infty$，并且 $f(z)$ 的亏量总和 $\sum_a \delta(a, f) = 2$，则有下述性质：

(1) λ 是一个正整数；

(2) $f(z)$ 的亏值的亏量是 $\frac{1}{\lambda}$ 的整数倍；

(3) $f(z)$ 的有穷亏值个数 $\leqslant \lambda$.

1959年，A. Edrei 和 W. Fuchs 补充证明了下述性质[15a]：

(4) $f(z)$ 的每个亏值同时是渐近值.

以后，我们称 F. Nevanlinna 猜测就包括了 A. Edrei 和 W. Fuchs 证明的性质(4). 1969 年 A. Weitsman 出色地证明了这个猜测的性质(2)，从而这个猜测得到部分解决. 完全解决这个猜测一直是很困难的. 最近，D. Drasin 在一篇杰出的论文中[12c]，再次应用拟共形映照理论，成功地证明了 F. Nevanlinna 猜测的正确性.

第四章　渐近值理论

本章主要介绍渐近值的基本理论及其某些新的结果.渐近值理论是整函数和亚纯函数理论的重要组成部分,它与整函数和亚纯函数的值分布理论及其反函数理论都有密切关系.同时渐近值理论的研究在历史上也推动了几何函数论的发展.

§4.1.渐近值和超越奇点

4.1.1.基本概念[32b,39a]

设$w=f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个超越整函数或亚纯函数,$z=\varphi(w)$是$f(z)$的反函数.F是$\varphi(w)$定义的覆盖在w平面上的Riemann曲面,即F是由$\varphi(w)$的一个解析元素沿着w平面上所有可能的路径进行具有代数特征的解析开拓[1)]所得到的Riemann曲面.于是$\varphi(w)$在F上是单值的,将F共形映照到开平面$|z|<+\infty$.因此,F是一个单连通抛物型Riemann曲面.我们用(a)表示F上的一个点,(a)在w平面上的投影为a;用(L_w)表示F上的一条连续曲线,(L_w)在w平面上的投影为L_w,L_w是一条连续曲线.我们称一条曲线L_w或(L_w)趋近于a或(a),如果a或(a)是L_w或(L_w)的一个端点,但是a或(a)可能不属于这条曲线L_w或(L_w).在以后,我们可以证明抛物型Riemann曲面F的每个边界点都是可近边界点(见定

1)具有代数特征的解析开拓意指$\varphi(w)$的每个元素在w平面上的展式可取下述形式:$\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} C_n(w-w_0)^{\frac{n}{k}}$,其中$n_0$是一个整数,$k$是一个正整数.在本节,谈到开拓都是指这种意义下的开拓.

理 4.1)，即对于 F 的每个边界点 (a)，在 F 上都存在一条曲线 (L_w) 趋近于 (a). 或者说在 w 平面上存在一条曲线 L_w 趋近于 a，同时存在 $\varphi(w)$ 的一个解析元素 $\varphi_0(w)$，使得 $\varphi_0(w)$ 沿着 L_w 开拓终结于点 a，而 a 是这个开拓的一个非代数奇点. 我们称如此的奇点 a 为由元素 $\varphi_0(w)$ 和 L_w 所定义的超越奇点. 以后，我们用 $\varphi_0(w)$ 不仅表示初始元素 $\varphi_0(w)$，而且表示 $\varphi_0(w)$ 沿着 L_w 开拓所得到的任何一个元素. 设 $\varphi(w)$ 的一个元素为 $\varphi_1(w)$，并且 $\varphi_1(w)$ 与 L_w' 定义一个奇点 a_1. 再设 $\varphi(w)$ 的另一个元素为 $\varphi_2(w)$，并且 $\varphi_2(w)$ 与 L_w'' 定义一个奇点 a_2. 明显地，当 $a_1 \neq a_2$ 时，在 F 上相应的两个边界点 (a_1) 和 (a_2) 是判别的. 当 $a_1 = a_2$ 时，如果在 $a(a=a_1=a_2)$ 点的任何一个邻域 $|w-a|<\rho$[1] $(\rho>0)$ 内，均存在连接 L_w' 和 L_w'' 的曲线 Γ_w，使得 $\varphi_1(w)$ 和 $\varphi_2(w)$ 可以沿着 Γ_w 彼此进行开拓，则在 F 上定义同一个边界点 (a). 于是 (a_1) 和 (a_2) 是非判别的；如果存在 a 点的一个邻域 $|w-a|<\rho\ (\rho>0)$，使得 $\varphi_1(w)$ 和 $\varphi_2(w)$ 沿着邻域内的任何一条连接 L_w' 和 L_w'' 的曲线 Γ_w 彼此不能进行开拓，则在 F 上定义的两个边界点 (a_1) 和 (a_2) 是判别的.

设 L 是 z 平面 $|z|<+\infty$ 上的一条伸展到 ∞ 的连续曲线. 如果点 z 沿着 L 趋向 ∞ 时，$f(z)$ 趋近于某个值 a，则称 a 为由 L 定义的渐近值，同时称 L 为一条相应于值 a 的渐近路径或定值路径. 明显地，a 和 L 分别决定 w 平面上的一个点 a 和一条趋近于 a 的曲线 L_w. 如果注意到 $f(z)$ 在 L 上的某一点邻域内的反函数决定 $\varphi(w)$ 的一个元素，则点 a 就是由这个元素和 L_w 决定的一个超越奇点. 因此，$f(z)$ 的一个渐近值 a 就决定了 $\varphi(w)$ 的 Riemann 曲面 F 上的一个边界点 (a). 反之，如果 (a) 是 F 的一个边界点，则在 F 上存在一条趋近于 (a) 的曲线 (L_w). 于是在 w 平面上存在一条趋近于 a 的曲线 L_w，以及 $\varphi(w)$ 的一个元素，使得 a 是由这个元素和 L_w 决定的奇点. 明显

---

1) 当 $a=\infty$ 时，用 $|w|>\dfrac{1}{\rho}$ 代替 $|w-a|<\rho$.

地，L_w 决定 z 平面上一条伸展到 ∞ 的连续曲线 L，使得当 z 沿着 L 趋向于 ∞ 时，$f(z)$ 趋近于值 a. 因此，F 的每个边界点都决定了 $f(z)$ 的一个渐近值. 设 a_1 和 a_2 是 $f(z)$ 的两个渐近值，L_1 和 L_2 是相应的两条定值路径. 如果 $a_1 \neq a_2$，则在 F 上相应的两个边界点 (a_1) 和 (a_2) 是判别的；如果 $a_1 = a_2 = a (a \neq \infty)$[1)]，并且对某个数 $\varepsilon > 0$，存在值 $R (0 < R < +\infty)$，使得 $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant R$ 外任何一条连接 L_1 和 L_2 的曲线 Γ 上的振动振幅大于 ε，则在 w 平面上，存在点 a 的一个邻域 $|w-a| < \rho \left(0 < \rho < \frac{\varepsilon}{2}\right)$，使得 L_1 决定的 $\varphi(w)$ 的一个元素 $\varphi_1(w)$ 和 L_2 决定的 $\varphi(w)$ 的另一个元素 $\varphi_2(w)$，在该邻域内彼此不能解析开拓，即 (a_1) 和 (a_2) 是 F 上的两个判别的边界点. 因此，我们称满足上述两个条件之一的渐近值 a_1 和 a_2 为两个判别的渐近值，否则称为非判别的. 以后，我们对两个非判别的渐近值不予区别，即视为同一个渐近值. 这样一来，我们就建立了一个超越整函数或亚纯函数 $f(z)$ 的渐近值和它的反函数 $\varphi(w)$ 的超越奇点或 $\varphi(w)$ 的 Riemann 曲面 F 的边界点间的恒等性. 在以后，不改变渐近值，我们可以假定渐近路径 L 是一条始自原点 $z=0$ 伸展到 ∞ 的简单连续曲线，甚至根据 $f(z)$ 的连续性，可以假定 L 是一条折线，并且 L 所含直线段的端点在有限平面内无聚点. 进一步，我们还可以假定，如果 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是 $f(z)$ 的 n 条渐近路径，定义相互判别的渐近值，则这 n 条路径除原点 $z=0$ 外，在 z 平面上彼此再无交点. 于是这 n 条路径分割 z 平面 $|z| < +\infty$ 为 n 个单连通域 $D_k (k=1, 2, \cdots, n)$，并且不妨认为 L_k 和 $L_{k+1} (L_1 = L_{n+1})$ 是相邻的，介囿单连通区域 D_k.

F. Iversen 曾对 $\varphi(w)$ 的超越奇点进行了分类[24a]：设 a 是由 $\varphi(w)$ 的一个元素 $\varphi_1(w)$ 和路径 L_w 所定义的奇点. 如果存在点 a 的一个邻域 $|w-a| < \rho (\rho > 0)$，使得 $\varphi_1(w)$ 在该邻域内，沿着任何一

---

1) 当 $a = \infty$ 时，通过变换 $\frac{1}{w}$ 可化为 $a=0$ 的情况.

条路径不能开拓到点a，则称点a为直接超越奇点，否则，称点a为非直接超越奇点.相应地，对于一个直接超越奇点a，在z平面上存在开集合$E\{z\,|\,|f(z)-a|<\rho\}$的一个无界连通分支Ω_ρ，使得当$z\in\Omega_\rho$时有

$$|f(z)-a|<\rho,\quad f(z)\neq a,$$

以及当$z\in\Gamma_\rho$时有

$$|f(z)-a|=\rho,$$

其中Γ_ρ是Ω_ρ的有限边界部分.明显地，如果两个直接超越奇点a_1和a_2是判别的，则必存在某个值$\rho>0$，使得在z平面上相应于a_1的域Ω_ρ^1和相应于a_2的域Ω_ρ^2彼此无交.

4.1.2. Iversen定理

现在，我们证明单连通抛物型Riemann曲面的每个边界点都是可近边界点.事实上，这是下述Iversen定理的一个直接推论[24a]：

定理4.1 设F是覆盖在W平面$|W|<+\infty$上的一个抛物型Riemann曲面，a是W平面上的任意一点.再设$\rho>0$和(a_1)是F的一个内点，并且$|a_1-a|=\rho$.则在F内必定存在一条始自点(a_1)的连续曲线(L)，使得L位在圆$|W-a|<\rho$内，并且L趋近于点a.

证[1]. 设$z=\varphi\{(w)\}$[2]将F共形映照到整个开平面$|z|<+\infty$，其逆变换$w=f(z)$是一个超越整函数或亚纯函数.以下，我们只须证明，对于$\varphi(w)$在点$w=a_1$的任何一个元素$\varphi_1(w)$，必定在圆$|w-a|<\rho$内都存在一条连接点a_1和a的连续曲线L，使

1) 这个证明本质上是属于G. Valiron的[39a].

2) (w)表示F上的一个点.

得 $\varphi_1(w)$ 沿着 L 可以进行开拓，但点 a 可能除外.事实上，我们先在 z 平面上取一点 $z_1=\varphi_1(a_1)$，然后根据条件 $|w-a|<\rho$ 确定一个边界含有点 z_1 的连通区域 Ω_0.如果在 Ω_0 内存在点 z_0，使得 $f(z_0)=a$，则在 Ω_0 内存在一条连接点 z_1 和 z_0 的曲线 L_z. 于是 L_z 在 F 上的映象 (L)，即是一条始自 (a_1) 点的曲线，并且 L 位在圆 $|w-a|<\rho$ 内，同时 L 趋近于点 a. 于是定理4.1成立.

另一方面，如果在 Ω_0 内恒有 $f(z)\neq a$，则根据条件 $\rho>|w-a|>\frac{\rho}{2}$，可以确定一个边界含有点 z_1 的连通区域 $\Omega_1\subset\Omega_0$. 我们证明在 Ω_0 内至少存在 Ω_1 的一个边界点 z_2，使得 $|f(z_2)-a|=\frac{\rho}{2}$. 事实上，如果不然，则在 Ω_1 的有限边界上恒有 $\frac{1}{|f(z)-a|}=\frac{1}{\rho}$，以及在 Ω_1 内恒有 $\frac{1}{|f(z)-a|}<\frac{2}{\rho}$. 于是根据 $\frac{1}{f(z)-a}$ 在 Ω_1 内的全纯性和最大模原理，我们判定在 Ω_1 内恒有 $\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|\leqslant\frac{1}{\rho}$. 但是这不可能.因此，在 Ω_0 内存在 Ω_1 的边界点 z_2，使得 $|f(z_2)-a|=\frac{\rho}{2}$.

类似地，根据条件 $\frac{\rho}{2}>|w-a|>\frac{\rho}{4}$，可以确定一个边界含有点 z_2 的连通区域 $\Omega_2\subset\Omega_0$，以及可以证明在 Ω_0 内至少存在 Ω_2 的一个边界点 z_3，使得 $|f(z_3)-a|=\frac{\rho}{4}$. 如此继续，我们在 Ω_0 内得到一列相邻区域 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots$，使得在 Ω_n 内恒有 $\frac{1}{2^{n-1}}>|f(z)-a|>\frac{1}{2^n}$，以及 Ω_n 和 Ω_{n+1} 有一个公共边界点 z_{n+1}，并且 $|f(z_n)-a|=\frac{\rho}{2^n}$. 现在，我们证明当 $n\to+\infty$ 时，Ω_n 必定收敛到无穷远点 $z=\infty$. 事实上，对于任意取定的值 $r>0$，$|f(z)-a|$ 在 $\Omega_0\bigcap(|z|\leqslant r)$ 上必有正的

下界. 于是当 n 充分大时, Ω_n 只能位在圆 $|z| \leqslant r$ 的外部, 即当 $n \to +\infty$, Ω_n 收敛到 ∞. 最后, 我们依次用位在 Ω_n 内的曲线 L_{zn} 连接点 z_n 和 z_{n+1}, 然后置 $L_z = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} L_{zn}$, 则 L_z 是一条始自 z_1 点位在 Ω_0 内且伸展到 ∞ 的连续曲线, 并且当 z 沿着 L_z 趋向 ∞ 时, $f(z)$ 趋近于值 a, 即 a 是 $f(z)$ 的一个渐近值. 明显地, L_z 在 F 上的映象 (L) 即是一条始自 (a_1) 点的曲线, 并且 L 位在圆 $|w-a|<\rho$ 内, 同时 L 趋近于点 a. 于是定理4.1完全得证.

根据定理4.1和Picard定理, 我们有下述推论:

系. 超越亚纯函数的一个Picard例外值同时是一个渐近值.

于是, 超越整函数必以 ∞ 作为渐近值.

4.1.3. Lindelöf定理

我们从定理3.2可以直接推论出下述经典Lindelöf定理[28a].

定理4.2 设 L_1 和 L_2 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的两条始自原点 $z=0$ 伸展到 ∞ 的简单连续曲线, 并且 L_1 和 L_2 除原点 $z=0$ 外彼此无交, 即界囿一个单连通区域 D. 再设 $f(z)$ 在 D 内全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续, 并且当 z 沿着 $L_i(i=1,2)$ 趋向于 ∞ 时, $f(z)$ 趋近于有穷极限值 a_i. 如果 $f(z)$ 在 D 内有上界 $N<+\infty$, 则必有 $a_1=a_2$, 同时当 z 在 $\bar{D}$ 上趋向于 ∞ 时, $f(z)$ 一致地趋近于值 $a(a=a_1=a_2)$.

证. 事实上, 只须经过一个适当的共形映照, 我们不妨将 D 看作是上半平面 $\mathrm{Im}z>0$, L_1 和 L_2 分别看作是正和负的实轴. 构造序列 $R_n=e^{5n\pi}(n=1,2,\cdots)$ 和记 $L_i(i=1,2)$ 位在圆环 $R_n<|z|<R_{n+1}$ 内部分为 L_{in}. 置

$$\varepsilon_{in}=\max_{z\in L_{in}}|f(z)-a_i|, i=1,2,$$

则当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\varepsilon_{in}\to 0$. 另外, 设 $|a_1|$ 和 $|a_2|$ 的上界为 $M<$

$+\infty$，则当 $a_1 \neq a_2$ 和 n 充分大时必有

$$(M+N)\left(\varepsilon_{1n}^{1/3}+\varepsilon_{2n}^{1/3}\right)<|a_1-a_2|.$$

借助于变换 $\zeta=\dfrac{z}{R_n}$，应用定理3.2，我们判定 $a_1=a_2$，同时在圆环 $R_n<|z|<R_{n+1}$ 中存在一条连接 L_1 和 L_2 的曲线 l_n，使得当 $z\in l_n$ 时有

$$|f(z)-a|\leqslant\varepsilon_{3n},\ a=a_1=a_2,$$
$$\varepsilon_{3n}=(M+N)\max\left(\varepsilon_{1n}^{1/3}+\varepsilon_{2n}^{1/3}\right)\to 0,\ n\to+\infty.$$

注意到 l_n，l_{n+1}，L_1 和 L_2 界围一个区域 D_n，则当 $z\in\bar{D}_n$ 时有

$$|f(z)-a|\leqslant\max\left\{\varepsilon_{3n},\varepsilon_{3n+1},\varepsilon_{1n},\varepsilon_{2n},\varepsilon_{1n+1},\varepsilon_{2n+1}\right\}\to 0,\ n\to+\infty.$$

于是 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上一致地趋近于值 a，即定理4.2得证.

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个超越整函数，并且 a_1 和 a_2 是 $f(z)$ 的两个有穷渐近值，其相应的定值路径 L_1 和 L_2 界围一个单连通区域 D. 如果 $f(z)$ 在 D 内有界，则根据定理4.2判定 $a=a_1=a_2$，同时 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上一致地趋近于值 a. 这说明 a_1 和 a_2 是非判别渐近值，即 a_1 和 a_2 是同一个渐近值. 于是，如果 a_1 和 a_2 是 $f(z)$ 的两个判别有穷渐近值，则 $f(z)$ 在 D 内必定无界. 事实上，我们有更强的结论[43c]:

定理4.3 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个超越整函数，a_1 和 a_2 是 $f(z)$ 的两个判别有穷渐近值，其相应的两条定值路径 L_1 和 L_2 分割开平面 $|z|<+\infty$ 为两个单连通区域 D_1 和 D_2. 则在 D_i $(i=1,2)$ 内存在一条伸展到 ∞ 的连续曲线 l_i，使得

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in l_i}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}\geqslant\frac{1}{2}.$$

证． 首先取定一个值 N，使得

$$\max_{z\in L_1\cup L_2} |f(z)| < N < +\infty,$$

并且导数 $f'(z)$ 在等位线 $|f(z)|=N$ 上无零点，即等位线 $|f(z)|=N$ 是解析的．然后，根据 a_1 和 a_2 是两个判别的有穷渐近值，以及 Lindelöf 定理（定理 4.2），我们判定 $f(z)$ 在 D_i $(i=1,2)$ 内无界．于是存在一点 $Z_{io}\in D_i$，使得

$$|f(z_{io})| > eN.$$

考虑集合

$$E=E\{z\,|\,|f(z)|>N\}.$$

记含有点 z_{io} 的连通分支为 Ω_i，则根据最大模原理，我们判定 Ω_i 是一个无界域，并且 $\Omega_i\subset D_i$，于是圆周 $|z|=t$ $(|z_o|\leqslant t<+\infty)$ 必定交于 Ω_i 的边界．我们用 θ_{it} 表示圆周 $|z|=t$ 位在 Ω_i 内的部分，用 $t\theta_i(t)$ 表示 θ_{it} 的线性测度，再置

$$M(t,\overline{\theta}_{it},f)=\max_{z\in\theta_{it}}|f(z)|,$$

则根据定理 3.1，当 $t>4|z_{io}|$ 时，我们有

$$\log|f(z_{io})|\leqslant \log N+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_{io}|}^{\frac{1}{2}t}\frac{dr}{r\theta_i(r)}}\log M(t,\overline{\theta}_{it},f),$$

$$\log eN\leqslant \log N+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_{io}|}^{\frac{1}{2}t}\frac{dr}{r\theta_i(r)}}\log M(t,\overline{\theta}_{it},f),$$

$$\log\log M(t,\overline{\theta}_{it},f)\geqslant \pi\int_{2|z_{io}|}^{\frac{1}{2}t}\frac{dr}{r\theta_i(r)}-\log 9\sqrt{2}\,.$$

注意到 $\theta_i(r)\leqslant 2\pi$ $(|z_{io}|<r<+\infty)$，则有

$$\log\log M(t,\overline{\theta}_{it},f)\geqslant \frac{1}{2}\log t-\log 36\sqrt{\frac{|z_{io}|}{2}}\,.$$

因此，只要t取得适当大，一方面在$\overline{\theta}_{it}$上必定存在一点z_{i1}，使得

$$|z_{i1}| \geqslant 72^{\frac{12\times 13}{2}},\ |z_{i1}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}} > 4N,\ \log|f(z_{i1})| \geqslant |z_{i1}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}},$$

因而$z_{i1}\in\theta_{it}\subset\Omega_i$;另一方面依照关系式

$$\log M(t_1',f) = \frac{1}{4}|z_{i1}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}}$$

所定义的值$t_1' > 1$.

以下，我们构造两个序列t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ 和t_n' $(n = 1, 2, \ldots)$.
首先置

$$\begin{cases} t_1 = |z_{i1}|, \\ t_{n+1} = 72^{n+12} t_n^{1+\varepsilon_n},\ \varepsilon_n = \dfrac{1}{n+11},\ n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{4.1}$$

注意到

$$t_n \geqslant 72^{n+11} t_{n-1} \geqslant 72^{(n+11)+(n+10)+\cdots+13} t_1 \geqslant 72^{\frac{1}{2}(n+11)(n+12)},$$

则有

$$72^{n+12} \leqslant t_n^{2\varepsilon_n}. \tag{4.2}$$

其次，依照关系式

$$\log M(t_n', f) = \frac{1}{4} t_n^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{4.3}$$

我们定义t_n'，则有

$$t_n' < t_{n+1}' \to +\infty\ (n\to+\infty),\ 1 < t_n',\ n = 1, 2, \cdots.$$

现在，我们证明下述事实：如果在圆周$|z| = t_n (n\geqslant 1)$上已经取到

一点 $z_{in}\in\Omega_i$, 使得

$$\log|f(z_{in})|\geqslant|z_{in}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n},$$

则在圆周 $|z|=t_{n+1}$ 上必定存在一点 $z_{in+1}\in\Omega_i$, 使得

$$\log|f(z_{in+1})|\geqslant|z_{in+1}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_{n+1}},$$

并且在 Ω_i 内存在一条连接 z_{in} 和 z_{in+1} 的连续曲线 L_{in}, 使得当 $z\in L_{in}$ 时有

$$\log|f(z)|\geqslant\frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-3\varepsilon_n},\quad t_n'\leqslant|z|\leqslant t_{n+1}.$$

在区间 $\left[\frac{1}{4}|z_{in}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n},\ \frac{1}{2}|z_{in}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}\right]$ 上存在值 A_n, 使得导数 $f'(z)$ 在等位线 $\log|f(z)|=A_n$ 上无零点，即等位线是解析的．考虑集合

$$E=E\{z|\log|f(z)|>A_n\}.$$

记含有点 z_{in} 的连通分支为 Ω_{in}. 注意到

$$\frac{1}{4}|z_{in}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}\geqslant\frac{1}{4}|z_{i1}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}}>N,$$

则有 $\Omega_{in}\subset\Omega_i$，另外，根据最大模原理，我们判定 Ω_{in} 是一个无界域．设 Ω_{in} 位在圆 $|z|<t_{n+1}$ 内部分且含有点 z_{in} 的连通分支为 D_{in}, 圆周 $|z|=t_{n+1}$ 属于 D_{in} 的边界部分为 θ_{in+1}, 则有 θ_{in+1} 上必定存在一点 z_{in+1} 使得

$$\log|f(z_{in+1})|\geqslant|z_{in+1}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_{n+1}}.$$

事实上，如果不然，则根据定理 3.1, 我们有

$$\log|f(z_{in})|\leqslant A_n+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_{in}|}^{\frac{1}{2}t_{n+1}}\frac{dr}{r\theta_i(r)}}t_{n+1}^{\frac{1}{2}-\varepsilon_{n+1}},$$

$$|z_{in}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n} \leqslant \frac{1}{2}|z_{in}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n} + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_{in}|}^{\frac{1}{2}t_{n+1}} \frac{dr}{r\theta_i(r)}} t_{n+1}^{\frac{1}{2}-\varepsilon_{n+1}},$$

$$t_n^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n} \leqslant 18\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_{in}|}^{\frac{1}{2}t_{n+1}} \frac{dr}{r\theta_i(r)}} t_{n+1}^{\frac{1}{2}-\varepsilon_{n+1}}$$

注意到$\theta_i(r) \leqslant 2\pi\ (o < r < t_{n+1})$，则有

$$t_n^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n} \leqslant 36\sqrt{2}\, \frac{t_n^{\frac{1}{2}}}{t_{n+1}^{\frac{1}{2}}} t_{n+1}^{\frac{1}{2}-\varepsilon_{n+1}}, \quad t_{n+1} < 72^{n+11} t_n^{1+\varepsilon_n}.$$

但是这与(4.1)式相矛盾.

根据连通性，在D_{in}内存在一条连接z_{in}和z_{in+1}的连续曲线L_{in}. 当$z \in L_{in}$时，我们有

$$\log|f(z)| \geqslant A_n \geqslant \frac{1}{4}|z_{in}|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}, \quad |z| \leqslant t_{n+1}.$$

另外，根据(4.3)式，判定$|z| \geqslant t'_n$. 再作进一步的讨论：如果$|z| \leqslant |z_{in}|$，则有

$$\log|f(z)| \geqslant \frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n} > \frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-3\varepsilon_n};$$

如果$|z| > |z_{in}|$，则有

$$\begin{aligned}\log|f(z)| &\geqslant \frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}\left\{\frac{t_n}{t_{n+1}}\right\}^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n} \\ &= \frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}\left\{\frac{1}{72^{n+12} t_n^{\varepsilon_n}}\right\}^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n}.\end{aligned}$$

再根据(4.2)式，得到

$$\log|f(z)| \geqslant \frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-3\varepsilon_n}.$$

于是，我们证明了当 $z \in L_{in}$ 时，有

$$\log|f(z)| \geqslant \frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-3\varepsilon_n},\ t_n' \leqslant |z| \leqslant t_{n+1}.$$

置

$$l_i = \sum_{n=1}^{+\infty} L_{in},$$

则 l_i 是一条始自点 z_{i1} 伸展到 ∞ 的连续曲线．注意到当 $n \to +\infty$ 时 $\varepsilon_n \to 0$，于是我们得到

$$\varliminf_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in l_i}} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|} \geqslant \frac{1}{2},$$

即定理 4.3 得证．

如果一个超越整函数 $f(z)$ 具有一个有穷渐近值 a，其相应定值路径为 L_a，则 $f(z)$ 在 L_a 上有上界 $N < +\infty$．但是 $f(z)$ 在 z 平面上无界，于是存在一点 z_0，使得 $|f(z_0)| > eN$．考虑集合

$$E = E\{z \mid |f(z)| > N\}.$$

记含有点 z_0 的连通分支为 Ω. 根据最大模原理，Ω 不能是一个有界域．另外圆周 $|z| = t\ (|z_0| < t < +\infty)$ 必定交于 Ω 的边界．作类似于上述的讨论，我们可以获得相应的结论．

如果 $f(z)$ 具有一个有穷亏值 a，其相应亏量 $\delta(a,f) = \delta > 0$，则当 $r \geqslant r_0$ 时，有

$$m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\,d\theta$$

$$\geqslant \frac{\delta}{2}T(r,f) \geqslant \frac{\delta}{2}T(r_0,f).$$

于是，在圆周 $|z|=r\ (r\geq r_0)$ 上存在一点 $z_r=re^{i\theta_r}$，使得

$$|f(z_r)-a|<e^{-\frac{\delta}{2}T(r_0,f)},$$

即$f(z)$ 在点集合 $E\{z_r|r\geq r_0\}$ 上有上界. 类似地讨论，我们同样可以获得相应的结论. 于是，我们有下述结果[43c]：

定理 4.4 设超越整函数$f(z)$ 具有一个有穷渐近值或一个有穷亏值，则在 z 平面上存在一条伸展到 ∞ 的连续曲线 L，使得

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}\geq\frac{1}{2}\ ^{1)}.$$

系. 在定理 4.4 的假定下，$f(z)$ 的下级 $\mu\geq\dfrac{1}{2}$.

4.1.4. Fuchs 定理

最近，W. Fuchs 证明了下述 Phragmen-Lindelöf 型定理[16a]：

定理 4.5 设 D 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个无界区域，其有限边界部分 Γ 至少含有一个点. 再设$f(z)$ 在 D 内全纯，并且对于每个边界点 $\zeta\in\Gamma$ 均有

$$\varlimsup_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}}|f(z)|\leq 1, \tag{4.4}$$

则在下述三种可能性中，必有一种且仅有一种可能性发生：

(1) 当 $z\in D$ 时有 $|f(z)|\leq 1$.

(2) 无穷远点 ∞ 是$f(z)$ 的一个极点.

(3) 我们有

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log M\{D\cap(|z|=r),f\}}{\log r}=+\infty.$$

---

1) K. Barth, D. Brannan 和 W. Hayman 证明了稍许更为精确的结果. 参见[5a].

证、 事实上，我们只须证明如果可能性(3)不发生，则可能性(1)或(2)必定发生. 为此，我们假设可能性(3)不发生，即有

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log M\{D\cap(|z|=r),f\}}{\log r}\leqslant p<+\infty. \tag{4.5}$$

如果进一步假设可能性(1)也不发生，则又有

$$1<\sup_{z\in D}|f(z)|=\alpha\leqslant+\infty. \tag{4.6}$$

由于导数$f'(z)$在D内至多有可数个零点，所以在开区间$(1,\alpha)$内存在值A，使得$f'(z)$在等位线

$$|f(z)|=A \tag{4.7}$$

上无零点. 于是等位线(4.7)是简单解析曲线，并且等位线(4.7)的每个分支或者是一简单闭曲线，或者在开平面$|z|<+\infty$上无端点. 考虑集合

$$D_A=E\{z\,|\,|f(z)|>A,z\in D\}, \tag{4.8}$$

则根据(4.6)式，我们判定D_A不是空集. 另一方面，根据最大模原理，我们判定D_A的每个分支都是无界域. 在D_A内任取一点z_0，并且记含有点z_0的连通分支为$D_A(z_0)$. 以下，我们区分两种情况讨论：

1) 等位线(4.7)包含一个无界分支. 于是存在一个值t_0，$t_0\geqslant|z_0|$，使得当$t\geqslant t_0$时，圆周$|z|=t$必定与$D_A(z_0)$的边界有交. 我们用θ_t表示圆周$|z|=t$位在$D_A(z_0)$内部分，$t\theta(t)$表示θ_t的线性测度. 则根据(4.8)式和定理3.1，我们有

$$\begin{aligned}\log|f(z_0)|&\leqslant\log A\\&\quad+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_0|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta(t)}}\log M\{D\cap(|z|=r),f\}\\&\leqslant\log A+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2t_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta(t)}}\log M\{D\cap(|z|=r),f\}.\end{aligned}$$

注意到$\theta(t) \leqslant 2\pi\ (t_0 \leqslant t < +\infty)$，则得

$$\log|f(z_0)| \leqslant \log A + 9\sqrt{2}\left(\frac{4t_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \log M\{D \cap (|z| = r), f\}.$$

命$r \to +\infty$，则根据(4.5)式，我们判定

$$|f(z_0)| \leqslant A.$$

但是这与(4.8)式相矛盾，从而说明(4.6)式不能成立，即当$z \in D$时有$|f(z)| \leqslant 1$. 于是可能性(1)发生.

2)等位线(4.7)的每个分支都是有界的.

我们首先说明圆周$|z| = r$至多与等位线(4.7)的有限个分支相交. 如果圆周$|z| = r$和D的交集非空，则交集是由一些开圆弧I所组成. 置

$$g(z) = f(z)\overline{f\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)},$$

则$g(z)$在I的任何一个闭圆弧$J \subset I$的邻域内全纯，并且当$|z| = r$时，有$g(z) = |f(z)|^2$. 现在，我们假设等位线(4.7)具有无穷多个分支$\{L_n\}$与圆周$|z| = r$有交. 在每个分支上取一点z_n, $|z_n| = r$. 不失一般性，可以假设$z_n \to Z$, $|Z| = r$, $g(Z) = A^2 = g(z_n)$.

根据(4.6)和(4.4)式，对于每一点$\zeta \in \Gamma$，存在一个邻域，使得在该邻域内有$|f(z)| < A$. 因此Z只能是I的一个内点，从而存在点Z的一个邻域，使得$g(z)$在该邻域内全纯，并且当n充分大时，点z_n位在该邻域内. 因为$g(z_n) = g(z) = A^2$，所以在I上应有$g(z) = |f(z)|^2 = A^2$. 因此，存在着不同的点z_n和$z_{n'}$ $(n \neq n')$属于同一个分支. 但是，这与我们的取法相矛盾. 于是圆周$|z| = r$仅与等位线(4.7)的有限个分支相交.

以下，我们证明D_A是一个域. 事实上，由于D_A的每个分支都是无界的，所以我们只需说明对于任意两个点$z_1, z_2 \in D_A$, $|z_1| = |z_2|$

$=r$, 在 D_A 内必定存在一条连接点 z_1 和 z_2 的连续曲线. 用圆周 $|z|=r$ 连接点 z_1 和 z_2, 如果遇到等位线 (4.7) 的一个分支 L_n, 则用 L_n 介在 L_n 与圆周 $|z|=r$ 的交点间的部分取代. 由于圆周 $|z|=r$ 仅与等位线 (4.7) 的有限个分支 L_n $(n=1,2,\cdots,m)$ 相交, 每个分支都是简单解析曲线, m 个分支彼此有正的距离, 所以我们可以按上述方式找到一条连接点 z_1 和 z_2 的曲线, 然后经过稍许移动, 就可以保证这条曲线位在 D_A 内. 因此, D_A 是一个区域.

置

$$D(r)=D_r\bigcap(c<|z|<r),$$

其中 c 是一个充分大的固定正数, 则 $D(r)$ 的边界 Γ_r 是由圆周 $|z|=c$ 和 $|z|=r$ 位在 D_A 内部分和位在圆环: $c<|z|<r$ 内部分的等位线 (4.7) 所组成. 现在, 在域 $D(r)$ 内, 我们对调和函数 $\log|f(z)|$ 应用 Gauss 定理, 则得

$$\int_{\Gamma_r}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,|ds|=0, \tag{4.9}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示 $\log|f(z)|$ 关于 Γ_r 的外法线方向导数, ds 表示弧长元素. 注意到在等位线 (4.7) 上应有

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\leqslant 0. \tag{4.10}$$

事实上, 等式不能成立, 这是因为同时有

$$\frac{\partial}{\partial s}\log|f(z)|=0$$

和

$$|f'(z)|=\left|\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|-\frac{\partial}{\partial s}\log|f(z)|\right|\neq 0$$

其中$\frac{\partial}{\partial s}$表示等位线(4.7)的切线方向导数.因此,在等位线(4.7)的任何一个分支L上有

$$\int_L \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z)| |ds| < 0. \tag{4.11}$$

进一步根据Cauchy-Riemann方程有

$$\int_L \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z)| |ds| = \Delta_L \arg f(z),$$

其中$\Delta_L \arg f(z)$表示当点z沿着L按顺时针方向绕行一周时,$\arg f(z)$的改变量.注意到$f(z)$是单值的,所以$\Delta_L \arg f(z)$是2π的整数倍.于是根据(4.11)式必有

$$\int_L \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z)| |ds| < -2\pi. \tag{4.12}$$

我们用$v(r)$表示等位线(4.7)整个地位在圆环:$c < |z| < r$内的分支个数,则根据(4.9),(4.10)和(4.12)式有

$$0 \leqslant -2\pi v(r) + \int_{re^{i\theta} \in D_A} \frac{\partial}{\partial r} \log |f(re^{i\theta})| \cdot r d\theta$$

$$- \int_{ce^{i\theta} \in D_A} \left[\frac{\partial}{\partial r} \log |f(re^{i\theta})| \right]_{r=c} \cdot c d\theta$$

$$\leqslant -2\pi v(r) + \int_{re^{i\theta} \in D_A} \frac{\partial}{\partial r} \log |f(re^{i\theta})| r d\theta + K$$

$$(K = K(c)).$$

进一步借助于积分，得到

$$2\pi\int_c^\rho \frac{\nu(r)}{r}dr \leqslant K\log\frac{\rho}{c} + \iint\limits_{re^{i\theta}\in D_A} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\theta})|drd\theta. \tag{4.13}$$

以下，我们估计这个二重积分．对于固定的值θ，集合$\Delta(\theta;c,\rho)\bigcap D_A$是由一些区间$\tilde{I}$所组成，并且当$\rho e^{i\theta}\in D_A$时，$\log|f(\rho e^{i\theta})|$是某个区间$I$的右端点值；当$ce^{i\theta}\in D_A$时，$\log|f(ce^{i\theta})|$是某个区间$I$的左端点值；而$\log A$则是其它区间$I$的端点值．于是

$$\int_{re^{i\theta}\in D(\rho)} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\theta})|dr \leqslant \log^+\left|\frac{f(\rho e^{i\theta})}{A}\right|,$$

其中当$re^{i\theta}\bar{\in} D_A$时，我们定义$|f(re^{i\theta})| = A$．进一步根据(4.13)式得到

$$2\pi\int_c^\rho \frac{\nu(r)}{r}dr \leqslant \int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{f(\rho e^{i\theta})}{A}\right|d\theta + K\log\frac{\rho}{c}.$$

再根据(4.5)式，存在无穷序列ρ_n:$\rho_n<\rho_{n+1}\to+\infty\ (n\to+\infty)$使得

$$2\pi\int_c^{\rho_n}\frac{\nu(r)}{r}dr \leqslant (P+K)\log\rho_n + K_1.$$

由于$\nu(r)$是非减函数，所以，我们判定

$$\nu(r)\leqslant P+K,$$

即等位线(4.7)的分支个数为有限．再注意到每个分支都是有界的，则存在值ρ，使得

$$\{\rho<|z|<+\infty\}\subset D_A.$$

当 $|z|>\rho$ 时，我们有 Laurant 展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

$$|c_n|=\left|\frac{R^{-n}}{2\pi}\int_{|z|=R} f(Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right| \ (R>\rho). \tag{4.14}$$

进一步根据(4.5)和(4.13)式，判定

$$|c_n|\leqslant R^{p-n}.$$

令 $R\to+\infty$，则当 $n>p$ 时，$c_n=0$. 于是，或者无穷远点 ∞ 是 $f(z)$ 的一个极点，即可能性(2)发生；或者 ∞ 是 $f(z)$ 的一个可去奇点，则根据最大模原理，我们判定可能性(1)发生. 于是定理4.5完全得证.

设 $w=f(z)$ 是一个超越亚纯函数，并且反函数 $z=\varphi(w)$ 以 ∞ 作为一个直接超越奇点. 于是存在一个数 $\rho>0$，使得在 z 平面上相应的区域 D_ρ 满足下述条件：

(1) 当 $z\in D_\rho$ 时，有

$$|f(z)|>\rho, \quad f(z)\neq\infty.$$

(2) 设 Γ_ρ 是 D_ρ 的有限边界部分，则当 $z\in\Gamma_\rho$ 时有

$$|f(z)|=\rho.$$

因此，根据 Fuchs 定理[1)]，我们判定

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log M\{D_\rho\cap(|z|=r),f\}}{\log r}=+\infty. \tag{4.15}$$

事实上，利用(4.15)式，我们可以证明下述更强的结论：

---

1) 关于 Fuchs 定理对直接超越奇点的应用，参见[43f].

定理 4.6 在上述假设下，区域 D_ρ 内必定存在一条连续伸展到 ∞ 的曲线 L，使得

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in L}} \frac{\log|f(z)|}{\log|z|} = +\infty.$$

这个定理的证明完全类似于后面对定理 4.14 的证明.

§4.2. Denjoy 猜测

4.2.1 Denjoy 猜测

1907 年 A. Denjoy 作了下述著名猜测[11a]：

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个整函数，其级 $\lambda<+\infty$，并且具有 k 个判别有穷渐近值，则必有 $k\leqslant 2\lambda$.

在特殊情况下，即当 k 条相应的渐近路径都是半直线的情况下，A. Denjoy 本人证明了这个猜测的正确性. 对于一般情况，直到 1930 年 L. Ahlfors 才完全证明了这个猜测. 事实上，他得到了更强的结论[1b]：

定理 4.7 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个整函数，具有 k 个判别有穷渐近值，则有

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{r^{k/2}} > 0.$$

证. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 $f(z)$ 的 k 个判别有穷渐近值，其相应的 k 条渐近路径 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 分割开平面 $|z|<+\infty$ 为 k 个单连通区域 $D_1, D_2, \cdots, D_k$. 置

$$N = \sup_{z\in\bigcup_{i=1}^{k}} |f(z)| < +\infty,$$

则根据 Lindelöf 定理，我们判定在 D_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 内存在点 z_i，使得

$$|f(z_i)| > e^2 N, \quad i=1,2,\cdots,k.$$

在开区间(N,eN)中存在值N',使得导数$f'(Z)$在等位线$|f(z)|=N'$上无零点,即等位线是解析的.考虑集合

$$E_i = E\{z \mid |f(z)| > N'\} \ (1 \leqslant i \leqslant k).$$

记含有点$z_i \in D_i$的连通分支为Ω_i,则有$\Omega_i \subset D_i$.另一方面,根据最大模原理,我们判定Ω_i是无界域.

设圆周$|z| = t$位在D_i内部分为θ_{it},$t\theta_i(t)$是θ_{it}的线性测度.于是根据定理3.1,我们有

$$\log(e^2N) < \log|f(z_i)| \leqslant \log N' + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}}\log M(r,f),$$

$$1 \leqslant 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}}\log M(r,f),$$

$$\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)} \leqslant \log\log M(r,f) + \log 9\sqrt{2},\ i = 1, 2, \cdots, k.$$

置

$$r_0 = \max_{1<i<k}\{|z_i|\},$$

和注意到

$$k^2 = \left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\theta_i(t)}\frac{1}{\sqrt{\theta_i(t)}}\right)^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}\theta_i(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\theta_i(t)} \leqslant 2\pi\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\theta_i(t)},$$

则得

$$\frac{k^2}{2}\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\pi\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t\theta_i(t)}$$

$$\leqslant k\log\log M(r,f) + k\log 9\sqrt{2},$$

$$\frac{k}{2}\log\frac{r}{4r_0}\leqslant \log\log M(r,f)+\log 9\sqrt{2},$$

$$\frac{\log M(r,f)}{r^{k/2}}\geqslant\frac{1}{(4r_0)^{k/2}9\sqrt{2}}.$$

于是

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,f)}{r^{k/2}}\geqslant\frac{1}{(4r_0)^{k/2}9\sqrt{2}}>0,$$

即定理4.7得证.

例. 整函数

$$w=\int_0^z\frac{\sin t^q}{t^q}dt\quad(q>0\text{是一个整数})$$

的级为q,并且具有$2q$个判别有穷渐近值

$$e^{\frac{\nu\pi i}{q}}\int_0^{\infty}\frac{\sin r^q}{r^q}dr,\quad \nu=1,2,\cdots,q,$$

其$2q$条相应的渐近路径为

$$\Delta(\theta_\nu):\arg z=\frac{\nu\pi}{q},\quad \nu=1,2,\cdots,2q.$$

这个例子说明Denjoy猜测是精确的.

4.2.2. 满足Denjoy猜测极值情况$k=2\lambda$的整函数

对于这类函数,L. Ahlfors[1b], P. Kennedy[26b]和D. Drasin[12a]

等人都曾进行过研究：主要是刻划了k条路径的分布情况．在这里，我们主要研究某些另外性质[43e]．

定理4.8 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数，其级$\lambda<+\infty$，并且具有$k(k\geqslant 1)$个判别有穷渐近值$a_i(i=1,2,\cdots,k)$，其相应渐近路径为$L_i(i=1,2,\cdots,k)$，L_i和$L_{i+1}(i=1,2,\cdots,k,L_{k+1}=L_1)$是相邻的，界囿一个单连通区域$D_i$．再假设$k=2\lambda$，则在$D_i(1\leqslant i\leqslant k)$内存在一条连续伸展到无穷的曲线$\Gamma_i$，使得

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in\Gamma_i}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}=\lambda.$$

证． (1)首先，根据$k=2\lambda$和定理4.7，我们有

$$\log\log M(r,f)=\frac{k}{2}\log r+o(\log r).\tag{4.16}$$

置

$$N=\sup_{z\in L}|f(z)|<+\infty,\quad L=\bigcup_{i=1}^{k}L_i\ ,$$

根据Lincleiöf定理，存在点$z_i\in D_i(i=1,2,\cdots,k)$，使得

$$|f(z_i)|\geqslant 2eN.\tag{4.17}$$

记

$$r_0=\max\{1,|z_1|,\cdots,|z_k|\}.\tag{4.18}$$

在区间$[N,2N]$中存在值N'，使得导数$f'(z)$在等位线$|f(z)|=N'$上无零点，于是等位线是解析的．考虑集合

$$E=E\{z\,|\,|f(z)|>N'\}.$$

记含有点 $z_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的连通分支为 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,k)$，则有 $\Omega_i\subset D_i(i=1,2,\cdots,k)$. 另外，根据最大模原理，我们判定 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,k)$是无界域.

(2)用 $\theta_{it}(1\leqslant i\leqslant k; r_0\leqslant t<+\infty)$表示圆周 $|z|=t$ 位在 Ω_i 内部份，$t\theta_i(t)$ 表示 θ_{it} 的线性测度.

现在我们先证明下面的引理：

引理4.1 任意给定$\varepsilon, 0<\varepsilon<1$, 必定存在值$r_\varepsilon, r_\varepsilon\geqslant 4r_0$, 使得当$r>r_\varepsilon$和 $2r_0\leqslant R<\dfrac{r}{2}$时，有

$$\left|\int_R^{\frac{1}{2}r}\left(\frac{\pi}{\theta_i(t)}-\frac{k}{2}\right)\frac{dt}{t}\right|\leqslant \varepsilon\log r,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

证. 根据定理3.1, 应有

$$\log|f(z_i)|\leqslant \log N'+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}}\log M(r,f),$$
$$i=1,2,\cdots,k.$$

再根据(4.16)和(4.17)式，导出

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{\pi}{\theta_i(t)}\cdot\frac{dt}{t}\leqslant k\log\log M(r,f)+k\log(9\sqrt{2}),$$

$$\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{\pi}{\theta_i(t)}-\frac{k}{2}\right\}\frac{dt}{t}\leqslant k\left\{\log\log M(r,f)-\frac{k}{2}\log r\right\}$$
$$+\frac{k^2}{2}\log(4r_0)+k\log(9\sqrt{2}).$$

注意到$\sum\limits_{i=1}^{k}\left\{\dfrac{\pi}{\theta_i(t)}-\dfrac{k}{2}\right\}\geqslant 0$和(4.16)式，我们判定

$$\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{\pi}{\theta_i(t)}-\frac{k}{2}\right\}\frac{dt}{t}=o(\log r).$$

进一步，根据恒等式[26a]

$$\frac{\pi}{\theta_i(t)} - \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4\pi}\left\{\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t) + \frac{\left(\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t)\right)^2}{\theta_i(t)}\right\}, \tag{4.19}$$

判定

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r} \frac{\left(\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t)\right)^2}{\theta_i(t)} \cdot \frac{dt}{t} = o(\log r),$$

$$\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r} \frac{\left(\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t)\right)^2}{\theta_i(t)} \cdot \frac{dt}{t} = o(\log r), \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

因此，对任意给定的数 ε, $0 < \varepsilon < 1$, 必定存在值 r_ε, $r_\varepsilon \geqslant 4r_0$, 使得当 $r \geqslant r_\varepsilon$ 和 $2r_0 \leqslant R < \frac{1}{2}r$ 时，我们有

$$\int_{R}^{\frac{1}{2}r} \frac{\left(\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t)\right)^2}{\theta_i(t)} \cdot \frac{dt}{t} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{k^4}\log r, \quad i = 1, 2, \cdots, k, \tag{4.20}$$

$$\int_{R}^{\frac{1}{2}r}\left(\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t)\right)\frac{dt}{t} \leqslant \frac{2\pi\varepsilon^2}{k^4}\log r, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

借助于 Schwarz 不等式，并注意到 $R \geqslant 2$, 则得

$$\left|\int_{R}^{\frac{1}{2}r}\left(\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t)\right)\frac{dt}{t}\right| \leqslant \left\{\int_{R}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\int_{R}^{\frac{1}{2}r}\left(\frac{2\pi}{k} - \theta_i(t)\right)^2\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}{k^2}\log r, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

再结合 (4.19) 和 (4.20) 式，给出

$$\left|\int_{R}^{\frac{1}{2}r}\left(\frac{\pi}{\theta_i(t)}-\frac{k}{2}\right)\frac{dt}{t}\right| \leqslant \varepsilon\log r,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

引理证毕.

(3) 置 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则存在正整数 $n_0\,(n_0\geqslant 2)$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\varepsilon_n<\frac{k}{2(2k+1)}.$$

再置

$$\varepsilon_n'=\frac{1}{1+\varepsilon_n}\varepsilon_n^2\quad (n=1,2,\cdots),$$

则根据引理4.1，存在序列 $r_n\ (n=n_0,n_0+1,\cdots)$，使得序列 r_n 满足条件：

$$r_{n_0}\geqslant\max\left\{K^{\frac{1}{2}n_0(n_0+1)},\ (8N)^{\frac{1}{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n_0}}},\ (4\log M(1,f))^{\frac{1}{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n0-1}}},\right.$$

$$\left.r_0^{\frac{1}{2}k(n_0-1)}\right\}\quad (K=36\times 2^k),\tag{4.21}$$

$$r_n<r_{n+1}\to+\infty\quad (n\to+\infty),$$

以及当 $r\geqslant\max\{4r_0,r_n\}$ 和 $2r_0\leqslant R<\dfrac{r}{2}$ 时，有

$$\left|\int_{R}^{\frac{1}{2}r}\left(\frac{\pi}{\theta_i(t)}-\frac{k}{2}\right)\frac{dt}{t}\right| \leqslant \varepsilon_n'\log r,\quad i=1,2,\cdots,k.\tag{4.22}$$

现在，我们定义序列 $m_n\ (n \geqslant n_0)$ 和 $R_m\ (m \geqslant m_{n_0})$ 如下：

首先取 $R_{m_{n_0}} = r_{n_0}$, $m_{n_0} = 0$，然后假定对于值 $n (n \geqslant n_0)$，$m_n \geqslant 0$ 和 $R_{m_n} > 1$ 均已取定. 于是我们定义

$$R_{m_n+1} = K^{n+1} R_{m_n}^{1+2\varepsilon_{n-1}},\ R_{m_n+l} = K^{n+1} R_{m_n+l-1}^{1+\varepsilon_n},\ l = 2, 3, \cdots.$$

必定存在值 l_0, $l_0 > 2$ 使得 $l \geqslant l_0$ 时，有

$$R_{m_n+1} \geqslant r_{n+1},$$

则置 $m_{n+1} = m_n + l_0$, $R_{m_{n+1}} = K^{n+1} R_{m_{n+1}-1}^{1+\varepsilon_n}$. 按照这种方式，我们定义了序列 $m_n\ (n \geqslant n_0)$ 和 $R_m\ (m \geqslant m_{n_0})$. 序列 $m_n\ (n \geqslant n_0)$ 和 $R_m\ (m \geqslant m_{n_0})$ 满足下述条件：

$$\left.\begin{aligned}
&R_{m_0} = r_{n_0},\\
&R_{m+1} = K^{n+1} R_m^{1+2\varepsilon_{n-1}}, \quad m = m_n,\\
&R_{m+1} = K^{n+1} R_m^{1+\varepsilon_n}, m = m_n+1, m_n+2, \cdots m_{n+1}-1,\\
&R_{n_0} = 0, m_{n+1} > m_n + 2,\\
&R_{m_n} \geqslant r_n, n = n_0, n_0 + 1, \cdots.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.23)$$

另外，当 $m_n + 1 \leqslant m \leqslant m_{n+1}$ 时，根据(4.21)和(4.23)式，我们判定 $R_m \geqslant K^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$. 最后，依照关系式

$$\log M\ (R'_n, f) = \frac{1}{4} R_{m_n}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n-1}}, \quad n = n_0, n_0 + 1, \cdots; \qquad (4.24)$$

我们定义序列 $R'_n\ \ (n = n_0, n_0 + 1, \cdots)$. 根据 $R_{m_n} \geqslant R_{m_0}$, $\varepsilon_{n-1} < \varepsilon_{n_0-1}\ \ (n \geqslant n_0)$ 和(4.21)式，我们判定 $R'_n \geqslant 1\ (n \geqslant n_0)$，另外还有 $R'_n < R'_{n+1} \to +\infty\ (n \to +\infty)$.

(4) 本段我们再证明下述两个引理，首先简记 $\theta_{iR_m} \equiv \theta_{im}\ (1 \leqslant i \leqslant k; m \geqslant 0)$.

引理4.2 当$m=m_{n+1}\ (n\geqslant n_0)$时，设在$\theta_{im}\ (1\leqslant i\leqslant k)$上存在一点$z_{im}$，使得

$$\log|f(z_{im})|\geqslant R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n},$$

则在θ_{im+1}上必定存在一点z_{im+1}，使得

$$\log|f(z_{im+1})|\geqslant R_{m+1}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n+1}},$$

并且在Ω_i内存在一条连接z_{im}和z_{im+1}的连续曲线Γ_{im}，使得当$z\in\Gamma_{im}$时有

$$\log|f(z)|>\frac{1}{4}R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n},\ R'_{n+1}\leqslant|z|\leqslant R_{m+1}.$$

证．在区间$\left[\frac{1}{4}R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n},\frac{1}{2}R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n}\right]$上存在值$N''$，使得导数$f'(z)$在等位线$\log|f(z)|=N''$上无零点，即等位线是解析的．考虑集合

$$E=E\{z|\log|f(z)|>N'',\ |z|<R_{m+1}\}.$$

记含有点z_{im}的连通分支为Ω_{im}. 根据$R_m\geqslant r_{n_0}$, $\varepsilon_n<\varepsilon_{n+1}$和(4.21)式，我们判定$\Omega_{im}\subset\Omega_i$. 另一方面，根据最大模原理，$\theta^*{}_{im+1}\equiv\bar{\Omega}_{im}\bigcap(|z|=R_{m+1})$不是空集．明显地，$\theta^*{}_{im+1}\subset\theta_{im+1}$. 以下，我们证明在$\theta^*{}_{im+1}$上存在一点$z_{im+1}$，使得

$$\log|f(z_{im+1})|\geqslant R_{m+1}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n+1}}.$$

事实上，如果不然，则根据定理3.1，应有

$$\log|f(z_{im})|\leqslant N''+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2R_m}^{\frac{1}{2}R_{m+1}}\frac{dt}{t\theta_i(t)}}R_{m+1}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n+1}},$$

$$R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n} \leqslant \frac{1}{2} R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n}$$

$$+ 9\sqrt{2}\, e^{\int_{2R_m}^{\frac{1}{2}R_{m+1}} \left(\frac{\pi}{\theta_i(t)} - \frac{k}{2}\right)\frac{dt}{t} - \frac{k}{2}\log\frac{R_{m+1}}{4R_m}} R_{m+1}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n+1}}.$$

再根据(4.22)和(4.23)式，导出

$$K \leqslant 18\sqrt{2} \times 2^k.$$

但是，这与 $K = 36 \times 2^k$ 相矛盾.

根据连通性，在 Ω_{im} 内存在连接 z_{im} 和 z_{im+1} 的连续曲线 Γ_{im}，并且当 $z \in \Gamma_{im}$ 时，有

$$\log|f(z)| \geqslant N'' \geqslant \frac{1}{4} R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n}, \quad |z| \leqslant R_{m+1}.$$

另外，根据(4.24)式，我们判定 $|z| \geqslant R'_{n+1}$. 于是，引理 4.2 得证.

类似地，我们可以证明下述引理：

引理 4.3 当 $m_n + 1 \leqslant m \leqslant m_{n+1} - 1$ $(n \geqslant n_0)$ 时，设在 $\theta_{im}(1 \leqslant i \leqslant k)$ 上存在一点 z_{im}，使得

$$\log|f(z_{im})| \geqslant R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n},$$

则在 θ_{im+1} 上必定存在一点 z_{im+1}，使得

$$\log|f(z_{im+1})| \geqslant R_{m+1}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n},$$

并且在 Ω_i 内存在一条连接点 z_{im} 和 z_{im+1} 的连续曲线 Γ_{im}，使得当 $z \in \Gamma_{im}$ 时，有

$$\log|f(z)| \geqslant \frac{1}{4} R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n}, R'_n < |z| < R_{m+1}.$$

(5)现在，我们完成定理4.8的证明.类似于引理4.2的证明，借助于定理3.1，根据(4.17)，(4.18)和(4.21)—(4.23)式，我们可以判定在θ_{im} $(1 \leqslant i \leqslant k, m = m_0 + 1)$上存在一点$z_{im_{n_0}+1}$，使得

$$\log |f(z_{im_{n_0}+1})| \geqslant R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_{n0}}.$$

其次，重复应用引理4.2和4.3，我们依次得到点列z_{im} $(1 \leqslant i \leqslant k; m = m_{n_0}+1, m_{n_0}+2, \cdots)$ 和 曲 线 序 列 Γ_{im} $(m = m_{n_0}+1, m_{n_0}+2, \cdots)$，使得当$z \in \Gamma_{im}$ $(m_n + 1 \leqslant m \leqslant m_{n+1}; n \geqslant n_0)$时，有

$$\log |f(z)| \geqslant \frac{1}{4} R_m^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n}, \quad R'_n \leqslant |z| \leqslant R_{m+1}. \tag{4.25}$$

再作进一步讨论：当$|z| < R_m$时，有

$$\log |f(z)| \geqslant \frac{1}{4} |z|^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n}; \tag{4.26}$$

当$R_m \leqslant |z| \leqslant R_{m+1}$时，有

$$\log |f(z)| \geqslant \frac{1}{4} |z|^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n} \left\{ \frac{R_m}{R_{m+1}} \right\}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n}.$$

进一步根据$R_m \geqslant K^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$和(4.23)式，我们判定

$$\left\{ \frac{R_m}{R_{m+1}} \right\}^{\frac{k}{2}-\varepsilon_n} \geqslant R_m^{-2k\varepsilon_n}.$$

于是

$$\log |f(z)| \geqslant \frac{1}{4} |z|^{\frac{k}{2}-(2k+1)\varepsilon_n}.$$

结合(4.26)式，当 $z\in \Gamma_{im}(m_n+1\leqslant m\leqslant m_{n+1};n\geqslant n_0)$ 时总有

$$\log|f(z)|\geqslant \frac{1}{4}|z|^{\frac{k}{2}-(2k+1)\varepsilon_n}.$$

置

$$\Gamma_i=\sum_{m=m_0+1}\Gamma_{im},\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

根据 $R'_n\to+\infty\ (n\to+\infty)$ 和(4.25)式，我们判定 Γ_i 是一条连续趋于 ∞ 的曲线，并且明显地有 $\Gamma_i\subset\Omega_i\subset D_i$ 以及

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in\Gamma_i}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}=\lambda.$$

于是定理4.8完全得证.

定理4.9 在定理4.8的假设下，$f(z)$ 的任何两条相邻 λ 级 Borel 方向间的夹角 $\leqslant\frac{\pi}{\lambda}$.

证. 假设定理4.9不成立，即存在两条相邻 λ 级 Borel 方向 $\Delta(\theta_1)$ 和 $\Delta(\theta_2)$ $(0\leqslant\theta_1<\theta_2<2\pi)$，使得 $\theta_2-\theta_1>\frac{\pi}{\lambda}$. 以下，我们将导出矛盾.

(1)取定一个数 ε，使得 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$ 和 $\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1-\varepsilon}<\lambda$. 根据引理2.13，我们有

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+M\{\overline{\Omega}(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R),f\}}{\log R}\leqslant\lambda'<\lambda.$$

于是，对于任意小的数 $\eta>0$，只要 R 充分大，就有

$$\log M\{\overline{\Omega}(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R),f\}\leqslant R^{\lambda'+\eta},\tag{4.27}$$

同时根据级的定义有

$\log M(R,f) \leqslant R^{\lambda+\eta}$.

另外，根据定理4.8，在 D_i 内存在一条连续趋于 ∞ 的曲线 Γ_i，使得当 $z\in\Gamma_i$ 和 $|z|\geqslant R$ 时，有

$$\log|f(z)| > R^{\lambda-\eta}.$$

(2) 以下我们说明，当 R 充分大时，至多存在一条渐近路径 L_{i_0} $(1\leqslant i_0\leqslant k)$ 交于 $T(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R)$. 事实上，如果不然，则存在两条渐近路径 L_{i_1} 和 L_{i_2} $(1\leqslant i_1< i_2\leqslant k)$ 均交于 $T(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R)$. 于是 Γ_{i_1} 必交于 $T(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R)$. 设这个交点为 z_1，则有

$$\log|f(z_1)|\geqslant R^{\lambda-\eta}.$$

但是，只要 η 适当小，该式与(4.27)式相矛盾.

现在，我们考虑只有一条渐近路径 L_{i_0} $(1\leqslant i_0\leqslant k)$ 交于 $T(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R)$ 时的情况. 首先，设 Γ_i 和圆周 $|z|=R$ 的交点为 z_i $(i=1,2,\cdots,k)$，则有

$$\log|f(z_i)|\geqslant R^{\lambda-\eta} \tag{4.28}$$

并且还有

$$\arg z_{i_0}>\theta_2-\varepsilon,\ \arg z_{i_0-1}<\theta_1+\varepsilon \quad (z_0\equiv z_K).$$

置

$$R^{\lambda-\eta}=4R_2^{\lambda'+\eta}, \tag{4.29}$$

则有

$$\frac{R_2}{4R}=4^{-\frac{\lambda'+\eta+1}{\lambda'+\eta}}R^{\frac{\lambda-\lambda'-2\eta}{\lambda'+\eta}}\to+\infty \quad (R\to+\infty), \tag{4.30}$$

$$\log R = \frac{\lambda' + \eta}{\lambda - \lambda' - 2\eta} \log \frac{R_2}{4R} + \frac{\lambda' + \eta + 1}{\lambda - \lambda' - 2\eta} \log 4. \tag{4.31}$$

在区间$[R_2^{\lambda'+\eta}, 2R_2^{\lambda'+\eta}]$上存在值$N$,使得$f'(z)$在等位线$\log|f(z)| = N$上无零点,即等位线是解析的.考虑集合

$$E = E\{z \mid \log|f(z)| > N, |z| < R_2\}.$$

记含有点$z_i(i = 1, 2, \cdots, k)$的连通分支为$\Omega_i(i = 1, 2, \cdots, k)$. 明显地,只要$R$充分大,就有

$$\Omega_i \subset D_i \cap (|z| < R_2), i = 1, 2, \cdots, k,$$

并且Ω_{i_0}和Ω_{i_0-1} ($\Omega_0 \equiv \Omega_k$) 均与$\Omega(\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon; R_2)$无交.另外,根据最大模原理,我们判定$\overline{\Omega}_i \cap (|z| = R_2)$不是空集.用$\theta_{it}$表示圆周$|z| = t$位在$\Omega_i$内的部分,$t\theta_i(t)$表示$\theta_{it}$的线性测度.于是根据定理3.1,应有

$$\log|f(z_i)| \leqslant N + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi \int_{2R}^{\frac{1}{2}R_2} \frac{dt}{t\theta_i(t)}} R_2^{\lambda+\eta}, i = 1, 2, \cdots, k.$$

再根据(4.28)和(4.29)式,导出

$$\pi \int_{2R}^{\frac{1}{2}R_2} \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\theta_i(t)} \cdot \frac{dt}{t} \leqslant k(\lambda + \eta) \log R_2$$

$$- k(\lambda - \eta) \log R + k \log 18\sqrt{2}.$$

另一方面,注意到

$$k^2 = \left\{\sum_{i=1}^{K} \sqrt{\theta_i(t)} \frac{1}{\sqrt{\theta_i(t)}}\right\}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{K} \theta_i(t) \cdot \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\theta_i(t)}$$

$$\leqslant \{2\pi - (\theta_2 - \theta_1 - 2\varepsilon)\} \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\theta_i(t)},$$

$$\frac{\pi}{2\pi-(\theta_2-\theta_1-2\varepsilon)}k^2 \leqslant \pi\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{\theta_i(t)},$$

则得

$$\frac{\pi}{2\pi-(\theta_2-\theta_1-2\varepsilon)}k^2\log\frac{R_2}{4R} \leqslant k(\lambda+\eta)$$

$$\log R_2 - k(\lambda-\eta)\log R + k\log 18\sqrt{2}.$$

进一步根据(4.31)式有

$$\frac{\pi}{2\pi-(\theta_2-\theta_1-2\varepsilon)}\lambda\log\frac{R_2}{4R} \leqslant (\lambda+\eta)\log\frac{R_2}{4R}$$

$$+\frac{\lambda'+\eta}{\lambda-\lambda'-2\eta}2\eta\log\frac{R_2}{4R}$$

$$+\log\left(18\sqrt{2}\times 4^{\lambda+\eta}\times 4^{\frac{\lambda'+\eta+1}{\lambda-\lambda'-2\eta}\cdot 2\eta}\right).$$

命 $R\to+\infty$ 和 $\eta\to 0$, 则根据(4.30)式, 我们判定

$$\frac{2\pi}{2\pi-(\theta_2-\theta_1-2\varepsilon)}\lambda \leqslant \lambda.$$

于是得到矛盾.

最后, 考虑不存在渐近路径 $L_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 交于 $\Gamma(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R)$ 时的情况. $\Gamma(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon;R)$ 必定整个地位在某个域 $D_{i_0}(1\leqslant i_0\leqslant k)$ 内. 同样地, 我们有点 $z_i(i=1,2,\cdots,k)$, 并且有

$$\arg z_{i_0} < \theta_1+\varepsilon, \text{或} \arg z_{i_0} > \theta_2-\varepsilon.$$

以下, 作类似地讨论, 我们也将导出矛盾. 于是定理4.9完全得证.

系. 在定理4.8的假设下, 若记 $f(z)$ 的 λ 级 Borel 方向数为 q,

则有 $k \leqslant q$.

定理4.-10 在定理4.8的假设下，如果进一步设 $q < +\infty$，则 $f(z)$ 的 k 条渐近路径必定分别渐近于 k 条 λ 级 Borel 方向[1]，同时在这 k 条 Borel 方向之间，任何相邻两条间的夹角 $= \frac{\pi}{\lambda}$.

证. 记 $f(z)$ 的 $q < +\infty$ 条 λ 级 Borel 方向为 $\Delta(\theta_j)$ ($j = 1, 2, \cdots, q; 0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < 2\pi$). 置

$$\omega = \min_{1 \leqslant j \leqslant q} (\theta_{j+1} - \theta_j), \theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi.$$

首先，我们证明渐近路径 $L_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 必定渐近于一条 λ 级 Borel 方向 $\Delta(\theta_{j_i})$ ($1 \leqslant j_i \leqslant q$). 事实上，如果不然，则至少存在一个渐近路径 $L_{i_0} (1 \leqslant i_0 \leqslant k)$，使得 L_{i_0} 不能渐近于 $\Delta(\theta_j)$ ($j = 1, 2, \cdots, q$). 于是，存在数 $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{\omega}{8}$ 和相应的无穷序列 R_n ($n = 1, 2, \cdots$), $R_n < R_{n+1} \to +\infty (n \to +\infty)$，使得 L_{i_0} 交于某个 $\Gamma(\theta_{j_n} + 3\varepsilon, \theta_{j_{n+1}} - 3\varepsilon; R_n)$ ($1 \leqslant j_i \leqslant q$). 通过选取 R_n 的一个子序列的办法，我们不妨假设 θ_{j_n} 与 n 无关. 因而确定了两条相邻的 λ 级 Borel 方向 $\Delta(\theta_j)$ 和 $\Delta(\theta_{j+1})$ ($j = j_n$).

根据定理2.14，存在两个判别有穷复数 α 和 β 使得

$$\varlimsup_{R \to +\infty} \frac{\log^+ n\{\Omega(\theta_j + \varepsilon, \theta_{j+1} - \varepsilon; R), f = X\}}{\log R} \leqslant \lambda' < \lambda,$$

$$X = \alpha, \beta.$$

设 α, β, ∞ 间的相互球距均大于 $d, 0 < d < \frac{1}{2}$. 我们先取一个数 σ，使

---

1) 称一条连续伸展到 ∞ 的曲线 L 渐近于一条半直线 $\Delta(\theta)$. 如果任给 $\varepsilon > 0$，存在值 $R > 0$，使得 L 位在圆 $|z| \leqslant R$ 外的部分，整个地位在 $\Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon; R, +\infty)$ 内.

得σ满足下述条件：

$$\frac{(\lambda-\lambda')(\theta_{j+1}-\theta_j-2\varepsilon)}{\lambda(\theta_{j+1}-\theta_j-2\varepsilon)+2[6\pi+\lambda'(\theta_{j+1}-\theta_j-2\varepsilon)]}$$

$$<\sigma<\frac{(\lambda-\lambda')(\theta_{j+1}-\theta_j-2\varepsilon)}{2[6\pi+\lambda'(\theta_{j+1}-\theta_j-2\varepsilon)]}{}^{1)}, \tag{4.32}$$

然后应用将在第五章证明的一个引理(引理5.2)，置其中的$\theta=\frac{1}{2}(\theta_{j+1}-\theta_j)-\varepsilon, R_1=R_2^{1-\sigma}, R=R_2=R_n, L=L_{i_0}\cap\overline{\Omega}(\theta_j+3\varepsilon,\theta_{j+1}-3\varepsilon;R_1,R_2), H=\varepsilon, a=a_{i_0}$和$N=0$，则对任意小的数$\eta>0$，只要$n$充分大，对位在$\overline{\Omega}(\theta_j+3\varepsilon,\theta_{j+1}-3\varepsilon;R_1,R_2)$上的点$z$有

$$|f(z)-a_{i_0}|\leqslant\exp\left\{A(\varepsilon,\theta,d)R_n^{\frac{12\pi\sigma}{\theta_{j+1}-\theta_j-2\varepsilon}}\right.$$

$$\left.\times\left[R_n^{2(\lambda'+\eta)\sigma}\cdot R_n^{\lambda'+\eta}\cdot\sigma\log R_n+\log^+|a_{i_0}|\right]\right\}.$$

于是，只要n充分大，对位在$\overline{\Omega}(\theta_j+3\varepsilon,\theta_{j+1}-3\varepsilon;R_n^{1-\sigma},R_n)$上的点$z$得到

$$\log|f(z)|\leqslant R_n^{\lambda''+\eta''}, \tag{4.33}$$

$$\lambda''=\lambda'+\frac{12\pi\sigma}{\theta_{j+1}-\theta_j-2\varepsilon}+2\lambda'\sigma, \eta''=2(\sigma+1)\eta.$$

根据(4.32)式，我们判定$\lambda''<\lambda$. 另外，只要η充分小，就有$\lambda''+\eta''<\lambda-\eta''$. 定义值$R$，使得

$$R^{\lambda-\eta''}=4R_n^{\lambda''+\eta''}, \tag{4.34}$$

---

1) 为了保证$\sigma<1$，我们总可以取λ'充分接近于λ.

则有 $R < R_n$. 另一方面，根据(4.32)式，判定 $\lambda'' > (1-\sigma)\lambda$. 于是，只要 η 充分小，就有 $\lambda'' + \eta'' > (1-\sigma)(\lambda + \eta'')$. 因此，我们判定

$$R_n^{\lambda''+\eta''} > R_n^{(1-\sigma)(\lambda+\eta'')} = R_1^{\lambda+\eta''}, \tag{4.35}$$

$$R^{\lambda-\eta''} > R_1^{\lambda+\eta''}, R > R_1.$$

现在，设 Γ_i 和圆周 $|z| = R$ 的交点为 $z_i (1 \leqslant i \leqslant k)$，则根据定理4.8，只要 n 充分大，应有

$$\log|f(z_i)| \geqslant R^{\lambda-\eta''}.$$

明显地，根据(4.33)和(4.34)式，我们判定 $z_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 不能位在 $\overline{\Gamma}(\theta_j + 3\varepsilon, \theta_{j+1} - 3\varepsilon; R)$ 上. 以下，我们作类似于定理4.9证明的讨论，并且注意到根据(4.35)式，这里相应的 $\Omega_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 不能达到于圆周 $|z| = R_1$，则可导出矛盾.

其次，我们证明两条判别的渐近路径 L_{i_1} 和 $L_{i_2} (1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant k)$ 不能同时渐近于同一条Borel方向 $\Delta(\theta_j) (1 \leqslant j \leqslant q)$. 事实上，如果不然，设 L_{i_1} 和 L_{i_2} 同时渐近于 $\Delta(\theta_j)$. 取数 ε, $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2\lambda}$，则存在值 R_0，使得 L_{i_1} 和 L_{i_2} 位在圆 $|z| \leqslant R_0$ 外的部分，都整个地位在 $\Omega(\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon; R_0, +\infty)$ 内. 记 L_{i_1} 和 L_{i_2} 界囿的单连通域为 D，则根据Lindelöf定理，存在点 $z_0 \in D$，使得

$$|f(z_0)| > 2eN, \ N = \sup_{z \in L_{i_1} \cup L_{i_2}} |f(z)| < +\infty. \tag{4.36}$$

在区间 $[N, 2N]$ 中存在值 N'，使得 $f'(z)$ 在等位线 $|f(z)| = N'$ 上无零点，即等位线是解析的. 考虑集合

$$E = E\{z \mid |f(z)| > N'\},$$

记含有 z_0 的连通分支为 Ω，则有 $\Omega \subset D$. 另外，根据最大模原理，我们判定 Ω 是无界域. 用 θ_t 表示圆周 $|z| = t$ 位在 Ω 内的部分，$t\theta(t)$ 表

示 θ_t 的线性测度．应用定理 3.1，我们有

$$\log|f(z_0)| \leqslant \log N' + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_0|}^{\frac{1}{2}R}\frac{dt}{t\theta(t)}} \log M(R,f).$$

注意到当 $\max\{2|z_0|, 2R_0\} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}R$ 时有 $\theta(t) \leqslant 2\varepsilon$，以及当 η 充分小和 R 充分大时有

$$\log M(R,f) \leqslant R^{\lambda+\eta}.$$

于是，根据(4.36)式，得到

$$1 \leqslant 9\sqrt{2} \times 4^{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \times \left\{\frac{\max(|z_0|, R_0)}{R}\right\}^{\frac{\pi}{2\varepsilon}} R^{\lambda+\eta}.$$

进一步根据 $\frac{\pi}{2\varepsilon} > \lambda$ 和 η 充分小，则当 R 充分大时，我们导出矛盾．

最后，设 $L_i(i=1,2,\cdots,k)$ 分别渐近于 $\Delta(\theta_{j_i})$ $(i=1,2,\cdots,k; 0 \leqslant \theta_{j_1} < \theta_{j_2} < \cdots < \theta_{j_k})$．我们证明

$$\theta_{j_{i+1}} - \theta_{j_i} = \frac{\pi}{\lambda}, i = 1, 2, \cdots, k, \theta_{j_{k+1}} = \theta_{j_1} + 2\pi.$$

事实上，如果不然，则发生两种典型情况：

(1) $\theta_{j_2} - \theta_{j_1} < \frac{\pi}{\lambda}$．首先，取定数 ε，使得 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda} - (\theta_{j_2} - \theta_{j_1})\right)$．以后，我们可以类似地得到 R_0，z_0 和不等式

$$1 \leqslant 9\sqrt{2} \times 4^{\frac{\pi}{\theta_{j_2}-\theta_{j_1}+2\varepsilon}} \times \left\{\frac{\max(|z_0|, R_0)}{R}\right\}^{\frac{\pi}{\theta_{j_2}-\theta_{j_1}+2\varepsilon}} R^{\lambda+\eta}.$$

于是根据 $\frac{\pi}{\theta_{j_2} - \theta_{j_1} + 2\varepsilon} > \lambda$ 和 η 充分小，当 R 充分大时，我们将导

出矛盾.

(2) $\theta_{j_2}-\theta_{j_1}>\frac{\pi}{\lambda}$, 明显地有

$$2\pi=\sum_{i=1}^{k}(\theta_{j_{i+1}}-\theta_{j_i})=\theta_{j_2}-\theta_{j_1}+\sum_{i=2}^{k}(\theta_{j_{i+1}}-\theta_{j_i})$$

$$>\frac{\pi}{\lambda}+(k-1)\frac{\pi}{\lambda}=k\frac{\pi}{\lambda}=2\pi.$$

于是我们得到矛盾,即定理4.10完全得证.

定理4.11 在定理4.8的假设下,对任意值θ, $0\leqslant\theta<2\pi$, 或者$\Delta(\theta)$是$f(z)$的一条λ级Borel方向,或者存在一个数σ, $0<\sigma<\frac{\pi}{4}$, 使得

$$\lim_{\substack{|z|=+\infty\\ z\in(\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma)-E)}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}=\lambda, \tag{4.37}$$

其中E是$\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma)$内的一个点集合,并且满足条件:

$$\lim_{r\to+\infty}\operatorname{mes}\{\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma;r,+\infty)\cap E\}=0. \tag{4.38}$$

证. 不失一般性,我们只须证明,如果$\Delta(0)$不是$f(z)$的一条λ级Borel方向,则必定存在数σ, $0<\sigma<\frac{\pi}{4}$, 使得

$$\lim_{\substack{|z|=+\infty\\ z\in\{\Omega(-\sigma,\sigma)-E\}}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}=\lambda,$$

其中E是$\Omega(-\sigma,\sigma)$上的一个点集合,并且满足条件:

$$\lim_{r\to+\infty}\operatorname{mes}\{\Omega(-\sigma,\sigma,r,+\infty)\cap E\}=0.$$

如果$\Delta(0)$不是$f(z)$的一条λ级Borel方向，则存在数$\sigma, 0<\sigma<\dfrac{\pi}{4}$和$\lambda_1<\lambda$，以及两个判别有穷复数$\alpha$和$\beta$，使得当$r$充分大时，有

$$n\{\Omega(-2\sigma, 2\sigma, r), f=X\} \leqslant r^{\lambda_1}, \quad X=\alpha, \beta. \tag{4.39}$$

记$f(z)$在$\Omega(-2\sigma, 2\sigma)$内的$d$值点和$\beta$值点为$b_i(i=1, 2, \cdots)$，并且$|b_i| \leqslant |b_{i+1}|(i=1, 2, \cdots)$，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|b_j|^{\lambda_1+1}} < +\infty.$$

我们以$b_i(i=1, 2, \cdots)$为心，$\dfrac{1}{|b_j|^{\lambda_1+2}}$为半径作圆，其全体记作$E$.
明显地

$$\operatorname{mes}\{\Omega(-\sigma, \sigma; r, +\infty) \cap E\} \leqslant \sum_{|b_j|+\frac{1}{|b_j|^{\lambda_1+2}}>r} \frac{2}{|b_j|^{\lambda_1+2}}$$

$$\leqslant \frac{2}{r-\dfrac{1}{|b_1|^{\lambda_1+2}}} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|b_j|^{\lambda_1+1}}.$$

于是

$$\lim_{r\to+\infty} \operatorname{mes}\{\Omega(-\sigma, \sigma; r, +\infty) \cap E\}=0.$$

以下，我们只须证明

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in(\Omega(-\sigma,\sigma)-E)}} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}=\lambda.$$

事实上，如果不然，则必定存在一无穷点序列$z_n \in \{\Omega(-\sigma, \sigma)-E\}(n=1, 2, \cdots)$，$|z_n|<|z_{n+1}| \to +\infty(n \to +\infty)$，使得

$$\log|f(z_n)|\leqslant|z_n|^{\lambda_2},\ \lambda_2<\lambda. \tag{4.40}$$

置

$$\lambda_3=\max\{\lambda_1,\lambda_2\}<\lambda,$$

$$\eta=\frac{\lambda-\lambda_3}{4\left\{\dfrac{\pi}{\sigma}+\lambda\right\}}. \tag{4.41}$$

作变换

$$\zeta=\zeta(z)=\frac{z^{\frac{\pi}{4\sigma}}-|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}}{z^{\frac{\pi}{4\sigma}}+|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}}, \tag{4.42}$$

则根据引理 3.1, $\Omega(-2\sigma,2\sigma)$ 被变为 ζ 平面上的单位圆 $|\zeta|<1$, 并且 $\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma;|z_n|^{1-\eta},|z_n|)$ 在 ζ 平面上的像域必定含于圆 $|\zeta|\leqslant t$ 内, 而

$$t=1-\frac{1}{4}|z_n|^{-\frac{\pi\eta}{2\sigma}}. \tag{4.43}$$

圆 $|\zeta|<\dfrac{1}{2}(1+t)$ 在 z 平面上的像域必定含于 $\overline{\Omega}(-2\sigma,2\sigma;R_n',R_n)$ 内, 而

$$R_n=16^{\frac{4\sigma}{\pi}}|z_n|^{1+2\eta}, \tag{4.44}$$

$$R_n'=16^{-\frac{4\sigma}{\pi}}|z_n|^{1-2\eta}.$$

记 z_n 在 ζ 平面上的像点为 ζ_n, 继续作变换

$$\xi=\xi(\zeta)=\frac{\dfrac{1+t}{2}(\zeta-\zeta_n)}{\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^2-\overline{\zeta}_n\zeta}, \tag{4.45}$$

则圆 $|\zeta|\leqslant\frac{1}{2}(1+t)$ 和圆 $|\zeta|\leqslant t$ 分别变为 ξ 平面上的单位圆 $|\xi|\leqslant 1$ 和圆 $|\xi|\leqslant\tau$，而

$$\tau=\frac{t(1+t)}{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2+t^2}. \tag{4.46}$$

设圆 $|\xi|\leqslant 1$ 内的一点 ξ_i 是 b_i 的像点，其在 ζ 平面上的对应点为 ζ_i. 以下，我们寻求 $|\xi_i|$ 的一个下界估计：

$$|\xi_i|=\left|\frac{\frac{1+t}{2}(\zeta_i-\zeta_n)}{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2-\overline{\zeta}_n\zeta_i}\right|\geqslant\frac{1}{2}|\zeta_i-\zeta_n|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}-|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}}{b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}+|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}}-\frac{z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}-|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}}{z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}+|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}\left(z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}-b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}\right)}{\left(z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}+|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}\right)\left(b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}+|z_n|^{\frac{\pi}{4\sigma}}\right)}\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{4R_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}}\left|z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}-b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}\right|. \tag{4.47}$$

注意点 z_n 和 b_i 均位在 $\Omega(-2\sigma,2\sigma;R_n',R_n)$ 内，并且有

$$|z_n-b_i|\geqslant\frac{1}{|b_i|^{\lambda_1+2}}.$$

作变换 $x=z^{\frac{\pi}{4\sigma}}$，则点 z_n 和 b_i 分别变为 x 平面上的点 $z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}$ 和 $b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}$. 记

连接点$z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}$和$b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}$的直线段为$l_x$，其在$z$平面上的像为$l\subset\Omega(-2\sigma,2\sigma;R_n',R_n)$. 于是

$$\frac{1}{|b_i|^{\lambda_1+2}}\leqslant\int_l|dz|=\int_{l_x}|z'(x)||dx|. \tag{4.48}$$

注意到当n充分大时，有

$$|z'(x)|=\frac{4\sigma}{\pi}|x|^{\frac{4\sigma}{\pi}-1}=\frac{4\sigma}{\pi}|z|^{1-\frac{\pi}{4\sigma}}\leqslant\frac{4\sigma}{\pi}\cdot\frac{1}{R_n^{1\frac{\pi}{4\sigma}-1}}\leqslant 1.$$

于是(4.48)式给出

$$\frac{1}{|b_i|^{\lambda_1+2}}\leqslant\left|z_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}-b_i^{\frac{\pi}{4\sigma}}\right|.$$

进一步根据(4.48)和(4.45)式，当n充分大时，我们判定

$$|\zeta_i|\geqslant\frac{1}{4R_n^{\frac{\pi}{4\sigma}}\cdot|b_i|^{\lambda_1+2}}\geqslant\frac{1}{4R_n^{\frac{\pi}{4\sigma}+\lambda_1+2}}\geqslant\frac{1}{|z_n|^{2(\lambda+3)}}=d. \tag{4.49}$$

记(4.42)和(4.45)式的逆变换为$z(\zeta)$和$\zeta(\xi)$和置

$$F(\xi)=\frac{f(z(\zeta(\xi)))-\alpha}{\beta-\alpha}, \tag{4.50}$$

则当n充分大时，根据(4.39)式有

$$N=n(1,F=0)+n(1,F=1)\leqslant 2R_n^{\lambda_1}\leqslant c\cdot|z_n|^{(1+2\eta)\lambda_3},$$

其中c是与n无关的常数. 另外，根据(4.50)式，原点$\xi=0$与$F(\xi)$的0, 1诸值点的距离$\geqslant d$, 并且根据(4.41)式有

$$\log^+|F(0)|=\log^+|f(z_n)|\leqslant|z_n|^{\lambda_3}.$$

于是，应用定理 2.9, 我们得到

$$T\left(\frac{1+\tau}{2}, F\right) \leqslant \frac{c}{1-\tau}\ |z_n|^{(1+2\eta)\lambda_3}\left\{\log|z_n| + \log\frac{4}{1-\tau}\right\}.$$

进一步，根据(4.50)式有

$$T\left(\frac{1+\tau}{2}, f(z(\zeta(\xi)))\right) \leqslant \frac{c}{1-\tau}\ |z_n|^{(1+2\eta)\lambda_3}$$

$$\times\left\{\log|z_n| + \log\frac{4}{1-\tau}\right\}.$$

于是

$$\log M(\tau, f(z(\zeta(\xi)))) \leqslant \frac{\frac{1+\tau}{2}+\tau}{\frac{1+\tau}{2}-\tau} T\left(\frac{1+\tau}{2}, f(z(\zeta(\xi)))\right)$$

$$\leqslant \frac{c}{(1-\tau)^2}\ |z_n|^{(1+2\eta)\lambda_3}\left\{\log|z_n| + \log\frac{4}{1-\tau}\right\}.$$

特别地，

$$\log M\{\overline{\Omega}(-\sigma, \sigma; |z_n|^{1-\eta}, |z_n|), f\}$$

$$\leqslant \frac{c}{(1-\tau)^2}|z_n|^{(1+2\eta)\lambda_3}\left\{\log|z_n| + \log\frac{4}{1-\tau}\right\}. \qquad (4.51)$$

注意到(4.44)和(4.46)式，我们有

$$1-\tau = \frac{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2}{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2 + t^2} \geqslant \frac{1}{8}(1-t)^2 = \frac{1}{128}\ |z_n|^{-\frac{\pi\eta}{\sigma}}.$$

于是(4.51)式给出

$$\log M\{\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma;|z_n|^{1-\eta},|z_n|),f\}\leqslant c|z_n|^{\frac{2\pi\eta}{\sigma}+(1+2\eta)\lambda_3}\log|z_n|.$$

进一步根据(4.42)式,对任意取定的数ε, $0<\varepsilon<\dfrac{\lambda-\lambda_3}{8}$,当$n$充分大时,我们得到

$$\log M\{\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma;|z_n|^{1-\eta},|z_n|),f\}\leqslant|z_n|^{\frac{\lambda+\lambda_3}{2}+\varepsilon}.\tag{4.52}$$

设$f(z)$的k个判别有穷渐近值为$a_i(i=1,2,\cdots,k)$,其相应的渐近路径为$L_i(i=1,2,\cdots,k)$, L_i和L_{i+1}界囿区域D_i,根据定理4.8,在D_i内存在一条连续伸展到∞的曲线Γ_i,使得

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in\Gamma_i}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}=\lambda.$$

设$z_i'(1\leqslant i\leqslant k)$是$\Gamma_i$与圆周$|z|=|z_n|^{1-\eta}$的一个交点,则当$n$充分大时,有

$$\log|f(z_i')|\geqslant|z_n|^{(1-\eta)(\lambda-\varepsilon)},\ i=1,2,\cdots,k.\tag{4.53}$$

在区间$\left[\dfrac{1}{4}|z_n|^{(1-\eta)(\lambda-\varepsilon)},\ \dfrac{1}{2}|z_n|^{(1-\eta)(\lambda-\varepsilon)}\right]$中存在值$N'$,使得导数$f'(z)$在等位线$\log|f(z)|=N'$上无零点,即等位线是解析的.考虑集合

$$E=E\left\{z\,\middle|\log|f(z)|>N',|z|<|z_n|\right\}.$$

记含有点$z'_i\ (1\leqslant i\leqslant k)$的连通分支为$\Omega_i$.根据最大模原理,我们判定$\overline{\Omega}_i\cap(|z|=|z_n|)$不是空集.另一方面,当$n$充分大时,我们有$\Omega_i\subset D_i\ (i=1,2,\cdots,k)$,以及根据(4.42)式和$\varepsilon<\dfrac{1}{8}(\lambda-\lambda_3)$

有

$$\frac{1}{4}|z_n|^{(1-\eta)(\lambda-\varepsilon)}>|z_n|^{\frac{\lambda+\lambda_3}{2}+\varepsilon}.$$

于是根据(4.53)式，我们判定 $\Omega_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 与 $\Omega(-\sigma,\sigma;|z_n|^{1-\eta},|z_n|)$ 均无交.

我们用 $\theta_{it}\,(i\leqslant i\leqslant k;\,|z_n|^{1-\eta}\leqslant t\leqslant|z_n|)$ 表示圆周 $|z|=t$ 位在 Ω_i 内的部分，用 $t\theta_i(t)$ 表示 θ_{it} 的线性测度．当 $t\in[\,|z_n|^{1-\eta},|z_n|\,]$ 时，有

$$\begin{aligned}k^2&=\left\{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\theta_i(t)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_i(t)}}\right\}^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\theta_i(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\theta_i(t)}\\&\leqslant(2\pi-2\sigma)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\theta_i(t)}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\pi k^2}{2\pi-2\sigma}\int_{2|z_n|^{1-\eta}}^{\frac{1}{2}|z_n|}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\pi\int_{2|z_n|^{1-\eta}}^{\frac{1}{2}|z_n|}\frac{dt}{t\theta_i(t)}.\tag{4.54}$$

应用定理3.1，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\pi\int_{2|z_n|^{1-\eta}}^{\frac{1}{2}|z_n|}\frac{dt}{t\theta_i(t)}&\leqslant k\log\log M(|z_n|,f)\\&\quad-k(1-\eta)(\lambda-\varepsilon)\log|z_n|+k\log 18\sqrt{2}.\end{aligned}$$

再结合(4.54)式，给出

$$\frac{\pi k}{2\pi-2\sigma}\log\frac{|z_n|^{\eta}}{4}\leqslant\log\log M(|z_n|,f)$$

$$-(1-\eta)(\lambda-\varepsilon)\log|z_n|+\log 18\sqrt{2}.$$

于是当$n\to+\infty$时，我们判定

$$\frac{\pi k\eta}{2\pi-2\sigma}\leqslant\lambda-(1-\eta)(\lambda-\varepsilon).$$

再命$\varepsilon\to0$，则得

$$\lambda\geqslant\frac{\pi k}{2\pi-2\sigma}>\frac{k}{2}.$$

但是，这与假设矛盾，即定理4.11得证.

系1. 在定理4.8的假设下，对任意值θ, $0\leqslant\theta<2\pi$，或者$\Delta(\theta)$是$f(z)$的一条Julia方向，或者存在一个数σ, $0<\sigma<\frac{\pi}{4}$，使得

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma)}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}=\lambda. \tag{4.55}$$

系1成立是显然的.当$\Delta(\theta)$不是$f(z)$的一条Julia方向时，在定理4.11的证明中，α和β的值点$\{b_i\}$，这时为一有限集合.于是E是一个有界集合 因此(4.55)式成立.

系2. 在定理4.8的假设下，设$a_i\,(i=1,2,\cdots,k)$是$f(z)$的k个判别有穷渐近值，L_i是相应于$a_i\ (1\leqslant i\leqslant k)$的渐近路径.如果对任意小的数$\varepsilon>0$和任意大的值$r\ (0<r<+\infty)$，$\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r,+\infty)$均与$L\ (L=\bigcup_{i=1}^{k}L_i)$有交，则$\Delta(\theta)$必定是$f(z)$的一条$\lambda$级Borel方向.

事实上，如果$\Delta(\theta)$不是$f(z)$的一条λ级Borel方向，则根据定理4.11，存在数σ, $0<\sigma<\frac{\pi}{4}$，使得(4.37)和(4.38)式成立.另一

方面，对任意大的值r, $\Omega(\theta-\frac{\sigma}{2},\theta+\frac{\sigma}{2};r,+\infty)$与$L$有交.于是

$$\operatorname{mes}\left\{\Omega\left(\theta-\sigma,\theta+\sigma;r,+\infty\right)\bigcap L\right\}\geqslant\frac{\sigma}{2}r\to+\infty\ (r\to+\infty),$$

即在$\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma;r,+\infty)$上存在不属于$E$,同时趋于$\infty$的点列，使得在该点列上有上界，但是，这与(4.38)式矛盾.于是系2成立.

系3. 在定理4.8的假设下，如果存在一个值θ, $0\leqslant\theta<2\pi$, 使得$\Delta(\theta)$不是$f(z)$的一条λ级Borel方向，则当z沿着$L_i\,(1\leqslant i\leqslant k)$连续趋于$\infty$时，自$L_i$上的某点开始，其幅角$\arg z$的改变量小于$2\pi$.

事实上，系3成立也是显然的，否则，根据系2, 我们判定$\Delta(\theta)$必是$f(z)$的一条λ级Borel方向.

在系3中，如果仅在定理4.8的假设下，即在一般情况下，L. Ahlfors已经证明[1b] $\arg z=o(\log|z|)$.

定理4.12 在定理4.8的假设下，对任意值θ, $0\leqslant\theta<2\pi$和任意小的数$\varepsilon>0$, 我们恒有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log\log M\left\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),f\right\}}{\log r}=\lambda.$$

根据定理4.11的证明，我们容易判定定理4.12成立.事实上，如果不然，则立刻有(4.52)式.尔后作同样地讨论，即得到矛盾.

在给出定理4.13及其证明之前，我们需要先证明两个引理.

设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数，存在一个单调趋于∞的序列$\{r_n\}$, 使得

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}=\nu<+\infty.$$

再假设$f(z)$具有一个有穷亏值b, 其相应亏量$\delta(b,f)=\delta>0$. 根据

亏值的定义，存在值r_0，使得当$r \geqslant r_0$时，有

$$\frac{\delta}{2} T(r,f) \leqslant m(r,b), \tag{4.56}$$

$$T\left(r, \frac{1}{f-b}\right) \leqslant 2T(r,f). \tag{4.57}$$

应用引理2.1，置其中的$h = 3$, $k = 4v$, $h_1 = 0$，则有

$$\underline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{1}{\log r_n} \int_{E[r_0, r_n]} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{4}, \tag{4.58}$$

其中

$$E[r_0, r_n] = E \cap [r_0, r_n], \tag{4.59}$$

$$E = E\{t \mid T(e^3 t, f) \leqslant e^{4v} T(t,f), t \geqslant r_0\}. \tag{4.60}$$

引理4.4 对任意值$t \in \{E \cap (r_0, +\infty)\}$，置

$$E_t = E\left\{r \mid \text{mes } e_{r_\theta} \geqslant \frac{\pi\delta}{40e^{4v}}, t \leqslant r \leqslant et\right\},$$

其中

$$e_{r\theta} = E\left\{\theta \middle| \log \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - b|} \geqslant \frac{\delta}{4} T(r,f), 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\}, \tag{4.61}$$

则有

$$\int_{E_t} \frac{dt}{r} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4.62}$$

证． 记$f(z)$在圆$|z| \leqslant e^2 t$上的$b-$值点为b_i $(i = 1, 2, \cdots$

$n(te^2, b)$), 根据 Boutroux-Cartan 定理, 满足不等式

$$\prod_{i=1}^{n(e^2t,b)} |z - b_i| < H^{n(e^2t,b)}$$

的点集合能被包含在至多 $n(e^2t, b)$ 个圆 (r) 内, 其欧氏半径之和不超过 $2eH$. 取 $H = \frac{t}{4\sqrt{e}}$ 和置

$$\widetilde{E}_t = E\{ r | (|z| = r) \cap (r) = \phi, r \in [t, et] \},$$

则有

$$\int_{\widetilde{E}_t} \frac{dr}{r} \geqslant 1 - \int_t^{\sqrt{e}t} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2}. \tag{4.63}$$

根据 r_0 的选取, 当 $r \in \widetilde{E}_t$ 时, 有

$$\frac{\delta}{2} T(r, f) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - b|} d\theta.$$

进一步根据(4.61)式, 我们导出

$$\frac{\delta}{4} T(r, f) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{e_{r_\theta}} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - b|} d\theta. \tag{4.64}$$

再应用 Poisson-Jensen 公式, 我们可以得到

$$\log \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - b|} \leqslant \frac{e^2 + e}{e^2 - e} m\left(te^2, \frac{1}{f - b}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n(te^2,b)} \log \left| \frac{(te^2)^2 - \bar{b}_i re^{i\theta}}{te^2 (re^{i\theta} - b_i)} \right|$$

$$\leqslant \frac{e+1}{e-1} m\left(te^2, \frac{1}{f - b}\right) + n(te^2, b) \log (8e^{\frac{5}{2}})$$

$$\leqslant \frac{e+1}{e-1} m\left(te^2, \frac{1}{f-b}\right) + N(te^3, b)\log(8e^3)$$

$$\leqslant \left\{\frac{e+1}{e-1} + \log(8e^3)\right\} T\left(te^3, \frac{1}{f-b}\right).$$

于是根据(4.60)式，我们判定

$$\log\frac{1}{|f(e^{i\theta}) - b|} \leqslant 2e^{4v}\left\{\frac{e+1}{e-1} + \log(8e^3)\right\} T(r,f)$$

$$\leqslant 20e^{4v} T(r,f).$$

再结合(4.64)式给出

$$\frac{\delta}{4} T(r,f) \leqslant \frac{1}{2\pi} 20e^{4v} T(r,f) \operatorname{mes} e_{r\theta},$$

即有

$$\operatorname{mes} e_{r\theta} \geqslant \frac{\pi\delta}{40e^{4v}}.$$

于是 $\tilde{E}_t \subset E_t$. 因此，根据(4.63)式，我们判定(4.62)式成立，即引理4.4得证.

引理4.5 置

$$\tilde{E} = E\left\{t \mid \operatorname{mes} e_{t\theta} \geqslant \frac{\pi\delta}{40e^{4v}}, t \geqslant r_0\right\} \tag{4.65}$$

$$\tilde{E}[r_0 r_n] = \tilde{E} \bigcap [r_0, r_n],$$

则有

$$\varliminf_{r_n \to +\infty} \frac{1}{\log r_n} \int_{\tilde{E}[r_0, r_n]} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{24}.$$

证. 考虑不等式

$$T(te^3,f) \leqslant e^{4v} T(r,f). \tag{4.66}$$

设t_1是区间$[r_0, +\infty)$上满足(4.66)式的最小值,则有

$$\int_{E\cap[t_1e^3t_1]} \frac{dt}{t} \leqslant 3 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \leqslant 6 \cdot \int_{E_{t_1}} \frac{dt}{t} \leqslant 6 \int_{\tilde{E}\cap[t_1,e^3t_1]} \frac{dt}{t}.$$

设t_2是区间$[e^3t_1, +\infty)$上满足(4.66)式的最小值,则有

$$\int_{E\cap[t_2,e^3t_2]} \frac{dt}{t} \leqslant 6 \cdot \int_{\tilde{E}\cap[t_2,e^3t_2]} \frac{dt}{t},$$

…, 设t_m是区间$[e^3t_{m-1}, +\infty)$上满足(4.66)式的最小值,并且$t_{m-1} \leqslant r_n \leqslant e^3t_m$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{E[r_0,r_n]} \frac{dt}{t} &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \int_{E\cap[t_i,e^3t_i]} \frac{dt}{t} + 3\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} 6 \int_{\tilde{E}\cap[t_i,e^3t_i]} \frac{dt}{t} + 3\\ &\leqslant 6 \int_{\tilde{E}[r_0,r_n]} \frac{dt}{t} + 3.\end{aligned}$$

进一步根据(4.58)式,我们判定

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{\log r_n} \int_{\tilde{E}[r_0,r_n]} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{6} \varliminf_{n\to+\infty} \int_{E[r_0,r_n]} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{24}.$$

即引理4.5得证.

现在,我们给出定理4.13及其证明如下:

定理4.13 在定理4.8的假设下,$f(z)$不能有有穷亏值.

证． 假设定理4.13不成立，即$f(z)$具有一个有穷亏值，其相应亏量$\delta(b,f)=\delta>0$. 记$f(z)$的k个判别有穷渐近值为$a_i(i=1,2,\cdots,k)$，其相应的渐近路径为$L_i(i=1,2,\cdots,k)$，L_i和L_{i+1}界围单连通区域D_i. 置

$$L=\bigcup_{i=1}^{k}L_i,$$

$$N=\max\left\{\sup_{z\in L}|f(z)|,\ |b|\right\}<+\infty,$$

则根据Lindelöf定理，存在点$z_i\in D_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，使得

$$|f(z_i)|\geqslant 2eN. \tag{4.67}$$

在区间$[N,2N]$中存在值N'，使得导数$f'(z)$在等位线$|f(z)|=N'$上无零点，于是等位线是解析的. 考虑集合

$$E=E\{z|\ |f(z)|>N'\}.$$

记含有点$z_i\ (1\leqslant i\leqslant k)$的连通分支为$\Omega_i\subset D_i$. 根据最大模原理，我们判定$\Omega_i\ (i=1,2,\cdots,k)$是无界域.

我们用$\theta_{it}\ (1\leqslant i\leqslant k;|z_i|\leqslant t<+\infty)$表示圆周$|z|=t$位在$\Omega_i$内部分，用$t\theta_i(t)$表示$\theta_{it}$的线性测度. 应用定理3.1，我们有

$$\log|f(z_i)|\leqslant\log N'+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}}\log M(r,f),\ i=1,2,\cdots,k.$$

进一步根据(4.67)式得到

$$\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}\leqslant\log\log M(r,f)+\log 9\sqrt{2},\quad i=1,2,\cdots,k. \tag{4.68}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{k} \pi \int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r} \frac{dt}{t\theta_i(t)} \leqslant k \log\log M(r,f) + k\log 9\sqrt{2}. \tag{4.69}$$

取定值 r_0, 使得

$$r_0 \geqslant \max\{1, |z_1|, |z_2|, \cdots, |z_k|\},$$

并且当 $r \geqslant r_0$ 时, (4.56)和(4.57)式成立. 应用引理4.5, 置其中的 $\nu = \lambda$, 则当 $t \in \tilde{E}\left[2r_0, \frac{1}{2}r_n\right]$ 时, 根据(4.65)式有

$$k^2 = \left\{\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\theta_i(t)} \frac{1}{\sqrt{\theta_i(t)}}\right\}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \theta_i(t) \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta_i(t)}$$

$$\leqslant \left\{2\pi - \frac{\pi\delta}{40e^{4\lambda}}\right\} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta_i(t)};$$

当 $t \in C\tilde{E}\left[2r_0, \frac{1}{2}r_n\right]$, 其中 $C\tilde{E}[2r_0, r_n] = \left[2r_0, \frac{1}{2}r_n\right] - \tilde{E}\left(2r_0, \frac{1}{2}r_n\right]$ 时有

$$k^2 \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta_i(t)}.$$

于是, 根据(4.69)式, 我们导出

$$\frac{\pi k^2}{2\pi - \frac{\pi\delta}{40e^{4\lambda}}} \int_{\tilde{E}[2r_0, \frac{1}{2}r_n]} \frac{dt}{t} + \frac{k^2}{2} \int_{C\tilde{E}[2r_0, \frac{1}{2}r_n]} \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \pi \int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r_n} \frac{dt}{t\theta_i(t)}$$

$$\leqslant k\log\log M\left(r_n,f\right)+k\log\left(9\sqrt{2}\right)$$

$$\leqslant k\log T(2r_n,f)+k\log\left(27\sqrt{2}\right),$$

即有

$$\left\{\frac{\pi k}{2\pi-\dfrac{\pi\delta}{40e^{4\lambda}}}-\frac{k}{2}\right\}\frac{1}{\log\dfrac{r_n}{2}}\int_{\tilde{E}[2r_0,\frac{1}{2}r_n]}\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{k}{2}\left\{1-\frac{\log 2r_0}{\log\dfrac{r_n}{2}}\right\}$$

$$\leqslant\frac{\log T(2r_n,f)}{\log 2r_n}\cdot\frac{\log 2r_n}{\log r_n}\left\{1+\frac{\log 2}{\log\dfrac{r_n}{2}}\right\}$$

$$+\frac{\log\left(27\sqrt{2}\right)}{\log\dfrac{r_n}{2}}.$$

命$r\to+\infty$和根据引理4.5，我们判定

$$\lambda\geqslant\frac{k}{2}+\frac{1}{24}\cdot\left\{\frac{\pi k}{2\pi-\dfrac{\pi\delta}{40e^{4\lambda}}}-\frac{k}{2}\right\}>\frac{k}{2},$$

即是一个矛盾，从而定理4.13得证.

根据定理4.13的证明，我们可以简单地完成定理3.5的证明.事实上，如果整函数$f(z)$具有一个有穷亏值b，其相应亏量$\delta(b,f)=\delta>0$，则当$r\geqslant r_0$时有

$$m(r,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-b|}d\theta$$

$$\geqslant \frac{\delta}{2} T(r, f) \geqslant \frac{\delta}{2} T(r_0, f).$$

于是在圆周 $|z| = r\,(r \geqslant r_0)$ 上存在一点 $z_r = re^{i\theta_r}$, 使得

$$|f(z_r) - b| \leqslant e^{-\frac{\delta}{2}\tau(r_0, f)},$$

即 $f(z)$ 在点集合 $\{z_r | r \geqslant r_0\}$ 上有上界 N. 另一方面, 根据 $f(z)$ 在开平面 $|z| < +\infty$ 上无界, 我们判定存在点 z_1, 使得

$$|f(z_1)| \geqslant 2eN.$$

类似地考虑, 我们可以有相应的区域 Ω_1 和相应的 (4. 68) 式. 另外, 在应用引理 2. 1 时, 改置其中的 $\nu = \mu$, μ 是 $f(z)$ 的下级, 则可以判定 $\mu > \frac{1}{2}$. 于是定理 3. 5 成立.

§4.3. 整函数沿着渐近路径的增长性

根据 Iversen 定理, 整函数 $f(z)$ 必以 ∞ 作为渐近值, 即在开平面 $|z| < +\infty$ 上存在一条伸展到无穷的连续曲线 L, 使得当 z 沿着 L 趋向于 ∞ 时, $f(z)$ 也趋向于 ∞. 那么 $f(z)$ 沿着 L 究竟以多快的速度趋向于 ∞? 这是本节要讨论的主要问题[43b].

设 $v(r)$ 是一个定义在正实轴上的连续单调趋于 ∞ 的函数, 并且满足条件:

(1) $\overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \frac{\log v(r)}{\log r} = 0,$

(2) 对任意取定的数 $\varepsilon > 0$ 有

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{v(r^{1+\varepsilon})}{v(r)} = C(\varepsilon) < +\infty,$$

在这里 $C(\varepsilon)\geqslant 1$, 并且当 $\varepsilon\to 0$ 时有 $C(\varepsilon)\to 1$. 例如, 我们可以取 $v(r)=\log r,\ (\log r)^2,\ \log r\cdot\log\log r,\ \cdots$.

当 $\varepsilon\to 0$ 时, $C(\varepsilon)\to 1$. 所以存在数 $\varepsilon_0>0$ 使得当 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时有

$$C(\varepsilon)<1+\frac{1}{25}.$$

根据 $v(r)$ 的假设, 对任意取定的数 ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 必定存在值 r_0, 使得当 $r\geqslant r_0$ 时, 有

$$v(r)<r^{\varepsilon/3},\ v(r^{1+\varepsilon})<\left\{C(\varepsilon)+\frac{4}{25}\right)v(r)<\left(1+\frac{1}{5}\right)v(r),$$

同时存在值 r_n, $r_n\geqslant r_0$ 使得当 $t\geqslant r_n$ 时, 有

$$18\sqrt{2}\cdot t^{-\frac{\varepsilon}{2}}8\left(1+\frac{1}{5}\right)nt^{\frac{\varepsilon}{3}}\leqslant\frac{1}{2},\tag{4.70}$$

其中 n 是正整数.

置

$$\tau=\max\left\{5^{\frac{1}{\varepsilon}},r_n\right\},\ \sigma=\tau^{\frac{1}{1+\varepsilon}},\ r=\tau^{1+\varepsilon},\ R=\tau^{(1+\varepsilon)^2}$$

和假设 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant R$ 上全纯, $f(0)=1$, 并且在圆环 $2\sigma\leqslant|z|\leqslant\tau$ 内存在一点 z_0, 使得

$$|f(z_0)|\geqslant A,\ A\geqslant 16,$$

则根据引理 3.5, 我们可以确定一个区域 $D_r(A')$ $(\sqrt[4]{A}<A'<\sqrt{A})$, 使得当 $z\in D_r(A')$ 时, 有

$$|f(z)|>A',$$

以及对 $\bar{D}_r(A')$ 上的任意两点 z_2 和 z_3, 可以找到一条连接这两点的逐

段解析曲线 L，其长度

$$\operatorname{mes} L \leqslant 2r + 2\sqrt{2}\,\pi r\sqrt{\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-1} T(R,f)}, \qquad (4.71)$$

同时对位在 L 上的点 z 有

$$|f(z)| \geqslant \sqrt[4]{A}; \quad |z| \leqslant r. \qquad (4.72)$$

引理4.6 在圆环 $2\tau < |z| \leqslant r$ 与 $\bar{D}_r(A')$ 的交集中必定存在一点 z_1，使得

$$|f(z_1)| \geqslant \min\{M(|z_1|, f), e^{8n\nu(|z_1|)}\}.$$

证. 如果在圆环 $2\tau < |z| < r$ 中存在圆周 $|z| = t$ 整个地位在 $D_r(A')$ 内，则只要在圆周 $|z| = t$ 上取点 z_1 使得

$$|f(z_1)| = M(|z_1|, f),$$

即可判定引理4.6成立. 于是，我们只须考虑下述情况：在圆环 $2\tau < |z| \leqslant r$ 中不存在圆周 $|z| = t$ 整个地位在 $D_r(A')$ 内，即每个圆周 $|z| = t$ 均交于 $D_r(A')$ 的边界. 根据定理3.1，取 $\chi = \dfrac{1}{2}$，再注意到

$$2|z_0| \leqslant 2\tau < \frac{1}{2}r, \quad \theta^*(t) \leqslant 2\pi, \quad 2\tau < t \leqslant r,$$

则可以判定在 θ_r 上至少存在一点 z_1，使得有

$$|f(z_1)| \geqslant e^{8n\nu(|z_1|)},$$

否则，应有估计

$$\log|f(z_0)| \leqslant \log A' + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_0|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta^*(t)}} 8n\nu(r),$$

$$\log(A')^2 \leqslant \log A' + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2\tau}^{\frac{r}{2}}\frac{dt}{t\theta^*(t)}} 8n\nu(r),$$

$$1 \leqslant 18\sqrt{2} \cdot \tau^{-\frac{\varepsilon}{2}} 8\left(1+\frac{1}{5}\right) n \cdot \tau^{\frac{\varepsilon}{3}}.$$

但是这与(4.70)式相矛盾.于是引理4.6得证.

定理4.14 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数,并且满足条件:

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log M(r, f)}{v(r)} = +\infty,$$

则必定存在一条始自原点趋于∞的渐近路径L使得有

$$\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in L}} \frac{\log |f(z)|}{v(|z|)} = +\infty.$$

当$v(r)=\log r$时,我们就得到R. Boas的结果[21d].

证 不失一般性,我们可以假设$|f(0)|=1$. 根据$f(z)$满足条件

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log M(r, f)}{v(r)} = +\infty,$$

对于每个数$n(n=1, 2, \cdots)$,我们可以确定某个值r_n, $r_0<r_n<r_{n+1}$,使得当$r \geqslant r_n$时有

$$M(r, f) \geqslant e^{8nv(r)},$$

$$v(r) \geqslant \max\{1, \log M(1, f)\}. \tag{4.73}$$

任意取定一个数ε, $0<\varepsilon<\min\left\{\varepsilon_0, \frac{1}{5}\right\}$,然后再取定一个值$R_0$, $R_0>5^{\frac{1}{\varepsilon}}$和作序列:

$$R_m = R_0^{(1+\varepsilon)^m}, m=1, 2, \cdots,$$

则进一步可以确定一个序列 $m_n (n=1, 2, \cdots)$, $m_n+2<m_{n+1}$, 使得当 $m \geqslant m_n$ 时, 有

$$R_m \geqslant r_n, \tag{4.74}$$

以及当 $t \geqslant R_{m_n}$ 时, 有

$$18\sqrt{2} \cdot t^{-\frac{\varepsilon}{2}} 8\left(1+\frac{1}{5}\right) n \cdot t^{\frac{\varepsilon}{3}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

最后, 利用关系式

$$\log M(R_n', f) = 2n\nu(R_{m_n}),\ n=1, 2, \cdots, \tag{4.75}$$

我们定义序列 $R_n' (R_n'>1)$, 则当 $n \to +\infty$ 时, 有 $R_n' \to +\infty$.

以下, 我们证明下述两点事实:

(1) 可以依次选取点序列 $z_m (m=m_1+1, m_1+2, \cdots)$, 使得有

$$\begin{aligned} &2R_{m-1} < |z| \leqslant R_m, \quad m \geqslant m_1+1, \\ &|f(z_m)| \geqslant e^{8n\nu(|z_m|)}, \quad m_n < m \leqslant m_{n+1}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

(2) 可以依次找到连接点 z_m 和 z_{m+1} 的逐段解析曲线 $L_m (m=m_1+1, m_1+2, \cdots)$, 使得当 $z \in L_m$ 时, 有

$$R_n' \leqslant |z| \leqslant R_{m+1}, \quad m_n+1 \leqslant m \leqslant m_{n+1},$$

$$|f(z)| \geqslant e^{n\nu(|z|)}, \quad m_n+1 \leqslant m \leqslant m_{n+1}.$$

事实上, 我们只须考虑下述几点:

1) 如何选取点 z_{m_1+1}.

2) 当 $z_{m_n} (n \geqslant 2)$ 点选定之后, 如何选取点 z_{m_n+1} 和曲线 L_{m_n}.

3) 当 z_{m_n+i} 点选定之后, 如何选取点 $z_{m_n+i+1} (n \geqslant 1;\ 1 \leqslant i \leqslant m_{n+1}-m_n-1)$ 和曲线 L_{m_n+i}.

首先考虑1). 在圆周$|z|=R_{m_1+1}$上必定存在点z_{m_1+1}使得

$$|f(z_{m_1+1})|=M(|z_{m_1+1}|,f),$$

再根据(4.73)和(4.74)式,我们得到

$$|f(z_{m_1+1})|\geqslant e^{8\pi\nu(|z_{m_1+1}|)}.$$

其次考虑2). 应用引理4.6, 置其中的$z_0=z_{m_n}$, $r_n=R_{m_n}$, $r=R_{m_n+1}$, $\tau=R_{m_n}$, $\sigma=R_{m_n-1}$, $A=e^{8(n-1)\nu(|z_{m_n}|)}$, 则在圆环$2R_{m_n}<|z|<R_{m_n+1}$与$\bar{D}_r(A')$的交集中必定存在一点$z_{m_n+1}$, 使得

$$|f(z_{m_n+1})|\geqslant\min\{M(|z_{m_n+1}|,f),\ e^{8\pi\nu(|z_{m_n+1}|)}\}.$$

再根据(4.73)和(4.74)式,我们判定

$$|f(z_{m_n+1})|\geqslant e^{8\pi\nu(|z_{m_n+1}|)}.$$

另一方面,根据(4.72)式,存在一条连接点z_{m_n}和z_{m_n+1}的逐段解析曲线L_{m_n}, 使得当$z\in L_{m_n}$时,有

$$|f(z)|\geqslant e^{2(n-1)\nu(|z_{m_n}|)},\quad |z|\leqslant R_{m_n+1}. \tag{4.77}$$

注意到$|z_{m_n}|>2R_{m_n-1}>R_{m_n-1}$, 以及(4.75)式, 我们判定$|z|\geqslant R'_{n-1}$. 另一方面,当$|z|\leqslant|z_{m_n}|$时,有

$$|f(z)|\geqslant e^{2(n-1)\nu(|z|)};$$

当$|z|>|z_{m_n}|$时,有

$$|f(z)|\geqslant e^{2(n-1)\nu(|z|)}\cdot e^{2(n-1)\nu(|z_{m_n}|)-2(n-1)\nu(|z|)}$$

$$\geqslant e^{2(n-1)\nu(|z|)}\cdot e^{2(n-1)\{\nu(R_{m_n}-1)-\nu(R_{m_n}+1)\}}.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\nu(R_{m_n+1})-\nu(R_{m_n-1})\\&=\nu(R_{m_n+1})-\nu(R_{m_n})+\nu(R_{m_n})-\nu(R_{m_n-1})\\&\leqslant\frac{1}{5}\{\nu(R_{m_n})+\nu(R_{m_n-1})\}\\&\leqslant\frac{1}{5}\left(2+\frac{1}{5}\right)\nu(|z|)<\frac{1}{2}\nu(|z|),\end{aligned}$$

则得到

$$|f(z)|\geqslant e^{(n-1)\nu(|z|)}.$$

最后考虑3). 我们再次应用引理4.6, 置其中的$z_0=z_{m_n+i}$, $r_n=R_{m_n}$, $r=R_{m_n+i+1}$, $\tau=R_{m_n+i}$, $\sigma=R_{m_n+i-1}$, $A=e^{8n\nu(|z_{m_n+i}|)}$, 则在圆环$2R_{m_n+i}<|z|\leqslant R_{m_n+i+1}$与$\bar{D}_r(A')$的交集中必定存在一点$z_{m_n+i+1}$, 使得

$$\begin{aligned}|f(z_{m_n+i+1})|&\geqslant\min\{M(|z_{m_n+i+1}|,f),e^{8n\nu(|z_{m_n+i+1}|)}\}\\&=e^{8n\nu(|z_{m_n+i+1}|)}.\end{aligned}$$

另一方面,根据(4.72)式,存在一条连接点z_{m_n+i}和z_{m_n+i+1}的逐段解析曲线L_{m_n+i}, 使得对L_{m_n+i}上的点z有

$$|f(z)|\geqslant e^{2n\nu(|z_{m_n+i}|)},\quad |z|\leqslant R_{m_n+i+1}.\tag{4.78}$$

注意到$i\geqslant 1$, $|z_{m_n+i}|\geqslant R_{m_n}$, 以及(4.75)式,我们判定$|z|\geqslant R_n'$. 另一方面,当$|z|\leqslant R_{m_n+i}$时,有

$$|f(z)|\geqslant e^{2n\nu(|z|)};$$

当$|z|>|z_{m_n+i}|$时，有

$$|f(z)|\geqslant e^{n\nu(|z|)}.$$

在说明了1)，2)和3)之后，事实(1)和(2)就是明显的．现在，我们用直线L_{m_1}连接原点$z=0$和点z_{m_1+1}，然后置

$$L=\sum_{m=m_1}^{+\infty}L_m, \tag{4.79}$$

则L是一条始自原点趋于无穷的逐段解析曲线，并且有

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}}\frac{\log|f(z)|}{\nu(|z|)}=+\infty.$$

于是定理4.14得证．

如果我们置$\nu(r)=\log r$和用$M\{D\bigcap(|z|=r),f\}$代替$M(r,f)$，则重复定理4.14的证明就可以完成定理4.6的证明．

现在，我们考虑另外一种类型的增长性定理．A. Huber曾经证明下述结果[23a]：

如果$f(z)$是一个超越整函数，则对每个$\rho>0$，都存在一条趋于∞的路径L_ρ，使得

$$\int_{L_\rho}|f(z)|^{-\rho}|dz|<+\infty.$$

W. Hayman曾经问是否存在不依赖于ρ的路径？[21d]对于这个问题，当级$\lambda<+\infty$时[1)]，我们可以得到肯定的回答．

定理4.15 设$f(z)$是一个超越整函数，其级$\lambda<+\infty$，则必定

---

1) 最近，J. Lewis, J. Rossi和A. Weitsman已经成功地消去了级$\lambda<+\infty$的这个假设条件，参见[27a]．

存在一条趋向于 ∞ 的路径 L，使得对每个值 $\rho > 0$，均有

$$\int_L |f(z)|^{-\rho} |dz| < +\infty.$$

证. 根据 $f(z)$ 是一个超越整函数的假设，我们有

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\log M(r, f)}{\log r} = +\infty.$$

另一方面，根据 $f(z)$ 的级 $\lambda < +\infty$ 的假设，对任意取定的数 ε，$0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$，存在值 t_0，使得当 $t \geqslant t_0$ 时，有

$$T(t, f) \leqslant t^{\lambda + \varepsilon}.$$

重复定理4.14的证明，特别地取 $\nu(r) = \log r$ 和 $R_0 \geqslant \max\{5^{\frac{1}{\varepsilon}}, t_0\}$，我们根据(4.77)和(4.78)式可以判定当 $z \in L_m$ $(m_n \leqslant m \leqslant m_{n+1})$ 时，有

$$|f(z)| \geqslant |z_m|^{2n}, \tag{4.80}$$

同时，根据(4.71)式有

$$\begin{aligned} \operatorname{mes} L_m &\leqslant 2R_{m+1} + 2\sqrt{2}\,\pi R_{m+1} \\ &\quad \times \sqrt{\left[\log \frac{R_{m+2}}{R_{m+1}}\right]^{-1} T(R_{m+2}, f)} \\ &\leqslant 2(1 + \sqrt{2}\,\pi) R_{m+1}^{1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda + \varepsilon + 1}{2} \cdot \varepsilon}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

置

$$L = \sum_{m = m_1 + 1}^{\infty} L_m,$$

则 L 即是所求的一条趋于 ∞ 的路径.事实上，对于每个值 $\rho > 0$, 都存在某个正整数 n_0, $n_0 = n_0(\rho)$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$2\rho n - (1+\varepsilon)^2\left\{1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda+1+\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon\right\} \geqslant 2.$$

再置

$$L' = \sum_{m=m_1+1}^{m_{n_0}} L_m, \quad L'' = \sum_{m=m_{n_0}+1}^{+\infty} L_m,$$

则根据(4.77), (4.80)和(4.81)式，我们判定

$$\int_L \frac{1}{|f(z)|^\rho} d|z| = \int_{L'} \frac{1}{|f(z)|^\rho}|dz|$$

$$+ \int_{L''} \frac{1}{|f(z)|^\rho}|dz| \leqslant \int_{L'} \frac{|dz|}{|f(z)|^\rho}$$

$$+ 2(1+\sqrt{2}\pi)\sum_{m=m_{n_0}+1} R_{m+1}^{1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda+1+\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon} \frac{1}{2^{2n\rho}R_{m-1}^{2n\rho}}$$

$$\leqslant \int_{L'} \frac{|dz|}{|f(z)|^\rho} + 2(1+\sqrt{2}\pi)\sum_{m=m_{n_0}+1}^{+\infty} \frac{1}{R_{m-1}^2} < +\infty,$$

即定理4.15得证.

现在，我们考虑亚纯函数的情况. W. Hayman曾经提出下述问题[21d]:

设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数，其下级为 μ, 则当 $n(r,\infty) = O(r^k)$, 并且 $k < \frac{1}{2} < \mu$ 时，相应的Boas定理是否仍然成立?

事实上，我们有更强的结论:

定理4.16 设 $f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数，并

且满足下述条件[1]：

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\mu,\quad \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n(r,\infty)}{\log r}=k,$$

$$k<\rho,\quad \rho=\min\left\{\mu,\frac{1}{2}\right\},$$

则必定存在一条趋向于 ∞ 的定值路径 L，使得

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}\geqslant\rho^{2)}.$$

证． 不失一般性，我们可以假定 $|f(0)|=1$. 置 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则存在值 n_0, $n_0\geqslant 3$ 使得 $n\geqslant n_0$ 时有

$$(1+4\varepsilon_n)^3(k+\varepsilon_n)+\varepsilon_n-\rho<0,\quad \varepsilon_n<\frac{\rho}{5\rho+1}.$$

取

$$K=72^2\sigma,\quad \sigma=2^{\frac{1}{\rho-\varepsilon_{n_0}}}\tag{4.82}$$

对于每个 $\varepsilon_n(n\geqslant n_0)$，存在一递增序列 $r_n(n=n_0,n_0+1,\cdots)$，使得

$$r_{n_0}\geqslant\max\{K^{\frac{1}{2}n_0(n_0-1)},\ [48T(2,f)]^{\frac{1}{\rho-\varepsilon_{n_0}}}\},$$

同时 $r\geqslant r_n$ 时，有

$$T(r,f)\geqslant r^{\rho-\varepsilon_n},$$

---

1) 在更加精确的条件下，W. Hayman 证明 ∞ 一定是一个渐近值. 参见[21g].

2) 当 $f(z)$ 是整函数且无零点时，这个估计是准确的. 参见[5a].

$N(1,f)+n(r,\infty)\log r\leqslant r^{k+\varepsilon_n}$

$$1-2K^{2(k+1)}\cdot r^{(1+4\varepsilon_n)^3(k+\varepsilon_n)+\varepsilon_n-\rho}\geqslant\frac{1}{2}. \qquad (4.83)$$

我们定义序列 $m_n(n\geqslant n_0)$ 和 $R_m(m\geqslant m_{n_0})$，使得有[1)]

$$\left.\begin{array}{l} R_{m_{n_0}}=r_{n_0},\quad R_{m+1}=K^n R_m^{1+\varepsilon_{n-1}},\quad m=m_n, \\ R_{m+1}=R_m^{1+\varepsilon_n},\quad m=m_n+1,\quad m_n+2,\quad\cdots,\quad m_{n+1}-1, \end{array}\right\}\quad (4.84)$$

$$R_{n_0}=0,\quad R_{m_n}\geqslant r_n,\quad n=n_0,\quad n_0+1,\quad\cdots;\ m_{n+1}>m_n+3.$$

注意到

$$\begin{aligned} R_{m_n+1} &\geqslant K^n R_{m_n}\geqslant K^n R_{m_{n-1}+1}\geqslant K^{n+(n-1)}R_{m_{n-2}+1}\geqslant\cdots \\ &\geqslant K^{n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n_0+1)}R_{m_{n_0}+1}\geqslant K^{n+(n-1)+\cdots+n_0}R_{m_{n_0}} \\ &\geqslant K^{n+(n-1)+\cdots+n_0}r_{n_0}\geqslant K^{n+(n-1)+\cdots+n_0}K^{\frac{n_0(n_0-1)}{2}} \\ &=K^{\frac{1}{2}(n+1)n}, \end{aligned}$$

则得

$$K^n\leqslant R_{m_n+1}^{2^{\varepsilon_n+1}},\quad n\geqslant n_0. \qquad (4.85)$$

我们再根据关系式

$$T(2R'_n,f)=\frac{1}{48}R_{m_n}^{\rho-\varepsilon_n},\quad n=n_0,\quad n_0+1,\quad\cdots \qquad (4.86)$$

定义序列 R'_n，则有

$$R'_n<R'_{n+1}\to+\infty,\quad n\to+\infty.$$

---

1) 参见(4.23)式.

注意到

$$T(2R'_n,f)=\frac{1}{48}R_{m_n}^{\rho-\varepsilon_n}\geqslant\frac{1}{48}R_{m_{n_0}}^{\rho-\varepsilon_n}\geqslant\frac{1}{48}r_{n_0}^{\rho-\varepsilon_n}\geqslant T(2,f),$$

我们判定 $R'_n\geqslant 1\,(n\geqslant n_0)$. 另一方面还有

$$2R'_n<R_{m_n},\quad n\geqslant n_0. \tag{4.87}$$

事实上,若 $2R'_n\geqslant r_n$, 则有

$$T(2R'_n,f)\geqslant(2R'_n)^{\rho-\varepsilon_n},\quad \frac{1}{48}R_{m_n}^{\rho-\varepsilon_n}\geqslant(2R'_n)^{\rho-\varepsilon_n},$$

$$R_{m_n}\geqslant 48^{\frac{1}{\rho-\varepsilon_n}}2R'_n>2R'_n;$$

若 $2R'_n<r_n$, 即有 $2R'_n<R_{m_n}$.

用 a_i 表示 $f(z)$ 的极点,然后置

$$\Pi_m(z)=\prod_{|a_i|<R_{m+2}}\frac{R_{m+2}(z-a_i)}{R_{m+2}^2-\bar{a}_i z},\quad F_m(z)=f(z)\Pi_m(z),$$

则 $F_m(z)$ 在圆 $|z|<R_{m+2}$ 内全纯.

现在证明次之的三个引理.

引理 4.7 当 $r\in[R_m,R_{m+1}]\,(m_n\leqslant m\leqslant m_{n+1}-1,\ n\geqslant n_0)$ 时,我们有

$$\log M(r,F_m)\geqslant\frac{1}{2}r^{\rho-\varepsilon_n}.$$

证. 首先根据 $r\geqslant R_{m_n}\geqslant r_n$, $|f(0)|=1$ 和

$$\begin{aligned}T(r,f)&=m(r,f)+N(r,f)\\&\leqslant m(r,F_m)+m\left(r,\frac{1}{\Pi_m}\right)+N(r,f)\end{aligned}$$

$$\leqslant m(r, F_m) + m(r, \Pi_m) + \log \frac{1}{|\Pi_m(0)|}$$

$$= m(r, F_m) + N(R_{m+2}, f),$$

我们得到

$$\log M(r, F_m) \geqslant r^{\rho-\varepsilon_n} - \{N(1,f) + n(R_{m+2}, f)\log R_{m+2}\}$$
$$\geqslant r^{\rho-\varepsilon_n} - R_{m+2}^{k+\varepsilon_n}.$$

当 $m = m_n$ 时，若 $n \geqslant n_0 + 1$，则有

$$R_{m+2} = R_{m+1}^{1+\varepsilon_n} = \{K^n R_{m_n}^{1+\varepsilon_{n-1}}\}^{1+\varepsilon_n} = K^{n+1} R_{m_n}^{\frac{n+1}{n-1}}$$

$$\leqslant K^2 R_{m_{n-1}+1}^{2\varepsilon_n} \cdot R_{m_n}^{1+2\varepsilon_{n-1}}$$

$$\leqslant K^2 R_{m_n}^{1+2\varepsilon_n+2\varepsilon_{n-1}} \leqslant K^2 R_{m_n}^{(1+4\varepsilon_n)^2};$$

若 $n = n_0$，则有

$$R_{m+2} = R_{m+1}^{1+\varepsilon_{n_0}} = \{K^{n_0} R_{m_{n_0}}^{1+\varepsilon_{n_0-1}}\}^{1+\varepsilon_{n_0}}$$

$$= K^{n_0+1} R_{m_{n_0}}^{\frac{n_0+1}{n_0-1}} \leqslant K^2 r_{n_0}^{2\varepsilon_{n_0}} R_{m_{n_0}}^{1+2\varepsilon_{n_0-1}}$$

$$\leqslant K^2 R_{m_{n_0}}^{1+2\varepsilon_{n_0}+2\varepsilon_{n_0-1}} \leqslant K^2 R_{m_{n_0}}^{(1+4\varepsilon_{n_0})^2},$$

即有

$$R_{m+2} \leqslant K^2 R_{m_n}^{(1+4\varepsilon_n)^2}, \quad n \geqslant n_0.$$

当 $m_n + 1 \leqslant m \leqslant m_{n+1} - 2$ 时，有

$$R_{m+2} = R_m^{(1+\varepsilon_n)^2} \leqslant K^2 R_m^{(1+4\varepsilon_n)^2}.$$

当 $m = m_{n+1} - 1$ 时，有

$$R_{m+2}=K^{n+1}R_{m_n+1}^{1+\varepsilon_n}=K^{n+1}R_{m_n+1-1}^{(1+\varepsilon_n)^2}$$

$$\leqslant KR_{m_n+1}^{2\varepsilon_n+1}R_m^{(1+\varepsilon_n)^2}\leqslant K^2R_m^{(1+4\varepsilon_n)^2}.$$

于是我们判定

$$\log M(r,F_m)\geqslant r^{\rho-\varepsilon_n}-K^{2(n+\varepsilon_n)}R_m^{(1+4\varepsilon_n)^2(k+\varepsilon_n)}$$

$$\geqslant r^{\rho-\varepsilon_n}-K^{2(n+1)}r^{(1+4\varepsilon_n)^2(k+\varepsilon_n)}$$

$$=r^{\rho-\varepsilon_n}\{1-K^{2(k+1)}r^{(1+4\varepsilon_n)^2(k+\varepsilon_n)+\varepsilon_n-\lambda}\}.$$

再注意到(4.83)式,则引理4.7得证.

引 理4.8 设在圆环 $R_m\leqslant|z|\leqslant R_{m+1}$ ($m_n\leqslant m\leqslant m_{n+1}-1$; $n\geqslant n_0$)中存在一点 z_{m+1},使得

$$\log|F_m(z_{m+1})|\geqslant\frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\lambda-\varepsilon_n},\tag{4.88}$$

则有

$$\log|F_{m+1}(z_{m+1})|\geqslant\frac{1}{4}|z_{m+1}|^{\lambda-\varepsilon_n}.$$

证. 首先根据等式

$$\frac{\Pi_m(z)}{\Pi_{m+1}(z)}=\prod_{|a_i|<R_{m+2}}\frac{R_{m+2}(z-a_i)}{R_{m+2}^2-\bar{a}_iz}\cdot\frac{R_{m+3}^2-\bar{a}_iz}{R_{m+3}(z-a_i)}$$

$$\times\prod_{R_{m+2}<|a_i|<R_{m+3}}\frac{R_{m+3}^2-\bar{a}_iz}{R_{m+3}(z-a_i)},$$

我们导出

$$\log\left|\frac{\Pi_m(z)}{\Pi_{m+1}(z)}\right| \leqslant n(R_{m+3},\infty)\log\frac{2R_{m+3}}{R_{m+2}-R_{m+1}},$$

$$|z| < R_{m+1}.$$

当 $m_n \leqslant m \leqslant m_{n+1}-2\ (n \geqslant n_0)$ 时，根据(4.85)式有

$$R_{m+2}-R_{m+1} = R_{m+1}(R_{m+1}^{\varepsilon}-1) \geqslant R_{m_n}(R_{m_n+1}^{\varepsilon}-1)$$

$$\geqslant R_{m_n}(K^{\frac{1}{2}(n+1)}-1) > 2;$$

当 $m = m_{n+1}-1$ 时，根据(4.85)式有

$$R_{m+2}-R_{m+1} = R_{m+1}(K^{n+1}-1) > 2.$$

于是我们判定

$$\log\left|\frac{\Pi_m(z)}{\Pi_{m+1}(z)}\right| \leqslant n(R_{m+3},\infty)\log R_{m+3} \leqslant R_{m+3}^{k+\varepsilon_n},$$

$$|z| \leqslant R_{m+1}. \tag{4.89}$$

注意到

$$F_{m+1}(z) = f(z)\Pi_{m+1}(z) = F_m(z)\cdot\frac{\Pi_{m+1}(z)}{\Pi_m(z)},$$

则根据(4.88)和(4.89)式，我们得到

$$\frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n} \leqslant \log|F_m(z_{m+1})|$$

$$= \log|F_{m+1}(z_{m+1})| + \log\left|\frac{\Pi_m(z)}{\Pi_{m+1}(z)}\right|$$

$$\leqslant \log|F_{m+1}(z_{m+1})| + R_{m+3}^{k+\varepsilon_n},$$

即有

$$\log|F_{m+1}(z_{m+1})| \geqslant \frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n} - R_{m+3}^{k+\varepsilon_n}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}\left\{1 - \frac{2R_{m+3}^{k+\varepsilon_n}}{R_m^{\rho-\varepsilon_n}}\right\}.$$

当$m = m_n$时，若$n \geqslant n_0 + 1$，则根据(4.84)和(4.85)式有

$$R_{m+3} = \left\{K^n R_m^{1+\varepsilon_{n-1}}\right\}^{(1+\varepsilon_n)^2} \leqslant K^2 R_m^{(1+\varepsilon_{n-1}+2\varepsilon_n)(1+\varepsilon_n)^2}$$

$$\leqslant K^2 R_m^{(1+4\varepsilon_n)^3};$$

若$n = n_0$，则有

$$R_{m+3} = \left\{K^{n_0} R_m^{1+\varepsilon_{n_0-1}}\right\}^{(1+\varepsilon_{n_0})^2}$$

$$\leqslant \left\{K \cdot r_{n_0}^{2\varepsilon_{n_0}} R_m^{1+\varepsilon_{n_0-1}}\right\}^{(1+\varepsilon_{n_0})^2}$$

$$\leqslant K^2 R_m^{(1+4\varepsilon_{n_0})^3},$$

即有

$$R_{m+3} \leqslant K^2 R_m^{(1+4\varepsilon_n)^3}, \quad n \geqslant n_0.$$

当$m_n + 1 \leqslant m \leqslant m_{n+1} - 3$时，有

$$R_{m+3} = R_m^{(1+\varepsilon_n)^3} \leqslant R_m^{(1+4\varepsilon_n)^3}$$

当$m = m_{n+1} - 2$时，根据(4.84)和(4.85)式有

$$R_{m+3} = k^{n+1} R_m^{(1+\varepsilon_n)^3} \leqslant k R_{m_{n+1}}^{2\varepsilon_{n+1}} \cdot R_m^{(1+\varepsilon_n)^3}$$

$$\leqslant K R_m^{(1+4\varepsilon_n)^3}.$$

当 $m=m_{n+1}-1$ 时,根据(4.84)和(4.85)式有

$$R_{m+3}=\left\{K^{n+1}R_m^{(1+\varepsilon_n)^2}\right\}^{1+\varepsilon_{n+1}}$$

$$=K^{n+2}R_m^{(1+\varepsilon_n)^2(1+\varepsilon_{n+1})}$$

$$\leqslant K^2 R_{m_n+1}^{2\varepsilon_{n+1}} R_m^{(1+\varepsilon_n)^2(1+\varepsilon_n+1)} \leqslant K^2 R_m^{(1+4\varepsilon_n)^3}.$$

于是我们判定

$$\log|F_{m+1}(z_{m+1})| \geqslant \frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}$$

$$\{1-2K^{2(k+1)}R_m^{(1+4\varepsilon_n)^3(k+\varepsilon_n)+\varepsilon_n-\rho}\}.$$

再注意到(4.83)式,则引理4.8得证.

设在圆环 $R_{m-1}<|z|\leqslant R_m\,(m_n+1\leqslant m\leqslant m_{n+1};n\geqslant n_0)$ 中存在一点 z_m,使得 $\log|F_m(z_m)|\geqslant\frac{1}{4}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}$. 因为 $F_m(z)$ 的导数 $F_m'(z)$ 在圆 $|z|\leqslant R_{m+2}$ 内至多有有限个零点,所以在区间 $\left[\frac{1}{16}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n},\frac{1}{8}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}\right]$ 中存在值 A_m,使得 $F_m'(z)$ 在圆 $|z|\leqslant R_{m+2}$ 内的等位线 $\log|F_m(z)|=A_m$ 上无零点,即等位线是解析的.考虑集合

$$D(A_m)=E\{z|\log|F_m(z)|>A_m,|z|<R_{m+2}\}.$$

记 $D(A_m)$ 位在圆 $|z|<R_{m+1}$ 内部分且含有点 z_m 的连通分支为 $D_m(A_m)$,则 $D_m(A_m)$ 的边界为逐段解析曲线.闭包 $\bar{D}_m(A_m)$ 相对于闭平面 $|z|\leqslant\infty$ 的补集分支仅有有限个.记圆周 $|z|=R_{m+1}$ 位

在$D(A_m)$内部分且是$D_m(A_m)$的边界的弧段为θ_m，圆周$|z|=t$ $(t<R_{m+1})$位在$D_m(A_m)$内部分的弧段为θ_t, $t\theta(t)$是θ_t $(t\leqslant R_{m+1})$的线性测度.根据(4.82)和(4.85)式我们有

$$R_{m+1}\geqslant R_m^{1+\varepsilon_n}=R_mR_m^{\varepsilon_n}\geqslant R_mR_{m_n+1}^{\varepsilon_n}\geqslant K^{\frac{n}{2}}\cdot R_m$$

$$>KR_m>2\sigma R_m.$$

于是$\sigma R_m<\dfrac{1}{2}R_{m+1}$.

引 理4.9 当$m_n+1\leqslant m\leqslant m_{n+1}-1$ $(n\geqslant n_0)$时，在圆环$\max\{\sigma|z_m|, R_m\}<|z|\leqslant R_{m+1}$中(当$\sigma|z_m|<R_m$时，我们补充假设在区间$[\sigma|z_m|, R_m]$中不存在值$t$，使得圆周$|z|=t$整个地位在$D_m(A_m)$内)存在点$z_{m+1}$，使得

$$\log|F_{m+1}(z_{m+1})|\geqslant\frac{1}{4}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n},$$

间时在$D_m(A_m)$内存在一条连接点z_m和z_{m+1}[1)]的连续曲线L_m，使得当$z\in L_m$时，有

$$\log|F_m(z)|\geqslant\frac{1}{16}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}.$$

另外，当$|z_{m+1}|<R_{m+1}$时，在圆环$|z_{m+1}|\leqslant|z|\leqslant R_{m+1}$中不存在圆周$|z|=t$整个地位在$D_{m+1}(A_{m+1})$内.

证. 我们区分两种情况讨论：

(1) 在圆环$\sigma|z_m|\leqslant|z|\leqslant R_{m+1}$中，存在圆周$|z|=t$整个地位在$D_m(A_m)$内.置

$$T=\sup\{t\mid |z|=t\subset D_m(A_m), t<R_{m+1}\},$$

---

1) 点z_{m+1}可能位在$D_m(A_m)$的边界上.

则有

$$\max\{\sigma|z_m|, R_m\} < T \leqslant R_{m+1}.$$

取点 z_{m+1}, $|z_{m+1}| = T$, 使得

$$\log|F_m(z_{m+1})| = \log M(T, F_m),$$

注意到 $|z_{m+1}| > R_m > R_{m_n} \geqslant r_n$, 根据引理4.7,我们有

$$\log|F_m(z_{m+1})| \geqslant \frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n} \tag{4.90}$$

再根据引理4.8,我们判定

$$\log|F_{m+1}(z_{m+1})| \geqslant \frac{1}{4}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}.$$

注意到

$$\frac{1}{16}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n} \geqslant \frac{1}{16}(\sigma|z_m|)^{\rho-\varepsilon_n}$$

$$\geqslant \frac{1}{16}\sigma^{\rho-\varepsilon_n}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n} = \frac{1}{8}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n},$$

$$|F_m(z)| \geqslant |F_{m+1}(z)|,$$

则当 $|z_{m+1}| < R_{m+1}$ 时必有

$$D_{m+1}(A_{m+1}) \cap (|z| < R_{m+1}) \subset D_m(A_m),$$

即在区间 $[|z_{m+1}|, R_{m+1}]$ 中不能存在值 t, 使得圆周 $|z| = t$ 整个地位在 $D_{m+1}(A_{m+1})$ 内.

另一方面,根据(4.90)式,我们有

$$\log|F_m(z_{m+1})| \geqslant \frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n} \geqslant A_m.$$

再根据$\log|F_m(z)|$的连续性，我们可以得到一个以z_{m+1}为心的小圆C，使得在C内有$\log|F_m(z)|>A_m$. 根据T的定义，在圆$|z|<R_{m+1}$内必定存在圆周$|z|=t$整个地位在$D_m(A_m)$内，同时与圆C的内部相交. 我们取一个交点z'. 根据连通性，在$D_m(A_m)$内存在一条连接z_m和z'的连续曲线L'_m，然后我们再用直线段L''_m连接点z'和z_{m+1}. 于是$L_m=L'_m+L''_m$即是一条连接z_m和z_{m+1}的连续曲线，并且当$z\in L_m$时有

$$\log|F_m(z)|>A_m>\frac{1}{16}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n},$$

即引理4.9得证.

(2) 在圆环$\sigma|z_m|\leqslant|z|<R_{m+1}$中，不存在圆周$|z|=t$整个地位在$D_m(A_m)$内. 应用定理3.1，我们可以判定在$\theta_m$上存在一点$z_{m+1}$，使得

$$\log|F_m(z_{m+1})|\geqslant\frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}.$$

否则应有

$$\log|F_m(z_m)|\leqslant A_m+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{\sigma|z_m|}^{\frac{1}{2}R_{m+1}}\frac{dt}{t\theta(t)}}\frac{1}{2}R_{m+1}^{\rho-\varepsilon_n},$$

$$\frac{1}{4}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}\leqslant\frac{1}{8}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{\sigma|z_m|}^{\frac{1}{2}R_{m+1}}\frac{dt}{t\theta(t)}}\frac{1}{2}R_{m+1}^{\rho-\varepsilon_n}.$$

注意到$\theta(t)\leqslant2\pi$，则得

$$\frac{1}{8}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}\leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{|z_m|}{R_{m+1}}\right\}^{\frac{1}{2}-(\rho+\varepsilon_n)}\cdot R_{m+1}$$

$$\frac{1}{8} \leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{|z_m|}{R_{m+1}}\right\}^{\frac{1}{2}-\rho+\varepsilon_n} \leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R_m}{R_{m+1}}\right)^{\varepsilon_n}$$

$$= 9\sigma^{\frac{1}{2}} R_m^{-\varepsilon_n^2} \leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}} R_{m_n+1}^{-\varepsilon_n^2},$$

再根据(4.85)式，我们判定

$$\frac{1}{8} < 9\sigma^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{n+1}{2n}} < 9\sigma^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}.$$

进一步注意到(4.82)式，即可导出矛盾.

根据引理4.8，我们有

$$\log|F_{m+1}(z_{m+1})| \geqslant \frac{1}{4}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}$$

同时根据连通性，在 $D_m(A_m)$ 内存在一条连接点 z_m 和 z_{m+1} 的连续曲线 L_m，并且当 $z \in L_m$ 时有

$$\log|F_m(z)| \geqslant A_m \geqslant \frac{1}{16}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n},$$

即引理4.9得证.

引理4.10 当 $m=m_{n+1}(n \geqslant n_0)$ 时，在圆环 $\max\{\sigma|z_m|, R_m\} < |z| \leqslant R_{m+1}$ 中(当 $\sigma|z_m| < R_m$ 时，我们补充假设在区间 $[\sigma|z_m|, R_m]$ 中不存在值 t，使得圆周 $|z|=t$ 整个地位在 $D_m(A_m)$ 内)存在点 z_{m+1}，使得

$$\log|F_{m+1}(z_{m+1})| \geqslant \frac{1}{4}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}.$$

同时在 $D_m(A_m)$ 内存在一条连接点 z_m 和 z_{m+1} 的连续曲线 L_m，使得

当 $z\in L_m$ 时，有

$$\log|F_m(z)|\geqslant\frac{1}{16}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}.$$

另外，当 $|z_{m+1}|<R_{m+1}$ 时，在圆环 $|z_{m+1}|\leqslant|z|\leqslant R_{m+1}$ 中不存在圆周 $|z|=t$ 整个地位在 $D_{m+1}(A_{m+1})$ 内.

证. 我们区分两种情况讨论：

(1) 在圆环 $\sigma|z_m|\leqslant|z|<R_{m+1}$ 中存在圆周 $|z|=t$ 整个地位在 $D_m(A_m)$ 内. 我们作类似于引理 4.9 情况 (1) 的证明，只须注意到此处的点 z_{m+1} 有 $|z_{m+1}|>R_{m_{n+1}}\geqslant r_{n+1}$. 于是代替 (4.90) 式，我们得到

$$\log|F_m(z_{m+1})|\geqslant\frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_n}.$$

(2) 在圆环 $\sigma|z_m|\leqslant|z|<R_{m+1}$ 中不存在圆周 $|z|=t$ 整个地位在 $D_m(A_m)$ 内. 应用定理 3.1, 我们可以判定在 θ_m 上存在一点 z_{m+1}, 使得

$$\log|F_m(z_{m+1})|\geqslant\frac{1}{2}|z_{m+1}|^{\rho-\varepsilon_{n+1}}.$$

否则应有

$$\frac{1}{4}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}\leqslant\frac{1}{8}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}+9\sigma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|z_m|}{R_{m+1}}\right)^{\frac{1}{2}}R_{m+1}^{\rho-\varepsilon_n+1},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}&\leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}}|z_m|^{\frac{1}{2}-\rho+\varepsilon_n}R_{m+1}^{\rho-\frac{1}{2}-\varepsilon_n+1}\\&\leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}}R_m^{\frac{1}{2}-\rho+\varepsilon_n}R_{m+1}^{\rho-\frac{1}{2}-\varepsilon_n+1}\\&\leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}}R_m^{\varepsilon_n}R_{m+1}^{-\varepsilon_n+1}.\end{aligned}$$

进一步根据(4.84)和(4.82)式，我们判定

$$\frac{1}{8}\leqslant 9\sigma^{\frac{1}{2}}K^{-1}=9\sigma^{\frac{1}{2}}\frac{1}{72\sigma}<\frac{1}{8},$$

即得到矛盾.以下作类似于引理4.9情况(2)的证明，即可判定引理4.10成立.

现在，我们完成定理4.16的证明.首先取点z_1, $|z_1|=R_1$使得

$$\log|F_1(z_1)|=\log M(R_1, F_1).$$

然后重复应用引理4.9和引理4.10，我们依次得到点序列$z_m(m=1, 2, \cdots)$和曲线序列$L_m(m=1, 2, \cdots)$. 注意到当$m_n+1\leqslant m\leqslant m_{n+1}$ $(n\geqslant n_0+1)$和$z\in L_m$时有

$$\log|f(z)|\geqslant\log|F_m(z)|\geqslant\frac{1}{16}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}, \ |z_m|>R_{m-1},$$

$$|z|\leqslant R_{m+1}.$$

另一方面，根据(4.86)和(4.87)式有

$$\log M(R_n', F_m)\leqslant 3m(2R_n', F_m)\leqslant 3T(2R_n', f)$$

$$=\frac{1}{16}R_{m_n}^{\rho-\varepsilon_n}\leqslant\frac{1}{16}|z_m|^{\rho-\varepsilon_n}\leqslant\log|F_m(z)|.$$

于是我们判定$|z|\geqslant R_n'$.

注意到当$|z|\leqslant|z_m|$时，有

$$\log|f(z)|\geqslant\frac{1}{16}|z|^{\rho-\varepsilon_n}\geqslant\frac{1}{16K^{2\rho}}|z|^{\rho-(5\rho+1)\varepsilon_n},$$

以及当$|z|>|z_m|$时，有

$$\log|f(z)|\geqslant\frac{1}{16}|z|^{\rho-\varepsilon_n}\left(\frac{R_{m-1}}{R_{m+1}}\right)^{\rho-\varepsilon_n}.$$

进一步当 $m=m_n+1$ 时，根据(4.84)和(4.85)式有

$$R_{m+1}=\{K^n R_{m_n}^{1+\varepsilon_{n-1}}\}^{1+\varepsilon_n}=K^{n+1}R_{m_n}^{(1+\varepsilon_{n-1})(1+\varepsilon_n)}$$

$$\leqslant K^2 R_{m_{n-1}+1}^{2\varepsilon_n} R_{m_n}^{(1+\varepsilon_{n-1})(1+\varepsilon_n)}\leqslant K^2 R_{m-1}^{1+5\varepsilon_n},$$

即有

$$\left(\frac{R_{m-1}}{R_{m+1}}\right)^{\rho-\varepsilon_n}\geqslant\left(\frac{1}{K^2 R_{m-1}^{5\varepsilon_n}}\right)^{\rho-\varepsilon_n}$$

$$>\frac{1}{K^{2\rho}R_{m-1}^{5\rho\varepsilon_n}}>\frac{1}{K^{2\rho}|z_m|^{5\rho\varepsilon_n}}>\frac{1}{K^{2\rho}|z|^{5\rho\varepsilon_n}}.$$

当 $m_n+2\leqslant m\leqslant m_{n+1}-1$ 时，有

$$\left(\frac{R_{m-1}}{R_{m+1}}\right)^{\rho-\varepsilon_n}\geqslant\frac{1}{|z|^{3\rho\varepsilon_n}}.$$

当 $m=m_{n+1}$ 时，根据(4.84)和(4.85)式有

$$R_{m+1}=K^{n+1}R_{m_{n+1}}^{1+\varepsilon_n}=K^{n+1}(R_{m_{n+1}-1})^{(1+\varepsilon_n)^2}$$

$$\leqslant KR_{m_n+1}^{2\varepsilon_n+1}R_{m_{n+1}-1}^{(1+\varepsilon_n)^2}$$

$$\leqslant KR_{m_{n+1}-1}^{1+5\varepsilon_n},$$

即有

$$\left(\frac{R_{m-1}}{R_{m+1}}\right)^{\rho-\varepsilon_n}>\left(\frac{1}{KR_{m-1}^{5\varepsilon_n}}\right)^{\rho-\varepsilon_n}>\frac{1}{K^{\rho}|z|^{5\rho\varepsilon_n}}.$$

于是我们判定

$$\log|f(z)|>\frac{1}{16K^{2\rho}}|z|^{\rho-(5\rho+1)\varepsilon_n}.$$

置

$$L=\sum_{m=m_{n_0}+1}^{+\infty}L_m,$$

则 L 是一条趋向于 ∞ 的连续曲线，并且当 $z\in L_m$ 和 $m_n+1\leqslant m\leqslant m_{n+1}\,(n\geqslant n_0+1)$ 时，有

$$\log|f(z)|\geqslant\frac{1}{K^{2\rho}}\cdot|z|^{\rho-(5\rho+1)\varepsilon_n},$$

再注意到 $\varepsilon_n\to 0$，我们判定

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}\geqslant\rho,$$

即定理4.16完全得证.

§4.4.关于整函数渐近路径的长度估计

P. Erdös 曾经提出下述问题[21f]：

设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个有穷级整函数，a 是 $f(z)$ 的一个有穷渐近值.我们能否找出一条相应于 a 的定值路径 L，使得 L 位在圆 $|z|\leqslant r$ 内部分 L_r 的长度 $\operatorname{mes}L_r=O(r)$?

早期，W. Hayman 曾经对 $a=\infty$ 时的情况提出过类似的问题[21d].当 $a=\infty$ 时，如果 $T(r,f)=O\{(\log r)^2\}$，则 L 可以是一条始自原点 $z=0$ 的半直线.但是A. Göldberg 和A. Epeuehko 证明如果 $\dfrac{T(r,f)}{(\log r)^2}$ 趋向于 ∞，则这个估计 $\operatorname{mes}L_r=O(r)$ 一般不再成立[19a].

本节将给出 $\operatorname{mes}L_r$ 的一个一般性估计.具体地，我们有下述结果[43d]：

定理4.17 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数,其级$\lambda<+\infty$,并且a是$f(z)$的一个有穷渐近值,则必定存在一条连续趋于∞的可求长的曲线L,使得

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in L}} f(z)=a,$$

同时L位在圆$<|z|\leqslant r$内部分L_r的长度有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\text{mes}\, L_r}{r^{1+\frac{\lambda}{2}+\varepsilon}}=0,$$

其中$\varepsilon>0$.

证. 根据假设,a是$f(z)$的一个有穷渐近值,所以在z平面上存在一条连续趋于∞的路径Γ,使得

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Gamma}} f(z)=a.$$

根据函数的连续性,不改变渐近值,我们可以对Γ作适当变形,使得Γ具有下述性质:Γ是一条始自原点趋于∞的简单折线,并且组成Γ的这些直线段的端点在开平面$|z|<+\infty$内无凝聚点.

任意取定一个值k, $k>1$,我们构造序列R_m:

$$R_m=K^m,\ m=1,2,\cdots. \tag{4.91}$$

于是Γ必定与每个圆周$|z|=R_m\ (m=1,2,\cdots)$均有交,并且在圆周$|z|=R_m\ (m\geqslant1)$上的交点至多为有限个.于是全体交点构成一个可数集E.我们按照下述方式标记E中的每一点:当自原点始沿着Γ趋向∞时,我们按照相遇交点的顺序标记E中的点为$z_1,z_2,\cdots$.另外,记Γ位在圆环$R_m\leqslant|z|\leqslant R_{m+1}$内部分为$\Gamma_m$.明显地,$\Gamma_m$是由有限个折线段$\Gamma_{mj}(j=1,2,\cdots,k_m;k_m<+\infty)$所组成.

置

$$\varepsilon_m = \max_{z \in \Gamma_m} |f(z) - a|,$$

则当 $m \to +\infty$ 时有 $\varepsilon_m \to 0$. 另一方面，设

$$f(z) = a + b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \cdots, b_n \neq 0, n \geqslant 0.$$

作变换

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b_n z^n}, \tag{4.92}$$

则有 $g(0) = 1$, 以及

$$T(r,f) - \log^+ |b_n r^n| - \log^+ |a| - \log 2$$

$$\leqslant T(r,g) \leqslant T(r,f) + \log^+ \frac{1}{|b_n r^n|} + \log^+ |a| + \log 2 .$$

于是

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(r,g)}{\log r} = \lambda. \tag{4.93}$$

再置

$$\varepsilon'_m = \max_{z \in \Gamma_m} |g(z)|,$$

则有

$$\varepsilon'_m \leqslant \frac{\varepsilon_m}{|b_n| R_m^n}, \tag{4.94}$$

于是，当 $m \to +\infty$ 时有 $\varepsilon'_m \to 0$.

根据(4.93)和(4.94)式，必定存在正整数m_0，使得$m \geqslant m_0$时有

$$\left.\begin{array}{l} T(R_m, g) \leqslant R_m^{\lambda+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \\ \varepsilon_m' < \dfrac{1}{3}. \end{array}\right\} \tag{4.95}$$

记$I_m = [2\varepsilon_m', 3\varepsilon_m']$ $(m \geqslant m_0)$，当$t \in I_m$和$0 \leqslant \phi < 2\pi$时，我们有

$$|g(0) - te^{j\Phi}| \geqslant |g(0)| - t \geqslant 1 - 3\varepsilon_m' > 0.$$

于是

$$n\left(R_{m+1}, \frac{1}{g(z) - te^{j\Phi}}\right) \leqslant \left(\log \frac{R_{m+2}}{R_{m+1}}\right)^{-1}$$
$$N\left(R_{m+2}, \frac{1}{g(z) - te^{j\Phi}}\right) = (\log K)^{-1} N\left(R_{m+1} \frac{1}{\dfrac{g(z)}{t} - e^{j\Phi}}\right).$$

再根据 Cartan 恒等式，导出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(R_{m+1}, \frac{1}{g(z) - te^{i\Phi}}\right) d\Phi \leqslant (\log K)^{-1}$$
$$\left\{T\left(R_{m+2}, \frac{g(t)}{t}\right) - \log^+ \frac{1}{t}\right\} \leqslant (\log K)^{-1} T(R_{m+2}, g).$$

进一步根据长度面积原理，我们判定

$$\int_{2\varepsilon'_m}^{3\varepsilon'_m} \frac{l_m^2(t)}{t} dt \leqslant 2\pi^2 R_{m+1}^2 (\log K)^{-1} T(R_{m+2}, g) = K_0,$$

其中$l_m(t)$表示等位线$|g(z)| = t$位在圆$|z| < R_{m+1}$内部分的总长度.

记 I_m 中满足条件

$$\frac{l_m^2(t)}{t} \geqslant \frac{2K_0}{3\varepsilon_m' - 2\varepsilon_m'}$$

的值 t 集合为 J_m, 则有

$$K_0 \geqslant \int_{J_m} \frac{l_m^2(t)}{t} dt \geqslant \frac{2K_0}{\varepsilon_m'} \text{mes } J_m,$$

于是

$$\text{mes } J_m \leqslant \frac{\varepsilon_m'}{2}.$$

置 $I_m^* = I_m - J_m$, 则有

$$\text{mes } I_m^* \geqslant \frac{\varepsilon_m'}{2},$$

并且当 $t \in I_m^*$ 时有

$$\frac{l_m^2(t)}{t} < \frac{2}{\varepsilon_m'} K_0,$$

$$l_m^2(t) < 12\pi^2 R_{m+1}^2 (\log K)^{-1} T(R_{m+1}, g),$$

$$l_m(t) < 2\sqrt{3}\,\pi R_{m+1} \sqrt{(\log K)^{-1} T(R_{m+1}, g)}.$$

进一步根据(4.95)式,我们得到

$$l_m(t) < 2\sqrt{3}\,\pi R_{m+1} \sqrt{(\log K)^{-1} T(R_{m+1}, g)} \leqslant 2\sqrt{3}\,\pi$$
$$\times R_{m+1} \sqrt{(\log K)^{-1} R_{m+1}^{\lambda+\varepsilon}} = 2\sqrt{3}\pi R_{m+1} \sqrt{(\log K)^{-1} K^{\lambda+3} R_m^{\lambda+\varepsilon}} \tag{4.96}$$

导数$g'(z)$在圆$|z| \leqslant R_{m+1}$上至多有有限个零点.因此,在I_m^*中存在值ε_m'',使得在圆$|z| \leqslant R_{m+1}$内部分的等位线$|g(z)| = \varepsilon_m''$上无$g'(z)$的零点,即等位线是解析和可求长的.考虑集合

$$D(\varepsilon_m'') = E\{z \mid |g(z)| < \varepsilon_m'', R_m < |z| < R_{m+1}\}.$$

记含有$\Gamma_{mj}(j = 1, 2, \cdots, k_m)$的连通分支为$D_{mj}(j = 1, 2, \cdots, k_m)$.明显地,这$k_m$个连通分支中的任何两个连通分支,或者无交,或者完全重合.因此,只存在$k_m'(k_m' \leqslant k_m)$个判别的连通分支$D_{mj}'(j = 1, 2, \cdots, k_m')$.$D_{mj}'$的边界组成或为两个圆周$|z| = R_m$和$|z| = R_{m+1}$上的弧段,或为等位线$|g(z)| = \varepsilon_m''$的一部分.如果$j \neq j'$,则$D_{mj}'$和$D_{mj'}'$的边界不能有交.事实上,如果不然,即在等位线$|g(z)| = \varepsilon_m''$上存在一点$z_0$,使得点$z_0$同时位在$D_{mj}'$和$D_{mj'}'$的边界上.因为$g'(z_0) \neq 0$,所以$g(z)$在点$z_0$的一个邻域内是单叶的.于是,这个邻域被等位线$|g(z)| = \varepsilon_m''$分成两部分,并且在其中一部分上有$|g(z)| < \varepsilon_m''$,而在另一部分上有$|g(z)| > \varepsilon_m''$.因此,我们判定$D_{mj}'$和$D_{mj'}'$有交,从而$D_{mj}'$和$D_{mj'}'$完全重合.但是,$D_{mj}'$和$D_{mj'}'$是判别的.所以我们得到一个矛盾.另外,记$E$和$D_{mj}'$的边界的交为点集合$E_{mj}'$,则$E_{mj}'$中的每一个点必定均属于$D_{mj}'$的同一个边界分支.事实上,如果不然,假设在$E_{mj'}'$中,存在两个点$z'$和$z''$分别属于$D_{mj}'$的两个不同的边界分支$C'$和$C''$η我们任意考虑一个分支,譬如$C'$.因为$D_{mj}'$是有界域,所以$C'$是一条闭围线,从而$C'$分割$z$平面为两部分.记有界部分为$D_1'$,无界部分为$D_2'$,则原点$z = 0$必定不能位在$D_1'$,内.否则根据最大模原理应有

$$1 = |g(0)| \leqslant \varepsilon_m'' \leqslant 3\varepsilon_m' < 1.$$

于是我们得到一个矛盾.因此,D_1'必定完全位在圆环$R_m < |z| < R_{m+1}$内.另一方面,点z'位在圆周$|z| = R_m$或$|z| = R_{m+1}$上,并且含有点z'在自己内部的一段圆周弧属于C',所以D_{mj}'必定整个地位在D_1'内.事实上,如果不然,则z'不能成为D_{mj}'的边界点.明显

地，C'' 位在 D_1' 内．于是 z'' 位在 D_1' 内，从而位在圆环 $R_m < |z| < R_{m+1}$ 内．但是 z'' 只能位在圆周 $|z| = R_m$ 或 $|z| = R_{m+1}$ 上，从而导出矛盾．

现在，我们考虑集合 $D = \{D'_{mj} | m = m_0 + 1, m_0 + 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots, k'_m\}$．首先在 E 中取一点 z_{i_0}，使得 z_{i_0} 是 Γ 与圆周 $|z| = R_{m_0}$ 的最后一个交点．明显地，Γ 介在两点 z_{i_0} 和 z_{i_0+1} 间的折线部分必定属于 D 中的一个域 D_{i_0}．设 E 与 D_{i_0} 的边界的交为点集合 E_{i_0} 和 E_{i_0} 中的点的最大标号为 i_1，$i_1 \geqslant i_0 + 1$．注意到 z_{i_0} 和 z_{i_1} 属于 D_{i_0} 的同一个边界分支，所以存在边界曲线 L_1 连接点 z_{i_0} 和 z_{i_1}，同时 L_1 是逐段解析和可求长曲线．然后，我们考虑 Γ 介在两点 z_{i_1} 和 z_{i_1+1} 间的折线部分，类似地，可以确定 D 中的一个域 D_{i_1} 和 E 中的一个子集合 E_{i_1}．记 E_{i_1} 中点的最大标号为 i_2，$i_2 \geqslant i_1 + 1$，连接 z_{i_1} 和 z_{i_2} 的一段边界曲线为 L_2，如此继续，我们得到一个曲线序列 $L_1, L_2, \cdots$．
置

$$L = \sum_{j=1}^{+\infty} L_j,$$

则 L 是一条连续趋向于 ∞ 的可求长曲线．现在，当 $r > R_{m_0}$ 时，我们估计 $\operatorname{mes} L_r$．首先存在一个正整数 m_1，使得

$$R_{m_1} < r \leqslant R_{m_1+1}.$$

于是

$$\operatorname{mes} L_r \leqslant \operatorname{mes} L_{R_{m_1+1}} \leqslant \sum_{m=m_0}^{m_1} \{4\pi(R_m + R_{m+1}) + \operatorname{lm}(\varepsilon''_m)\}.$$

进一步根据(4.96)式，我们有

$$\operatorname{mes} L_r \leqslant \sum_{m=m_0}^{m_1} \{4\pi(R_m + R_{m+1})$$

$$+ 2\sqrt{3}\,\pi R_{m+1}\sqrt{(\log K)^{-1}K^{\lambda+\varepsilon}R_m^{\lambda+\varepsilon}}\,\}.$$

再根据(4.91)和(4.95)式，导出

$$\operatorname{mes} L_r \leqslant \sum_{m=m_0}^{m_1}\{4\pi(1+K)$$

$$+ 2\sqrt{3}\,\pi K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}\cdot\sqrt{(\log K)^{-1}}\,\}R_m^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}.$$

注意到

$$\frac{R_m^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}{R_{m_1}^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}} = \left(\frac{1}{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}\right)^{m_1-m}, \quad K > 1,$$

则得

$$\operatorname{mes} L_r \leqslant 4\pi\{1 + K + K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}\sqrt{(\log K)^{-1}}\,\}$$

$$\times R_{m_1}^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}\right)^m$$

$$\leqslant 4\pi\{1 + K + K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}\sqrt{(\log K)^{-1}}\,\}$$

$$\times R_{m_1}^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}\cdot\frac{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}-1}$$

$$\leqslant 4\pi\{1 + K + K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}\sqrt{(\log K)^{-1}}\,\}$$

$$\times\frac{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}-1}r^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}.$$

于是

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\operatorname{mes}L_r}{r^{1+\frac{\lambda}{2}+\varepsilon}}=0.$$

最后，我们证明

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}} f(z)=a. \tag{4.97}$$

事实上，若用 L_m 表示 L 位在圆环 $R_m\leqslant|z|\leqslant R_{m+1}$ 内的部分，则有

$$\max|g(z)|\leqslant\varepsilon''_m\leqslant3\varepsilon'_m.$$

再根据(4.92)和(4.94)式，我们判定

$$\max_{z\in L_m}|f(z)-a|\leqslant|b_n|R^n_{m+1}\max_{z\in L_m}|g(z)|$$

$$\leqslant|b_n|R^n_{m+1}\cdot3\cdot\frac{\varepsilon_n}{|b_n|R^n_m}=3K^n\varepsilon_n.$$

注意到 $m\to+\infty$ 时有 $\varepsilon_m\to0$. 于是(4.97)式成立，即定理4.17得证.

定理4.18 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个超越整函数，其级 $\lambda<+\infty$，则必定存在一条连续趋于 ∞ 的可求长曲线 L，使得

$$\underline{\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}}}\frac{\log|f(z)|}{\log|z|}=+\infty,$$

同时对位在圆 $|z|\leqslant r$ 内部分 L_r 的长度有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\operatorname{mes}L_r}{r^{1+\frac{\lambda}{2}+\varepsilon}}=0,$$

其中$\varepsilon > 0$.

证. 首先根据定理4.14, 置其中的$\nu(r) = \log r$, 则存在一条连续趋于∞的曲线Γ, 使得

$$\varlimsup_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \Gamma}} \frac{\log |f(z)|}{\log |z|} = +\infty.$$

根据函数的连续性, 我们可以要求Γ是一条始自原点$z = 0$趋于∞的简单折线, 并且组成Γ的这些线段的端点在开平面$|z| < +\infty$内无凝聚点.

任意取定一个值K, $K > 1$, 我们构造序列R_m:

$$R_m = K^m, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{4.98}$$

于是Γ与每个圆周$|z| = R_m (m \geqslant 1)$的交点至多为有限个. 记全体交点为$E$. 以下, 完全同于定理4.17的证明, 我们标记点集E中的点为$z_1, z_2, \cdots$, 并且用相同的方式定义Γ_m和$\Gamma_{mj} (j = 1, 2, \cdots, k_m; k_m < +\infty)$. 置

$$A_m = \min_{z \in \Gamma_m} \left\{ \frac{\log |f(z)|}{\log |z|} \right\},$$

则当$m \to +\infty$时有$A_m \to +\infty$. 另一方面, 设

$$f(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \cdots, \quad b_n \neq 0, \quad n \geqslant 0.$$

作变换

$$g(z) = \frac{f(z)}{b_n z^n}, \tag{4.99}$$

则有$g(0) = 1$, 以及

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} = \lambda. \tag{4.100}$$

再置

$$A'_m = \min_{z \in \Gamma_m} \left\{ \frac{\log|g(z)|}{\log|z|} \right\},$$

则有

$$A'_m \geq \begin{cases} A_m - n - \dfrac{\log|b_n|}{\log R_m}, & |b_n| \geq 1, \\ A_m - n - \dfrac{\log|b_n|}{\log R_{m+1}}, & |b_n| < 1. \end{cases} \tag{4.101}$$

于是当 $m \to +\infty$ 时，有 $A'_m \to +\infty$. 根据(4.100)和(4.101)式，对于任意取定的数 $\varepsilon > 0$，必定存在正整数 m_0，使得当 $m \geq m_0$ 时，有

$$T(R_m, g) \leq R_m^{\lambda+\varepsilon}, R_m^{A'm} > 4.$$

记 $I_m = \left[\frac{1}{4} R_m^{A'm}, \frac{1}{2} R_m^{A'}\right] (m \geq m_0)$. 类似于定理4.17证明中的讨论，我们可以判定在 I_m 中存在值 A''_m，使得导数 $g'(z)$ 在圆 $|z| \leq R_{m+1}$ 内部分的等位线 $|g(z)| = A'_m$ 上无零点，并且位在圆 $|z| < R_{m+1}$ 内部分的等位线的总长度

$$l_m(A''_m) \leq 2\sqrt{2}\, \pi R_{m+1} \sqrt{(\log K)^{-1} k^{\lambda+\varepsilon} R_{m+1}^{\lambda+\varepsilon}}\,. \tag{4.102}$$

考虑集合

$$D(A''_m) = E\{z \mid |g(z)| > A''_m, R_m < |z| < R_{m+1}\}.$$

记含有 Γ_{mj} $(j = 1, 2, \cdots, k_m)$ 的连通分支为 D_{mj} $(j = 1, 2, \cdots, k_m)$. 在这 k_m 个连通分支中，存在着 k'_m $(k'_m \leq k_m)$ 个判别的连通分支 D'_{mj} $(j = 1, 2, \cdots, k'_m)$，并且 D'_{mj} 的边界组成或为两个圆周 $|z| = R_m$ 和 $|z| = R_{m+1}$ 上的弧段，或为等位线 $|g(z)| = A''_m$ 的一部分，以及两个判别的连通分支 D'_{mj} 和 $D'_{mj'}$ $(j \neq j')$ 的边界不能有交. 另外，记 E 和 D'_{mj}

的边界的交为点集合 E'_{mj}, 则 $E'_{mj}(j=1,2,\cdots,k'_m)$ 中的每一个点必定均属于 D'_{mj} 的同一个边界分支,但可能有且至多有一个点集合例外.事实上,如果存在一个点集合 E'_{mj} $(1\leqslant j\leqslant k'_m)$, 使得 E'_{mj} 中的两个点 z' 和 z'' 分别属于 D'_{mj} 的两个不同的边界分支 C' 和 C'', 则我们可以判定 C' 和 C'' 在圆环 $R_m<|z|<R_{m+1}$ 内界囿一个环形域,并且原点 $z=0$ 和无穷远点分别属于这个环形域的两个不同的补集分支.首先考虑 C'. C' 是一条闭围线,分割 z 平面为有界部分 D'_1 和无界部分 D'_2. D'_1 必定含有原点 $z=0$, 否则类似于定理4.17证明中的讨论,可以判定 z'' 必定位在圆环 $R_m<|z|<R_{m+1}$ 内,从而导至矛盾.同理, C'' 界囿的有界部分 D''_1 也必定含有原点 $z=0$. 于是, C' 和 C'' 界域的环形域具有所述性质.其次,我们注意到 z' 和 z'' 必定分别位在两个圆周 $|z|=R_m$ 和 $|z|=R_{m+1}$ 上,并且在 D'_{mj} 上存在一条连接这两个点的曲线 C. 现在,我们可以证明不能存在另外集合 $E'_{mj'}$ $(j\neq j')$, 使得 $E'_{mj'}$ 中的点分别属于 $D'_{mj'}$ 的不同边界分支.否则,相应于 $E'_{mj'}$ 的环形域必定和 C 有交,于是 D'_{mj} 和 $D'_{mj'}$ 有交,因而完全重合.但是 D'_{mj} 和 $D'_{mj'}$ 是判别的,于是我们导出矛盾.

考虑集合 $D=\{D'_{mj}\,|\,m=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,k'_m\}$. 首先在 E 中取一点 z_{i_0}, 使得 z_{i_0} 是 Γ 和圆周 $|z|=R_{m_0}$ 的最后一个交点.明显地, Γ 介于两点 z_{i_0} 和 z_{i_0+1} 间的折线部分必定属于 D 中的一个域 D_{i_0}. 设 E 与 D_{i_0} 的边界的交为点集合 E_{i_0} 和记 E_{i_0} 中点的最大标号为 i_1, $i_1\geqslant i_0+1$. 如果 i_0 和 i_1 属于 D_{i_0} 的同一边界分支,则存在一段边界曲线 L_1 连接 Z_{i_0} 和 D_{i_1}, 同时 L_1 是逐段解析可求长的.如果 z_{i_0} 和 z_{i_1} 分别属于 D_{i_0} 的不同边界分支 C'_{i_0} 和 C''_{i_0}, 则根据上述讨论,在 C'_{i_0} 上存在一点 z', 使得 $\arg z'=\arg z_{i_1}$. 用直线 C 连接 z' 和 z_{i_1} 点,若 C 交于 D_{i_0} 的补集,则 C 位在补集内部分用 D_{i_0} 的边界曲线取代.如是我们也可以得到一条连接 z_{i_0} 和 z_{i_1} 的可求长曲线 L_1. 然后,我们考虑 Γ 介在 z_{i_1} 和 z_{i_1+1} 间的折线部分.作类似的讨论,我们可以得到一条连接点 z_{i_1} 和 z_{i_2} $(i_2\geqslant i_1+1)$ 的可求长曲线 L_2. 如此继续,我们得到一个曲线序列 $L_1, L_2, \cdots$. 置

$$L = \sum_{i=1}^{+\infty} L_i,$$

则 L 是一条连续趋于 ∞ 的可求长曲线.现在,当 $r \geqslant R_{m_0}$ 时,我们估计 $\operatorname{mes} L_r$. 首先存在一个正整数 m_1, 使得

$$R_{m_1} < r \leqslant R_{m_1+1}.$$

于是

$$\operatorname{mes} L_r \leqslant \operatorname{mes} L_{R_{m_1+1}} \leqslant \sum_{m=m_0}^{m_1} \{4\pi (R_1 + R_{m+1}) + R_{m+1} + l_m(A_m'')\}.$$

进一步根据(4.98)和(4.102)式,我们有

$$\operatorname{mes} L_r \leqslant \sum_{m=m_0}^{m_1} \{4\pi + (4\pi + 1)K + 2\sqrt{2}\,\pi K^{\lambda+1+\varepsilon}\sqrt{(\log K)^{-1}}\} R_m^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}.$$

注意到

$$\frac{R_m^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}{R_{m_1}^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}} = \left\{\frac{1}{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}\right\}^{m_1 - m_0}, \quad K > 1,$$

则得

$$\operatorname{mes} L_r \leqslant \{4\pi + (4\pi + 1)K + 2\sqrt{2}\,\pi K^{\lambda+1+\varepsilon} \times \sqrt{(\log K)^{-1}}\} R_{m_1}^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}\right)^m$$

$$\leqslant \{4\pi + (4\pi + 1)K + 2\sqrt{2}\,\pi K^{\lambda+1+\varepsilon}$$

$$\times \sqrt{(\log K)^{-1}}\Big\} \frac{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}}{K^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}-1} r^{1+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}}.$$

于是

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{mes} L_r}{r^{1+\frac{\lambda}{2}+\varepsilon}} = 0.$$

最后，我们证明

$$\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in L}} \frac{\log |f(z)|}{\log |z|} = +\infty. \tag{4.103}$$

事实上，若用 L_m 表示 L 位在圆环 $R_m \leqslant |z| \leqslant R_{m+1}$ 内的部分，则有

$$\min_{z \in L_m} |g(z)| \geqslant A''_m \geqslant \frac{1}{4} R_m^{A'm}. \tag{4.104}$$

再根据(4.99)和(4.104)式，我们判定

$$\min_{z \in L_m} |f(z)| \geqslant \frac{1}{4} |b_n| R_m^{A'm+n}.$$

于是当 $z \in L_m$ 时，有

$$|f(z)| \geqslant \frac{1}{4} |b_n| \; |z|^{A'm+n} \left\{ \frac{R_m}{|z|} \right\}^{A'm+n}$$

$$\geqslant \frac{1}{4} |b_n| \; |z|^{A'm+n} \left(\frac{1}{k} \right)^{A'm+n},$$

$$\log |f(z)| \geqslant \log \frac{|b_n|}{4} + (A'_m + n) \left(1 - \frac{\log K}{\log |z|} \right) \log |z|.$$

注意到当 $m \to +\infty$ 时，有 $A'_m \to +\infty$. 于是(4.103)式成立，即定

理4.18得证.

从定理4.17和定理4.18的证明中，我们可以看出，如果知道了函数$f(z)$沿着一条渐近路径Γ趋近于渐近值a(有穷或否)的速度，则一般地总可以求得一条可求长的渐近路径L，使得L和Γ定义相同的渐近值a，并且对L_r的长度$\mathrm{mes}L_r$可以给出估计，同时$f(z)$沿着L趋近于a的速度得到"保持".因此，我们可以补充§4.3节中的一些有关增长性的结果，使得相应的渐近路径有一个长度估计.实际上，我们只是将定理4.18作为一个例子来说明上述事实.

§4.5. 直接超越奇点

4.5.1 Ahlfors定理

1932年，L. Ahlfors证明了下述结果：[1c]

定理4.19 设$w=f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个λ级亚纯函数，$z=\varphi(w)$是$f(z)$的反函数.记$\varphi(w)$的判别直接超越奇点个数为l，则当$\lambda<1$时，有$0\leqslant l\leqslant 1$；当$\lambda\geqslant 1$时，有$l\leqslant 2\lambda$.

证. 当$\lambda=+\infty$时，定理4.19显然成立.因此，不妨假设$\lambda<+\infty$.再设$a_i\,(i=1,2,\cdots,l;2\leqslant l<+\infty)$是$\varphi(w)$的$l$个判别直接超越奇点.于是，存在一个值$\rho>0$，使得在$z$平面上相应于$a_i\,(i=1,2,\cdots,l)$的$l$个区域$\Omega_\rho^i\,(i=1,2,\cdots,l)$互不相交，并且当$z\in\Omega_\rho^i\,(1\leqslant i\leqslant l)$时，有[1)]

$$\frac{1}{|f(z)-a_i|}>\frac{1}{\rho},\ f(z)\neq a_i.$$

1) 当$a_i=\infty$时，我们用$f(z)$代替$\dfrac{1}{f(z)-a_i}$.

以及当 $z\in \Gamma_\rho^i$ 时，有

$$\frac{1}{|f(z)-a_i|}=\frac{1}{\rho},$$

其中 Γ_ρ^i 是 Ω_ρ^i 的有限边界部分，同时是解析曲线.

我们在域 $\Omega_\rho^i\ (1\leqslant i\leqslant l)$ 内任取一点 z_i，然后置

$$r_0=\max\{1,|z_1|,|z_2|,\cdots,|z_l|\}.$$

再记圆周 $|z|=t\ (t\geqslant r_0)$ 位在 Ω_ρ^i 内部分为 θ_{it}，θ_{it} 的线性测度为 $t\theta_i(t)$. 根据定理3.1，当 r 充分大时，我们有

$$\log\frac{1}{|f(z_i)-a_i|}\leqslant\log\frac{1}{\rho}+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_i|}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}}$$

$$\times\log M\left\{\overline{\Omega}_\rho^i\cap(|z|=r),\frac{1}{f-a_i}\right\},$$

$$\pi\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}\leqslant\log\log M\left\{\overline{\Omega}_\rho^i\cap(|z|=r),\frac{1}{f-a_i}\right\}$$

$$+\log\left\{9\sqrt{2}\left[\log\frac{\rho}{|f(z_i)-a_i|}\right]^{-1}\right\}$$

$$i=1,2,\cdots,l. \tag{4.105}$$

进一步应用引理3.8，置其中的 $f(z)$ 为 $\dfrac{1}{f(z)-a_i}$，r 是 $2r$，$R'=3r$，$R=4r$ 和 $H=\dfrac{r}{8e}$，我们判定当 $|z|\leqslant 2r$ 和 $z\overline{\in}(\gamma)$ 时有

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_i|}\leqslant\left\{5+\frac{\log(48e)}{\log\frac{4}{3}}\right\}T\left(4r,\frac{1}{f-a_i}\right)$$

$$\leqslant \left\{5+\frac{\log(48e)}{\log\frac{4}{3}}\right\}\{T(4r,f)+O(1)\}.$$

我们一方面在区间 $[r,2r]$ 中取值 t, 使得圆周 $|z|=t$ 与 (r) 无交. 另一方面, 根据最大模原理, 我们判定 $\log M\left\{\overline{\Omega}^i_\rho\cap(|z|=r),\frac{1}{f-a_i}\right\}$ 是 r 的单调增函数. 于是

$$\log M\left\{\overline{\Omega}^i_\rho\cap(|z|=r),\frac{1}{f-a_i}\right\}$$

$$\leqslant \log M\left\{\overline{\Omega}^i_\rho\cap(|z|=t),\frac{1}{f-a_i}\right\}$$

$$\leqslant \left\{5+\frac{\log(48e)}{\log\frac{4}{3}}\right\}\{T(4r,f)+O(1)\}.$$

再结合(4.105)式, 我们得到

$$\pi\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}\leqslant\log T(4r,f)+O(1),\ i=1,2,\cdots,l,$$

$$\sum_{i=1}^{l}\pi\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)}\leqslant l\log T(4r,f)+O(1).$$

注意到

$$l^2=\left\{\sum_{i=1}^{l}\sqrt{\theta_i(t)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_i(t)}}\right\}^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{l}\theta_i(t)\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\theta_i(t)}\leqslant 2\pi\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\theta_i(t)}$$

$$\frac{l^2}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{l} \frac{\pi}{\theta_i(t)},$$

$$\frac{l^2}{2}\log\frac{r}{4r_0} = \frac{l^2}{2}\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t} \leqslant \sum_{i=1}^{l}\pi\int_{2r_0}^{\frac{1}{2}r}\frac{dt}{t\theta_i(t)},$$

则有

$$\frac{l^2}{2}\log\frac{r}{4r_0} \leqslant l\log T(4r,f) + O(1),$$

$$\frac{l}{2} \leqslant \frac{\log T(4r,f)}{\log 4r}\cdot\frac{\log 4r}{\log\frac{r}{4r_0}} + \frac{O(1)}{\log\frac{r}{4r_0}}.$$

命$r \to +\infty$，我们判定$l \leqslant 2\lambda$，即有$\lambda \geqslant 1$. 因此当$\lambda < 1$时，只能有$0 \leqslant l \leqslant 1$，从而定理4.19完全得证.

定理4.20 设$w = f(z)$是开平面$|z| < +\infty$上的一个亚纯函数，并且满足条件：

(1) 反函数$z = \varphi(w)$具有一个直接超越奇点a.

(2) 当$a \neq \infty$时，有

$$\min_{0<\theta<2\pi}\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} = O(1);$$

当$\alpha = \infty$时，有

$$\min_{0<\theta<2\pi}|f(re^{i\theta})| = O(1),$$

则在z平面上存在一条伸展到∞的连续曲线L，使得当$a \neq \infty$时，有

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}}\frac{\log\log\frac{1}{|f(z)-a|}}{\log|z|} \geqslant \frac{1}{2};$$

当 $a=\infty$ 时，有

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|} \geqslant \frac{1}{2}.$$

证. 不失一般性，我们只须考虑 $\alpha=\infty$ 时的情况. 根据直接超越奇点的定义和条件(2)，以及导数 $f'(z)$ 的零点和极点个数至多为可数个，我们可以求得一个值 ρ, $\rho>0$ 使得在 z 平面上相应的区域 Ω_ρ 具有下述性质：

1) 当 $z\in\Omega_\rho$ 时，有 $|f(z)|>\dfrac{1}{\rho}$ 和 $f(z)\neq\infty$.

2) Ω_ρ 的有限边界部分 Γ_ρ 是解析曲线，并且当 $z\in\Gamma_\rho$ 时，有 $|f(z)|=\dfrac{1}{\rho}$.

3) 当 t 充分大时，每个圆周 $|z|=t$ 均与 Γ_ρ 有交.

首先，我们取一点 $z_0\in\Omega_\rho$，使得当 $t\geqslant|z_0|$ 时，圆周 $|z|=t$ 均交于 Γ_ρ. 记圆周 $|z|=t$ 位在 Ω_ρ 内的部分弧段为 θ_t, θ_t 的线性测度为 $t\theta(t)$. 根据最大模原理，我们判定 $M\{\overline{\Omega}_\rho\cap(|z|=t),f\}$ 是一个关于 t 的单调增函数. 应用定理 3.1，当 $t>4|z_0|$ 时，我们有

$$\log|f(z_0)| \leqslant \log\frac{1}{\rho}+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_0|}^{\frac{1}{2}t}\frac{dr}{r\theta_t(r)}} \times\log M\left\{\overline{\Omega}_\rho\cap(|z|=t),f\right\}.$$

注意到 $|f(z_0)|>\dfrac{1}{\rho}$ 和 $\theta(r)\leqslant 2\pi\,(r\geqslant|z_0|)$，则导出

$$\log\log M\left\{\overline{\Omega}_\rho\cap(|z|=t),f\right\}\geqslant\frac{1}{2}\log t-\text{const}.$$

因此，只要取 t 适当大，一方面在 θ_t 上必定存在一点 $z_1 \in \Omega_\rho$，使得

$$|z_1| \geqslant 72^{\frac{12\times 13}{2}},\ |z_1|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}} > \frac{4}{\rho},\ \log|f(z_1)| \geqslant |z_1|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}};$$

另一方面依照关系式

$$\log M\left\{\overline{\Omega}_\rho \bigcap (|z| = t_1'),f\right\} = \frac{1}{4}|z_1|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}}$$

定义的值 $t_1' > 1$.

现在，我们构造两个序列 $t_n\ (n=1,2,\cdots)$ 和 $t_n'\ (n=1,2,\cdots)$. 具体地，置

$$\begin{cases} t_1 = |z_1| \\ t_{n+1} = 72^{n+12} t_n^{1+\varepsilon_n},\quad \varepsilon_n = \dfrac{1}{11+n},\quad n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

和依照关系式

$$\log M\{\overline{\Omega}_\rho \bigcap (|z| = t_n'),f\} = \frac{1}{4} t_n^{\frac{1}{2}-\varepsilon_n},\quad n=1,2,\cdots$$

定义序列 t_n'. 明显地有

$$t_n' < t_{n+1}' \to +\infty\ (n\to+\infty),\quad t_n' > 1, n=1,2,\cdots.$$

以下，我们作相同于定理4.4证明的讨论，即可判定定理4.20成立.

系 1. 在定理4.20的假设下，$f(z)$ 的下级 $\mu \geqslant \dfrac{1}{2}$.

系 2. 设 $w=f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数，其下级 $\mu<\dfrac{1}{2}$，并且 $f(z)$ 的反函数 $z=\varphi(w)$ 具有一个直接超越奇点 a，则

存在一单调递增趋于 ∞ 的序列 $\{r_n\}$，使得

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \min\limits_{0<\theta<2\pi} |f(r_n e^{i\theta})| = +\infty & a=\infty, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \min\limits_{0<\theta<2\pi} \dfrac{1}{|f(r_n e^{i\theta})-a|} = +\infty & a\neq\infty. \end{cases}$$

系 2 是经典的 Wiman 定理[41a]的一个推广.

4.5.2. 两个引理

引理 4.11 设 $w=f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数，其下级 $\mu<+\infty$，并且满足条件：

(1) 反函数 $z=\varphi(w)$ 具有一个直接超越奇点 a.

(2) 当 $a\neq\infty$ 时，有

$$\min_{0<\theta<2\pi} \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} = O(1);$$

当 $a=\infty$ 时，有

$$\min_{0<\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})| = O(1),$$

则对于任意取定的 η，$0<\eta<\dfrac{1}{2}$，在 z 平面上存在一个边界含有 ∞ 点的区域 Ω 使得 Ω 具有下述性质：

(1) 当 $z\in\Omega$ 时，

$$\begin{cases} \log\dfrac{1}{|f(z)-a|} \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta},\ f(z)\neq a\quad (a\neq\infty), \\ \log|f(z)| \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta},\ f(z)\neq\infty\quad (a=\infty). \end{cases}$$

(2) 如果序列 $r_n(n=1,2,\cdots)$ 满足条件：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}=\mu,$$

则对充分大的 n, 在区间 $[r_n^{1-\eta},r_n]$ 中存在值 t_n, 使得

$$\theta(t_n)\geqslant K(\eta,\mu)=\frac{(1-\eta)\eta\pi}{2(\mu+1)}.$$

此处 $\theta(t)$ 有下述意义：若用 θ_t 表示圆周 $|z|=t$ 位在 Ω 内部分的弧段，则 $t\theta(t)$ 表示 θ_t 的线性测度.

证　不失一般性，我们只须考虑 $a=\infty$ 时的情况. 作类似于定理4.20的证明，我们可以求得一个值 $\rho>0$, 使得在 z 平面上相应的区域 Ω_ρ 具有下述性质：

1) 当 $z\in\Omega_\rho$ 时，有 $|f(z)|>\dfrac{1}{\rho}$ 和 $f(z)\neq\infty$.

2) Ω_ρ 的有限边界部分 Γ_ρ 是解析曲线，并且当 $z\in\Gamma_\rho$ 时，有 $|f(z)|=\dfrac{1}{\rho}$.

3) 当 t 充分大时，每个圆周 $|z|=t$ 均与 Γ_ρ 有交.

我们取一点 $z_0\in\Omega_\rho$, 使得当 $t\geqslant|z_0|$ 时，圆周 $|z|=t$ 均交于 Γ_ρ. 记圆周 $|z|=t$ 位在 Ω_ρ 内的部分为 θ_{ρ_t}, θ_{ρ_t} 的线性测度为 $t\theta_\rho(t)$, 则类似于定理4.20的证明，我们可以判定，当 $t>4|z_0|$ 时，有

$$\log\log M\{\overline{\Omega_\rho}\cap(|z|=t),f\}\geqslant\frac{1}{2}\log t-\text{const}.$$

于是，只要取 t 适当大，在 θ_{ρ_t} 上至少存在一点 z_1, 使得

$$\left.\begin{aligned}&|z_1|\geqslant\max\left\{72^{\frac{4}{\eta^2}},\ 32^{\frac{4(\mu+1)}{\eta(1-\eta)^2}}\left[18\sqrt{2}\left(3+\frac{\log 64e}{\log 2}\right)^{\frac{2}{1-\eta}}\right]\right\}\\&|z_1|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}>\frac{4}{\rho},\ \log|f(z_1)|>|z_1|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}.\end{aligned}\right\}\quad(4.106)$$

然后我们定义序列 R_m:

$$\begin{cases} R_1 = |z_1|, \\ R_m = R_m^{1+\frac{\eta}{2}}, m=1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{4.107}$$

设在圆周 $|z| = R_m (m \geqslant 1)$ 上存在一点 $z_m \in \Omega_\rho$, 使得

$$\log|f(z_m)| \geqslant |z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}. \tag{4.108}$$

明显地,在区间 $\left[\frac{1}{4}|z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}, \frac{1}{2}|z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}\right]$ 中存在值 A_m, 使得导数 $f'(z)$ 在等位线 $\log|f(z)| = A_m$ 上无零点,即等位线是解析的.考虑集合

$$D = E\{z|\log|f(z)| > A_m\}.$$

记含有点 z_m 的连通分支为 D_m. 根据不等式

$$A_m \geqslant \frac{1}{4}|z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} \geqslant \frac{1}{4}|z_1|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} > \frac{1}{\rho},$$

我们判定 $D_m \subset \Omega_\rho$. 于是 $f(z)$ 在 D_m 上全纯.另一方面,根据最大模原理,我们判定 D_m 是一个无界域.记 D_m 位在圆 $|z| < R_{m+1}$ 内部分且含有点 z_m 的连通分支为 Ω_m, 圆周 $|z| = R_{m+1}$ 与 Ω_m 的边界的交为 θ_{m+1}, 圆周 $|z| = t (t < R_{m+1})$ 位在 Ω_m 内部分为 θ_{mt}, θ_{mt} 的线性测度为 $t\theta_m(t)$. 以下,我们证明在 θ_{m+1} 上至少存在一点 z_{m+1}, 使得

$$\log|f(z_{m+1})| \geqslant |z_{m+1}|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}.$$

否则,应用定理 3.1,我们有

$$\log|f(z_m)| \leqslant A_m + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_m|}^{\frac{1}{2}R_{m+1}} \frac{dt}{t\theta_m(t)}} R_{m+1}^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}.$$

进一步注意到

$$\theta_m(t) \leqslant \theta_\rho(t) \leqslant 2\pi,\ A_m < \frac{1}{2} |z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}.$$

和(4.108)式,我们导出

$$|z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} \leqslant \frac{1}{2} |z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} + 9\sqrt{2}\left\{4\frac{|z_m|}{R_{m+1}}\right\}^{\frac{1}{2}} R_{m+1}^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}},$$

$$R_{m+1}^{\frac{\eta}{2}} \leqslant 72|z_m|^{\frac{\eta}{2}},\ R_{m+1} < 72^{\frac{2}{\eta}} R_m,\ R_m < 72^{\frac{4}{\eta^2}}.$$

于是

$$|z_1| = R_1 \leqslant R_m < 72^{\frac{4}{\eta^2}}.$$

但是这与(4.106)式相矛盾.

当 $z \in \Omega_m$ 时,有

$$\log|f(z)| > A_m \geqslant \frac{1}{4} |z_m|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}},\ |z| < R_{m+1}.$$

我们作进一步讨论:当 $|z| \leqslant |z_m|$ 时,有

$$\log|f(z)| \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta} \frac{1}{4} |z_m|^{\frac{\eta}{2}} \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta} \cdot \frac{1}{4} |z_1|^{\frac{\eta}{2}} > |z|^{\frac{1}{2}-\eta}.$$

当 $|z| > |z_m|$ 时,有

$$\log|f(z)| \geqslant \frac{1}{4} |z|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} \left\{\frac{|z_m|}{R_{m+1}}\right\}^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} |z|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} |z_m|^{-\frac{\eta}{4}+\frac{\eta^2}{4}}$$

$$\geqslant \frac{1}{4}|z|^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\eta} \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta} \cdot \frac{1}{4}|z_m|^{\frac{\eta}{4}}$$

$$\geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta}\frac{1}{4}|z_1|^{\frac{\eta}{4}} \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta}.$$

于是，当 $z \in \Omega_m$ 时，我们判定

$$\log|f(z)| \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta}.$$

置

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m,$$

则 $\Omega \subset \Omega_\rho$ 是一个无界域，同时 ∞ 是它的一个边界点，并且当 $z \in \Omega$ 时，有

$$\log|f(z)| > |z|^{\frac{1}{2}-\eta}.$$

以下，我们证明引理4.11的第二部分. 根据假设序列 $r_n (n=1, 2, \cdots)$ 满足条件：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} = \mu.$$

于是存在一个正整数 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$T(r_n, f) < r_n^{\mu+1}, \quad r_n \geqslant R_1. \tag{4.109}$$

现在，我们证明，对于值 n，$n \geqslant n_0$ 必定存在值 m_n，使得

$$r_n^{1-\eta} \leqslant R_{m_n} < R_{m_n+1} < r_n.$$

事实上，如果 R_m 满足不等式

$$R_m < r_n^{1-\eta} \leqslant R_{m+1},$$

则有

$$R_{m+2}=R_m^{(1+\frac{\eta}{2})^2}\leqslant r_n^{(1-\eta)(1+\frac{\eta}{2})^2}=r_n^{1-\frac{3}{4}\eta^2-\frac{1}{4}\eta^3}<r_n.$$

于是我们只须定义 $m_n=m+1$.

现在，应用引理3.8，置其中的 $r=\frac{1}{4}R_{m_n+1}$，$R'=\frac{1}{2}R_{m_n+1}$，$R=R_{m_n+1}$ 和 $H=\frac{1}{64e}R_{m_n+1}$，则当 $|z|\leqslant\frac{1}{4}R_{m_n+1}$ 和 $z\bar{\in}(\gamma)$ 时，有

$$\begin{aligned}\log|f(z)|&\leqslant\left\{3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right\}T(R_{m_n+1},f)\\&\leqslant\left\{3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right\}T(r_n,f).\end{aligned}$$

特别地，在区间 $\left[\frac{1}{8}R_{m_n+1},\frac{1}{4}R_{m_n+1}\right]$ 中取值 R，使得圆周 $|z|=R$ 与 (γ) 无交，然后置 $z=Re^{i\theta}$ 和利用(4.109)式，我们判定

$$\log|f(Re^{i\theta})|\leqslant\left\{3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right\}T(r_n,f).\tag{4.110}$$

记 Ω_{m_n} 位在圆 $|z|<R$ 内部分且含有点 z_{m_n} 的连通分支为 Ω'_{m_n}，圆周 $|z|=t(t<R)$ 位在 Ω'_{m_n} 内部分为 θ_{Rt}，θ_{Rt} 的线性测度为 $t\theta_R(t)$. 现在，我们证明在区间 $\left[2R_{m_n},\frac{1}{2}R\right]$ 中至少存在一个值 t_n，使得

$$\theta_R(t_n)\geqslant\frac{(1-\eta)\eta\pi}{2(\mu+1)}.\tag{4.111}$$

事实上，如果不然，则当 $t\in\left[2R_{m_n},\frac{1}{2}R\right]$ 时，恒有

$$\theta_R(t) < \frac{(1-\eta)\eta\pi}{2(\mu+1)}. \tag{4.112}$$

以下，我们将导出矛盾．首先根据定理 3.1 和 (4.110)式，我们有

$$\log|f(z_{m_n})| \leqslant A_{m_n} + 9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2|z_{m_n}|}^{\frac{1}{8}R}\frac{dt}{r\theta_R(r)}}\left\{3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right\} r_n^{\mu+1}.$$

再注意到

$$\log|f(z_{m_n})| \geqslant |z_{m_n}|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}},\quad A_{m_n} \leqslant \frac{1}{2}|z_{m_n}|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}$$

和(4.108)式，我们导出

$$|z_{m_n}|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} \leqslant \frac{1}{2}|z_{m_n}|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} + 9\sqrt{2}\left\{4\cdot\frac{|z_{m_n}|}{R}\right\}^{\frac{2(\mu+1)}{\eta(1-\eta)}}$$

$$\times\left\{3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right\} r_n^{\mu+1}.$$

进一步根据 $R > \frac{1}{8}R_{m_n+1}$ 和 $|z_1| < |z_{m_n}|$ 我们判定

$$|z_{m_n}|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}} \leqslant 18\sqrt{2}\cdot 32^{\frac{2(\mu+1)}{(1-\eta)\eta}} R_{m_n}^{-\frac{\mu+1}{1-\eta}}\left\{3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right\} r_n^{\mu+1}$$

$$\leqslant 18\sqrt{2}\cdot\left\{3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right\} 32^{\frac{2(\mu+1)}{\eta(1-\eta)}},$$

$$|z_1| \leqslant \left\{18\sqrt{2}\left(3+\frac{\log(64e)}{\log 2}\right)\right\}^{\frac{2}{1-\eta}} 32^{\frac{4(\mu+1)}{\eta(1-\eta)^2}}.$$

但是，这与(4.106)式相矛盾．

根据不等式

$$r_n^{1-\eta} \leqslant 2R_m < \frac{1}{2}R \leqslant r_n, \quad \theta(t_n) \geqslant \theta_R(t_n)$$

和(4.111)式，我们判定引理4.11的第二部分成立．于是引理4.11完全得证．

类似地，我们可以证明下述结果：

引理4.12 设 $w=f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数，其级 $\lambda<+\infty$，并且满足条件：

(1) 反函数 $z=\varphi(w)$ 具有一个直接超越奇点 a.

(2) 当 $a\neq\infty$ 时，有

$$\min_{0<\theta<2\pi} \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} = O(1);$$

当 $a=\infty$ 时，有

$$\min_{0<\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})| = O(1).$$

则对于任意取定的数 η，$0<\eta<\dfrac{1}{2}$，在 z 平面上存在一个边界含有 ∞ 点的区域 Ω，使得 Ω 具有下述性质：

(1) 当 $z\in\Omega$ 时，有

$$\log\frac{1}{|f(z)-a|} \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}, \quad f(z)\neq a\,(a\neq\infty);$$

$$\log|f(z)| \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}}, \quad f(z)\neq\infty\,(a=\infty).$$

(2) 存在一个值 r_0，使得 $r\geqslant r_0$ 时，在区间 $[r^{1-\eta}, r]$ 中存在一

个值t，使得

$$\theta(t) \geqslant K(\eta,\ \lambda) = \frac{(1-\eta)\eta\pi}{2(\lambda+1)}.$$

此处$\theta(t)$有下述意义：若用θ_t表示圆周$|z| = t$位在Ω内部分的弧段，则$t\theta(t)$表示θ_t的线性测度．

最后，我们指出定理4.20，引理4.11和引理4.12中的假设条件(2)，可代以下述条件之一：

(1) $f(z)$具有一个亏值b，并且$b \neq a$.

(2) $f(z)$具有一个渐近值b，并且$b \neq a$.

(3) $\varphi(w)$具有另外一个判别于a的直接超越奇点b.

事实上，在上述三个条件中，如果有一个条件成立，则必有

$$\begin{cases} \min\limits_{0<\theta<2\pi} \dfrac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} = O(1) \quad (a \neq \infty); \\[2ex] \min\limits_{0<\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})| = O(1) \quad (a = \infty). \end{cases}$$

4.5.3. 亚纯函数的零点和极点分布与它的反函数的直接超越奇点

Ahlfors定理说明亚纯函数的级可以界囿它的反函数的直接超越奇点的个数．现在，我们证明另外类型的结果．

定理4.21 设$w = f(z)$是开平面$|z| < +\infty$上的一个亚纯函数，$z = \varphi(w)$是$f(z)$的反函数．再设$f(z)$的级$\lambda < +\infty$和存在$q(1 \leqslant q < +\infty)$条半直线$\Delta(\theta_k)(0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < 2\pi; \theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi)$，使得对任意数$\varepsilon > 0$，有

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ n\left\{\bigcup\limits_{k=1}^{q} \Omega(\theta_k+\varepsilon,\ \theta_{k+1}-\varepsilon; r),\ f = z\right\}}{\log r} \leqslant v < \frac{1}{2},$$

$$z = 0,\ \infty.$$

则 $\varphi(w)$ 的判别有穷非零直接超越奇点的个数 $l \leqslant q$.

证. 事实上，根据 $q \geqslant 1$, 我们只须考虑 $l \geqslant 2$ 时的情况. 于是根据 Ahlfors 定理，我们判定 $\lambda \geqslant 1$. 置

$$\omega = \min_{1 < k < q} \{\theta_{k+1} - \theta_k\},$$

和任意取定数 η,

$$0 < \eta < \frac{(1 - 2\nu)\omega}{60\pi}.$$

我们构造序列 $r_n = 2^{(1+\eta)^n}(n = 1, 2, \cdots)$. 设 $a_i(i = 1, 2, \cdots l; 2 \leqslant l < +\infty)$ 是 $\varphi(w)$ 的任意 l 个判别有穷非零直接超越奇点，则存在一个数 $\rho > 0$, 使得在 z 平面上相应于 $a_i(1 \leqslant i \leqslant l)$ 的区域 Ω_ρ^i 满足下述条件:

(1) 当 $z \in \Omega_\rho^i$ 时，有 $\dfrac{1}{|f(z) - a_i|} > \dfrac{1}{\rho}$ 和 $f(z) \neq a_i$.

(2) Ω_ρ^i 的有限边界部分 Γ_ρ^i 是解析曲线，并且当 $z \in \Gamma_\rho^i$ 时有 $\dfrac{1}{|f(z) - a_i|} = \dfrac{1}{\rho}$.

(3) 当 t 充分大时，圆周 $|z| = t$ 与每个 Γ_ρ^i 均有交.

(4) l 个区域 Ω_ρ^i 彼此无交.

进一步根据 $l \geqslant 2$ 和引理 4.12, 我们可以判定在 z 平面上存在一个相应于 $a_i(1 \leqslant i \leqslant l)$ 且边界含有 ∞ 点的区域 $\Omega_i \subset \Omega_\rho^i$, 使得 Ω_i 具有下述性质:

(1) 当 $z \in \Omega_i$ 时，有

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_i|} \geqslant |z|^{\frac{1}{2} - \eta}.$$

(2) 当 n 充分大时，在区间 $[r_n^{1-\eta}, r_n]$ 中存在值 t_{in}，使得

$$\theta_i(t_{in}) \geqslant k = \frac{(1-\eta)\eta\pi}{2(\lambda+1)},$$

此处 $\theta_i(t)$ 有下述意义：若用 θ_{it} 表示圆周 $|z| = t$ 位在 Ω_i 内部分的弧段，则 $t\theta_i(t)$ 表示 θ_{it} 的线性测度．于是当 $\theta \in \theta_i(t_{in})$ 时，有

$$\log \frac{1}{|f(t_{in}e^{i\theta}) - a_i|} \geqslant t_{in}^{\frac{1}{2}-\eta}.$$

再任意取定一个数 ε,

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\omega}{8}, \frac{k}{8q}\right\}.$$

根据假设我们有

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q} \Omega(\theta_k + \varepsilon, \theta_{k+1} - \varepsilon; r), f = X\right\}}{\log r} \leqslant \gamma < \frac{1}{2},$$

$$X = 0, \infty.$$

另一方面，当 n 充分大时，在 q 个区域 $\Omega(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, r_n)$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$ 中至少存在一个区域 $\Omega(\theta_{k_i} + 2\varepsilon, \theta_{k_i+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, r_n)$，使得

$$\text{mes}\, E_{in} \geqslant \frac{K}{2q} t_{in},$$

其中

$$E_{in} = E\{z \mid \arg z \in \theta_i(t_{in}) \cap [\theta_{k_i} + 2\varepsilon, \theta_{k_i+1} - 2\varepsilon], |z| = t_{in}\}.$$

根据 η 的选取和 $r_n^{1-\eta} \leqslant t_{in} \leqslant r_n$，我们判定

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(\frac{r_n}{r_n^{1-\eta}}\right)^{6+2(\nu+\eta)+\frac{3\pi}{\varpi}}\cdot r_n^{\nu+2\eta}\log r_n\right\}\cdot t_{in}^{-\frac{1}{2}+\eta}=0.$$

于是，当 n 充分大时，应用引理3.13，我们有

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_i|}\geqslant\frac{A}{B\eta\log r_n+C}\left\{\frac{r_n^{1+\eta}}{r_n}\right\}^{6+\frac{3\pi}{\varpi}}$$

$$\times t_{in}^{\frac{1}{2}-\eta}\to+\infty\quad(n\to+\infty),$$

其中点 z 位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},r_n)$ 内且在一些圆 $(\gamma)_i$ 外，$(\gamma)_i$ 所含圆的个数为有穷，其半径之和不超过 $\frac{1}{8}\varepsilon r_n^{1-\eta}$. 另外 A, B, C 是与 n 无关的常数.

当 n 充分大时，每个 a_i 对应于一个区域 $\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},r_n)$. 所以 l 个 a_i 分别对应于 l 个区域 $\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},r_n)$. 以下，我们证明这 l 个区域彼此不相重合. 事实上，如果不然. 设 $k_i=k_{i'}=k(i\neq i')$，则根据 $(\gamma)_i$ 和 $(\gamma)_{i'}$ 的半径总和不超过 $\frac{1}{4}\varepsilon r_n^{1-\eta}$，我们判定在 $\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},r_n)$ 上存在点 z_n，使得有

$$\log\frac{1}{|f(z_n)-a_i|}\geqslant\frac{A}{B\eta\log r_n+C}$$

$$\times r_n^{-(6+\frac{3\pi}{\varpi})\eta+(1-\eta)(\frac{1}{2}-\eta)}\to+\infty\quad(n\to\infty),$$

同时有

$$\log\frac{1}{|f(z_n)-a_{i'}|}\geqslant\frac{A}{B\eta\log r_n+C}$$

$$\times r_n^{-(6+\frac{3\pi}{\omega})\eta+(1-\eta)(\frac{1}{2}-\eta)} \to +\infty \quad (n \to +\infty),$$

从而必有 $a_i = a_{i'} = a$. 进一步根据 ε 的选取，以及 $(\gamma)_i \bigcup (\gamma)_{i'}$ 的半径总和不超过 $\frac{1}{4}\varepsilon r_n^{1-\eta}$, 我们可以在 E_{in} 上取一点 z_n' 和同时在 E_{in} 上取一点 z_n'', 使得 z_n' 和 z_n'' 均位在 $(\gamma)_i \bigcup (\gamma)_{i'}$ 外. 然后，我们用直线连接 z_n' 和 z_n'' 点，若遇 $(\gamma)_i \bigcup (\gamma)_{i'}$, 则用圆周弧取代，于是求得一条连接点 z_n' 和 z_n'' 的曲线 L_n. 明显地，L_n 位在 $\overline{\Omega}(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, r_n)$ 内和圆 $(\gamma)_i \bigcup (\gamma)_{i'}$ 外. 于是当 $z \in L_n$ 时，有

$$\log\frac{1}{|f(z)-a|} \geqslant \frac{A}{B\eta\log r_n + C}$$

$$\times r_n^{-(6+\frac{3\pi}{\omega})\eta+(1-\eta)(\frac{1}{2}-\eta)} \to +\infty \quad (n \to +\infty),$$

即有

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ z\in L_n}} f(z) = a.$$

另一方面，L_n 必定同时交于 Γ_ρ' 和 Γ_ρ'', 以及当 $z \in \Gamma_\rho' \bigcup \Gamma_\rho''$ 时，有

$$|f(z) - a| = \rho.$$

所以，当 n 充分大时，我们导出矛盾，从而定理 4.21 完全得证.

定理 4.22 设 $w = f(z)$ 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个亚纯函数，$z = \varphi(w)$ 是 $f(z)$ 的反函数. 再设 $f(z)$ 的级 $\lambda < +\infty$ 和记 $f(z)$ 的 Julia 方向个数为 q, 则 $\varphi(w)$ 的判别直接超越奇点的个数 $l \leqslant q$.

证. 当 $q = +\infty$ 时，定理 4.22 成立是显然的. 当 $l \geqslant 1$ 时，根据定理 2.15, 我们有 $q \geqslant 1$. 于是我们只需考虑 $l \geqslant 2$ 和 $q < +\infty$ 时的情况. 设 $\Delta(\theta_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$ 是 $f(z)$ 的 q 条 Julia 方向，则根据定理 2.13 和有限复盖定理，我们可以判定存在两个判别有穷复数 b

和c, 使得b和c均不是$\varphi(w)$的直接超越奇点, 同时对任意取定的$\varepsilon > 0$, 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q} \overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon, \theta_{k+1}-\varepsilon; r), f = X\right\}}{\log r} = 0, \quad X = b, c.$$

作变换

$$F(z) = \frac{f(z)-b}{f(z)-c},$$

则$F(z)$的反函数具有l个判别有穷非零直接超越奇点, 并且有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q} \Omega(\theta_k+\varepsilon, \theta_{k+1}-\varepsilon; r), F = X\right\}}{\log r} = 0, \quad X = 0, \infty.$$

于是根据定理4.21, 我们判定$l \leqslant q$, 即定理4.22得证.

第五章 整函数的亏值和渐近值间的关系

1929 年，R. Nevanlinna 通过对一些例子的考查，曾经意识到例外值的问题和渐近值的理论有着内在的联系，并且猜测亏值同时是一个渐近值[32a]. 但是，O. Teichmüller 早在 1939 年就否定了这个猜测[37a]. 事实上，至今已有许多结果都说明 R. Nevanlinna 的这个猜测是不正确的[3a][18a].

否定了 R. Nevanlinna 的这个具体猜测并不等于说明 R. Nevanlinna 关于例外值和渐近值间存在着内在联系的想法也是不正确的. 事实上，本章将对一些重要函数类建立亏值个数和渐近值个数间的一般关系式. 这些关系式说明亏值和渐近值间确实存在着密切的联系，也即说明 R. Nevanlinna 关于两者间存在着内在联系的想法还是正确的.

§5.1. 关于单位圆内亚纯函数的界囿定理及其应用

5.1.1. 界囿定理

定理 5.1 设 $f(z)$ 是单位圆 $|z| \leqslant 1$ 上的亚纯函数，a, b, c 是三个复数，其相互球距均大于 d, $0 < d < \dfrac{1}{2}$，并且有

$$n(1, f=a) \leqslant n,\ n(1, f=b) \leqslant n,\ n(1, f=c) \leqslant n.$$

另外，设 α 是一个有穷复数，$N \geqslant 0$ 是一个实数，$f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant \tau$ (0

$< \tau < 1)$ 内满足不等式

$$|f(z) - \alpha| \leqslant e^{-N}$$

的点集 E_α 不能被包含在半径之和不超过 $2eh\ (h \leqslant 0.01)$ 的一些圆内，则对位在圆 $|z| \leqslant r\ (0 < r < 1)$ 内并在 (r) 外的点 z 有

$$\log^+ \frac{1}{|f(z) - \alpha|} \geqslant A\left\{\log \frac{1}{(1-\tau)(1-r)h}\right\}^{-1}$$

$$\times (1-\tau)(1-r)N - \frac{1}{(1-\tau)^2(1-r)^2}$$

$$\times \left\{Bn\log\frac{1}{h} + C\log\frac{2}{(1-\tau)(1-r)}\right.$$

$$\left. + D\log\frac{1}{d} + E\log^+|\alpha|\right\}.$$

其中 (γ) 表示一些圆，其欧氏半径之和不超过 $2eh$，个数不超过 $3n$. 另外，$A\ (A>0)$, B, C, D, E 是数字常数.

证. 设 (γ) 是相应于这

$$n(1, f=a) + n(1, f=b) + n(1, f=c)$$

个点及数 $h\ (h \leqslant 0.01)$ 的伪非欧除外圆. 我们在圆 $|z| \leqslant r$ 内且在圆 (γ) 外任意取一点 z_0. 作变换

$$\zeta = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

其逆变换为

$$z = \frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 \zeta};$$

则函数 $F(\zeta)=f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right)$ 在圆 $|\zeta|\leqslant 1$ 上亚纯，并且有

$$n(1,F=a)\leqslant n,\ n(1,F=b)\leqslant n,\ n(1,F=c)\leqslant n.$$

圆 (γ) 变为 ζ 平面上相应除外圆 $(\gamma)_\zeta$. 注意点 $\zeta=0\bar{\in}(\gamma)_\zeta$ 且有 $F(0)=f(z_0)$. 另外，根据不等式

$$|\zeta|\leqslant\frac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|},$$

我们判定圆 $|z|\leqslant\tau$ 在 ζ 平面上的像域必定含于圆 $|\zeta|\leqslant t$ 内，而

$$t=\frac{\tau+r}{1+\tau r}.$$

设 $(\gamma)'_\zeta$ 是相应于这 $n\left(\dfrac{1+t}{2},F=\alpha\right)$ 个点及数 h 的伪非欧除外圆，$(\gamma)'_\zeta$ 在 z 平面上的相应除外圆为 $(\gamma)'$. 注意到圆的欧氏半径不超过它的伪非欧半径，所以根据假设，在圆 $|z|\leqslant\tau$ 内并在圆 $(\gamma)'$ 外存在一点 $z_1\in E_\alpha$, 使得有

$$|f(z_1)-\alpha|\leqslant e^{-N}.$$

设点 z_1 在 ζ 平面上的像为 ζ_1, 则 ζ_1 位在圆 $|\zeta|\leqslant t$ 内且在圆 $(\gamma)'_\zeta$ 外. 另外，还有 $F(\zeta_1)=f(z_1)$.

设 $\alpha_i\left(i=1,2,\cdots,n\left(\dfrac{1+t}{2},F=\alpha\right)\right)$ 是 $F(\zeta)$ 在圆 $|\zeta|\leqslant\dfrac{1+t}{2}$ 内的 α 值点，则根据 Poisson-Jensen 公式，我们导出

$$\log\frac{1}{|F(\zeta_1)-\alpha|}\leqslant\frac{\dfrac{1+t}{2}+t}{\dfrac{1+t}{2}-t}m\left(\frac{1+t}{2},\frac{1}{F-\alpha}\right)$$

$$+\sum_i \log\left|\frac{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2-\bar{\alpha}_i\zeta_1}{\frac{1+t}{2}(\zeta_1-\alpha_i)}\right|$$

$$\leqslant \frac{4}{1-t}m\left(\frac{1+t}{2},\frac{1}{F-\alpha}\right)$$

$$+\sum_i \log\left|\frac{1-\bar{\alpha}_i\zeta_1}{\zeta_1-\alpha_i}\right|$$

$$+\sum_i \log\left|\frac{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2-\bar{\alpha}_i\zeta_1}{\frac{1+t}{2}(1-\bar{\alpha}_i\zeta_1)}\right|.$$

进一步注意到点$\zeta_1 \bar{\in} (\gamma)'_\zeta$, $|F(\zeta_1)-\alpha| = |f(z_1)-\alpha| \leqslant e^{-N}$, 以及

$$\left|\frac{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2-\bar{\alpha}_i\zeta_1}{\left(\frac{1+t}{2}\right)(1-\bar{\alpha}_i\zeta_1)}\right| \leqslant \frac{4}{1-t},$$

则有

$$N \leqslant \frac{4}{1-t}m\left(\frac{1+t}{2},\frac{1}{F-\alpha}\right)+n\left(\frac{1+t}{2},F=\alpha\right)\log\frac{2}{h}$$

$$+n\left(\frac{1+t}{2},F=\alpha\right)\log\frac{4}{1-t}.$$

不妨假定$F(0)\neq\alpha$. 否则，定理5.1显然成立. 于是

$$n\left(\frac{1+t}{2},F=\alpha\right)\leqslant\left\{\log\frac{\frac{3+t}{4}}{\frac{1+t}{2}}\right\}^{-1}\int_{\frac{1+t}{2}}^{\frac{3+t}{4}}\frac{n(R,F=\alpha)}{R}dR$$

$$\leqslant\frac{4}{1-t}N\left(\frac{3+t}{4},\frac{1}{F-\alpha}\right).$$

因此，我们得到

$$N\leqslant\frac{4}{1-t}\left(1+\log\frac{8}{(1-t)h}\right)T\left(\frac{3+t}{4},\frac{1}{F-\alpha}\right)$$

$$=\frac{4}{1-t}\left(1+\log\frac{8}{(1-t)h}\right)$$

$$\times\left\{T\left(\frac{3+t}{4},F-\alpha\right)+\log\frac{1}{|F(0)-\alpha|}\right\}$$

$$\leqslant\frac{4}{1-t}\left(1+\log\frac{8}{(1-t)h}\right)\left\{T\left(\frac{3+t}{4},F\right)\right.$$

$$\left.+\log\frac{1}{|F(0)-\alpha|}+\log^{+}|\alpha|+\log 2\right\}.\tag{5.1}$$

现在，我们估计$T\left(\frac{3+t}{4},F\right)$. 首先，因为$a,b,c$间的相互球距均大于$d$，所以我们不妨假设$|a|\leqslant\frac{3}{d}$, $|b|\leqslant\frac{3}{d}$. 作变换

$$G(\zeta)=\frac{F(\zeta)-a}{F(\zeta)-b}\cdot\frac{c-b}{c-a},$$

则函数 $G(\zeta)$ 在圆 $|\zeta| \leqslant 1$ 上亚纯，并且有

$$n(1, G=0) \leqslant n, n(1, G=1) \leqslant n, n(1, G=\infty) \leqslant n.$$

注意点 $\zeta = 0 \bar{\in} (\gamma)'_\zeta$. 另外，不妨假设 $|G(0)| \leqslant 1$, 否则我们只需对调 a, b 的位置. 于是应用定理 2.8，我们得到

$$T\left(\frac{3+t}{4}, G\right) \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{3+t}{4}\right)^2}$$

$$\times \left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-\frac{3+t}{4}}\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\left(1-t\right)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-t}\right\},$$

其中 A, B 是数字常数.

另一方面，根据等式

$$\frac{1}{F(\zeta)-b} = \frac{1}{b-a}\left\{G(\zeta)\left(1+\frac{b}{c-b}-\frac{a}{c-b}\right)-1\right\},$$

我们导出

$$T\left(\frac{3+t}{4}, \frac{1}{F-b}\right) \leqslant T\left(\frac{3+t}{4}, G\right) + A\log\frac{1}{d},$$

$$T\left(\frac{3+t}{4}, F-b\right) \leqslant \frac{1}{\left(1-t\right)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-t}\right\}$$

$$+ C\log\frac{1}{d} + \log|F(0)-b|,$$

$$T\left(\frac{3+t}{4}, F\right) \leqslant \frac{1}{\left(1-t\right)^2}\left\{A n \log\frac{1}{h} + B \log\frac{2}{1-t}\right\}$$

$$+ C \log\frac{1}{d} + \log^+ |F(0)|.$$

再结合(5.1)式得到

$$N \leqslant \frac{4}{1-t}\left(1+\log\frac{8}{(1-t)h}\right)\left\{\frac{1}{(1-t)^2}\right.$$

$$\times\left(An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-t}\right)+C\log\frac{1}{d}+D\log^+|\alpha|$$

$$\left.+\log^+|F(0)|+\log\frac{1}{|F(0)-\alpha|}\right\},$$

$$N \leqslant \frac{A}{1-t}\log\frac{2}{(1-t)h}\left\{\frac{1}{(1-t)^2}\left(Bn\log\frac{1}{h}+C\log\frac{2}{1-t}\right)\right.$$

$$\left.+D\log\frac{1}{d}+E\log^+|\alpha|+\log^+\frac{1}{|F(0)-\alpha|}\right\}.$$

如果注意到

$$1-t=1-\frac{\tau+r}{1+\tau r}\geqslant\frac{1}{2}(1-\tau)(1-r),$$

$F(0)=f(z_0)$和z_0是圆$|z|\leqslant r$内且在圆(γ)外的任意一点，以及(γ)至多包含$3n$个圆，其欧氏半径之和不超过$2eh$，则定理5.1得证.

考查定理5.1的证明，我们容易看出，如果$f(z)$在单位圆$|z|\leqslant 1$上有上界$M<+\infty$，则在(5.1)式中，我们可以对$T\left(\frac{3+t}{4}, F\right)$直接

有估计

$$T\left(\frac{3+t}{4}, F\right) \leqslant \log^+ M .$$

另外,注意点 z_0 可以是 $|z| \leqslant r$ 上的任意一点.于是,我们有下述结果:

定理5.2 设 $f(z)$ 是单位圆 $|z| \leqslant 1$ 上的全纯函数,并且有上界 $M < +\infty$. 另外,设 α 是一个有穷复数,$N \geqslant 0$ 是一实数,$f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant \tau(0<\tau<1)$ 内满足不等式

$$|f(z)-\alpha| \leqslant e^{-N}$$

的点集合 E_α 不能被包含在半径之和不超过 $2eh(h \leqslant 0.01)$ 的一些圆内,则对位在圆 $|z| \leqslant r(0<r<1)$ 内的点 z 有

$$|f(z)-\alpha| \leqslant \exp\left\{(\log^+ M + \log^+ |\alpha| + \log 2) - A\left(\log \frac{1}{(1-\tau)(1-r)h}\right)^{-1}(1-\tau)(1-r)N\right\},$$

其中 $A>0$ 是数字常数.

定理5.3 设 $f(z)$ 是单位圆 $|z| \leqslant 1$ 上的全纯函数,a, b 是两个有穷复数,并且 a, b, ∞ 间的相互球距大于 $d, 0<d<\frac{1}{2}$,并且有

$$n(1, f=a) \leqslant n , n(1, f=b) \leqslant n ,$$

另外,设 α 是一个有穷复数,$N \geqslant 0$ 是一个实数,$f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant \tau(0<\tau<1)$ 内满足不等式

$$|f(z)-\alpha| \leqslant e^{-N}$$

的点集合 E_α 不能被包含在半径之和不超过 $2eh(h \leqslant 0.01)$ 的一些圆

内，则对位在圆$|z|\leqslant r(\tau\leqslant r<1)$内的点$z$有

$$|f(z)-\alpha|\leqslant\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^6}\left(An\log\frac{1}{h}\right.\right.$$

$$\left.+B\log\frac{2}{1-r}+C\log\frac{1}{d}+D\log^+|\alpha|\right)$$

$$\left.-E\left(\log\frac{1}{(1-\tau)(1-r)h}\right)^{-1}(1-\tau)(1-r)N\right\},$$

其中$A, B, C, D, E\,(E>0)$是数字常数.

证． 设(γ)是相应于这

$$n(1, f=a)+n(1, f=b)$$

个点及数$h\,(h\leqslant 0.01)$的伪非欧除外圆．根据假设，在集合E_α上存在一点$z_0\bar{\in}(\gamma)$. 作变换

$$\zeta=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

其逆变换为

$$z=\frac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta},$$

则函数$F(\zeta)=f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right)$在圆$|\zeta|\leqslant 1$上全纯，并且有

$$n(1, F=a)\leqslant n;\ n(1, F=b)\leqslant n.$$

圆(γ)变为ζ平面上的相应伪非欧除外圆$(\gamma)_\zeta$. 注意到点$\zeta=0\bar{\in}(\gamma)_\zeta$, $F(0)=f(z_0)$和$z_0\in E_\alpha$, 则有

$$F(0)=|f(z_0)|\leqslant|f(z_0)-\alpha|+|\alpha|\leqslant|\alpha|+1. \tag{5.2}$$

另一方面，根据不等式

$$|\zeta| \leqslant \frac{|z| + |z_0|}{1 + |z_0||z|},$$

我们判定圆 $|z| \leqslant \frac{1}{2}(1+r)$ 在 ζ 平面上的像域必定含于圆 $|\zeta| \leqslant t$ 内，而

$$t = \frac{1+r}{1+\left(\frac{1+r}{2}\right)^2}.$$

作变换

$$G(\zeta) = \frac{F(\zeta)-a}{F(\zeta)-b}.$$

不妨假设 $|G(0)| \leqslant 1$. 否则，只要对调 a, b 的位置. 根据定理 2.8，我们得到

$$T\left(\frac{1+t}{2}, G\right) \leqslant \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1+t}{2}\right)\right)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-\frac{1+t}{2}}\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{(1-t)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-t}\right\}.$$

另一方面，根据等式

$$\frac{1}{F(\zeta)-b} = \frac{1}{b-a}\{G(\zeta)-1\},$$

我们导出

$$T\left(\frac{1+t}{2}, \frac{1}{F-b}\right) \leqslant T\left(\frac{1+t}{2}, G\right) + A\log\frac{1}{d},$$

$$T\left(\frac{1+t}{2}, F\right) \leqslant \frac{1}{(1-t)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-t}\right\}$$

$$+ C\log\frac{1}{d} + \log^+|F(0)|.$$

再结合(5. 2)式，我们得到

$$T\left(\frac{1+t}{2}, F\right) \leqslant \frac{1}{(1-t)^2}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-t}\right\}$$

$$+ C\log\frac{1}{d} + \log^+|\alpha|.$$

进一步注意到

$$\log M\left(\frac{1+r}{2}, f\right) \leqslant \log M(t, F)$$

$$\leqslant \frac{\dfrac{1+t}{2}+t}{\dfrac{1+t}{2}-t}\, T\left(\frac{1+t}{2}, F\right),$$

我们判定

$$\log M\left(\frac{1+r}{2}, f\right) \leqslant \frac{1}{(1-r)^6}\left\{An\log\frac{1}{h} + B\log\frac{2}{1-r}\right.$$

$$\left. + C\log\frac{1}{d} + \log^+|\alpha|\right\}.$$

作变换 $\xi=\dfrac{2z}{1+r}$，则圆 $|z|\leqslant\dfrac{1+r}{2}$ 变为 ξ 平面上的单位圆 $|\xi|\leqslant1$，同时函数 $\varphi(\xi)=f\left(\dfrac{1+r}{2}\xi\right)$ 在圆 $|\xi|\leqslant1$ 上全纯，并且有上界 M，而

$$M=\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^6}\left\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}\right.\right.$$

$$\left.\left.+C\log\frac{1}{d}+\log^+|\alpha|\right\}\right\}.$$

另外，圆 $|z|\leqslant\tau$ 变为 ξ 平面上的圆 $|\xi|\leqslant R$，$R=\dfrac{2\tau}{1+r}<1$，以及点集合 E_α 变为 ξ 平面上的点集合 E_ξ，同时 E_ξ 不能被包含在欧氏半径之和不超过 $2e\dfrac{2h}{1+r}$ 的一些圆内，因而更不能被包含在欧氏半径之和不超过 $2eh$ 的一些圆内．于是应用定理 5.2，对位在圆 $|\xi|\leqslant\dfrac{2r}{1+r}$ 内的点 ξ，我们有

$$|\varphi(\xi)-\alpha|\leqslant\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^6}\left\{An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}\right.\right.$$

$$\left.+C\log\frac{1}{d}+D\log^+|\alpha|\right\}.$$

$$-E\left(\log\frac{1}{\left(1-\dfrac{2\tau}{1+r}\right)\left(1-\dfrac{2r}{1+r}\right)h}\right)^{-1}$$

$$\left.\times\left(1-\frac{2\tau}{1+r}\right)\left(1-\frac{2r}{1+r}\right)N\right\}.$$

再注意到$\tau\leqslant r$，我们判定对位在圆$|z|\leqslant r(\tau\leqslant r<1)$内的点$z$有

$$|f(z)-\alpha|\leqslant\exp\left\{\frac{1}{(1-r)^6}\left(An\log\frac{1}{h}+B\log\frac{2}{1-r}+C\log\frac{1}{d}+D\log^+|\alpha|\right)-E\left(\log\frac{1}{(1-\tau)(1-r)h}\right)^{-1}(1-\tau)(1-r)N\right\}.$$

于是定理5.3得证.

5.1.2. 应用

作为定理5.1的应用，我们证明下述结果[43c]:

引理5.1 设$f(z)$是$\overline{\Omega}(-\theta,\theta)$ $(0<\theta\leqslant\pi)$上的亚纯函数，并且满足条件：

(1) 存在三个判别复数a,b,c，使得a,b,c间的相互球距均大于$d\left(0<d<\dfrac{1}{2}\right)$，同时有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+n\{\overline{\Omega}(-\theta_1,\theta;r),f=X\}}{\log r}\leqslant\nu<+\infty,$$
$$X=a,b,c.$$

(2) 在$\Gamma(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R)$ $(0<\varepsilon<\theta;0<R<+\infty)$上存在一个点集合$E_\alpha$，其线性测度 mes $E_\alpha\geqslant HR\left(H\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$，或者在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_1,R_2)(0<\varepsilon<\theta;R_1\leqslant R\leqslant R_2)$上存在一个连续统$L$，其直径$\geqslant HR_1$，并且当$z\in E_\alpha$或$z\in L$时，有

$$|f(z)-\alpha|\leqslant e^{-N},$$

其中α是一个有穷复数，$N\geqslant0$是一个实数，则对任意取定的数

$\eta > 0$, 只要 R_1 充分大，对位在 $\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_1, R_2)$ 上且 (γ) 外的点 z 有

$$\log^+ \frac{1}{|f(z)-\alpha|} \geqslant \frac{A(\varepsilon,\theta)}{B(\theta)\log\frac{R_2}{R_1} + C(\varepsilon,\theta)}$$

$$\times \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{2\pi}{\theta}} \cdot N - D(\varepsilon,\theta)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{4\pi}{\theta}}$$

$$\times \left\{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2(\nu+\eta)} R_2^{(\nu+\eta)} \log\frac{R_2}{R_1} + \log^+|\alpha|\right\}, \tag{5.3}$$

其中 (γ) 表示一些圆，其欧氏半径之和不超过 $\frac{\varepsilon}{4}R_1$，个数不超过 $3n$, $n = \left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}(\nu+\eta)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2(\nu+\eta)} R_2^{\nu+\eta}$. 另外 $A(\varepsilon,\theta) > 0$, $C(\varepsilon,\theta) < +\infty$ 和 $D(\varepsilon,\theta)$ 是依赖于 ε, θ 的常数，$B(\theta) < +\infty$ 是依赖于 θ 的常数.

证. 作变换

$$\zeta = \frac{z^{\frac{\pi}{2\theta}} - R^{\frac{\pi}{2\theta}}}{z^{\frac{\pi}{2\theta}} + R^{\frac{\pi}{2\theta}}},$$

则 $\Omega(-\theta,\theta)$ 变为 ζ 平面上的单位圆 $|\zeta|<1$. 根据引理 3.11,我们判定 $\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon; R_1, R_2)$ 在 ζ 平面上的像域必定含于圆 $|\zeta| \leqslant \rho$ 内，而

$$\rho = 1 - \frac{\varepsilon}{2\theta}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}, \tag{5.4}$$

圆 $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}(1+\rho)$ 在 z 平面上的像域必定含于 $\overline{\Omega}(-\theta, \theta; R_3)$

内，而

$$R_3=\left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 R_2,$$

以及当 $|\zeta|\leqslant\rho$ 时，有

$$|z'(\zeta)|\leqslant\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{4\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_2 .$$

作变换 $\zeta=\dfrac{2\xi}{1+\rho}$，则圆 $|\zeta|\leqslant\dfrac{1}{2}(1+\rho)$ 变为 ξ 平面上的单位圆 $|\xi|\leqslant 1$，圆 $|\zeta|\leqslant\rho$ 变为圆 $|\xi|\leqslant\tau$，而

$$\tau=\frac{2\rho}{1+\rho},\tag{5.5}$$

以及当 $|\xi|\leqslant\tau$ 时，有

$$|\zeta'(\xi)|\leqslant\frac{1+\rho}{2}<1,$$

$$|z'(\xi)|=|z'(\zeta)||\zeta'(\xi)|$$

$$\leqslant\frac{2\theta}{\pi}\left(\frac{4\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}}R_2 .$$

另一方面，或者有点集合 E_α 变为 ξ 平面上的点集合 E_ξ，则 E_ξ 位在圆 $|\xi|\leqslant\tau$ 内，分布在虚轴上，并且有

$$HR\leqslant \text{mes } E_\alpha=\int_{E_\alpha}|dz|=\int_{E_\xi}|z'(\xi)||d\xi|$$

$$\leqslant \frac{2\theta}{\pi} \cdot \left(\frac{4\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_2 \operatorname{mes} E_\xi ,$$

$$\operatorname{mes} E_\xi \geqslant \frac{H\pi}{2\theta} \left(\frac{\varepsilon}{4\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}} ,$$

或者有连续统 L 变为 ξ 平面上的连续统 L_ξ，则 L_ξ 位在圆 $|\xi| \leqslant \tau$ 内. 进而设直线段 l' 连接 L 上的两个点 z_1 和 z_2，并且 l' 的长度 $\operatorname{mes} l'$ 等于 L 的直径. 再设 ξ_1 和 ξ_2 是 z_1 和 z_2 在 ξ 平面上的像点. 明显地，连接点 ξ_1 和 ξ_2 的直线段 l_ξ 在 z 平面上的像 l 是一条连接点 z_1 和 z_2 的曲线. 于是我们有

$$HR_1 \leqslant \operatorname{mes} l' \leqslant \int_l |dz| = \int_{l_\xi} |z'(\xi)| \, |d\xi|$$

$$\leqslant \frac{2\theta}{\pi} \left(\frac{4\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_2 \operatorname{mes} l_\xi ,$$

$$\operatorname{mes} l_\xi \geqslant \frac{H\pi}{2\theta} \left(\frac{\varepsilon}{4\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}} .$$

如果注意到 L_ξ 的直径 $\geqslant \operatorname{mes} l_\xi$ 和取

$$h = \frac{1}{8e} \frac{\pi\varepsilon}{4\theta} \left(\frac{\varepsilon}{4\theta}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3+\frac{\pi}{\theta}} , \tag{5.6}$$

则判定 E_ξ 或 L_ξ 不能被包含在欧氏半径之和不超过 $2eh$ 的一些圆内.

置 $F(\xi) = f(z(\zeta(\xi)))$，则 $F(\xi)$ 在单位圆 $|\xi| \leqslant 1$ 上亚纯，并且根据条件(1)，对任意取定的数 $\eta > 0$，只要 R_1 充分大我们就有

$$n(1, F = X) \leqslant n, \quad X = a, b, c,$$

$$n = R_3^{\nu+\eta} = \left(\frac{8\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}(\nu+\eta)} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2(\nu+\eta)} R_2^{\nu+\eta}. \tag{5.7}$$

应用定理 5.1，我们判定对位在圆 $|\xi| \leqslant \tau$ 内且在圆 $(\gamma)_\xi$ 外的点 ξ 有

$$\log^+ \frac{1}{|F(\xi) - \alpha|} \geqslant A\left(\log \frac{1}{(1-\tau)^2 h}\right)^{-1} (1-\tau)^2 N$$

$$- \frac{1}{(1-\tau)^4} \left\{ Bn \log \frac{1}{h} + C \log \frac{1}{(1-\tau)^2} \right.$$

$$\left. + D \log \frac{1}{d} + E \log^+ |\alpha| \right\}, \tag{5.8}$$

其中 $(\gamma)_\xi$ 表示一些圆，其欧氏半径之和不超过 $2eh$，个数不超过 $3n$.

以下，我们证明圆 $(\gamma)_\xi$ 在 z 平面上的像集合必定能被包含在一些圆 (γ) 内，而 (γ) 的欧氏半径之和不超过 $\frac{1}{4}\varepsilon R_1$，$(\gamma)$ 含有圆的个数不超过 $3n$. 事实上，我们任意考虑 $(\gamma)_\xi$ 中的一个圆 $\Gamma_\xi: |\xi - \xi_0| < \sigma$. Γ_ξ 在 z 平面上的映像为 Γ, ξ_0 的映像为点 z_0，则在 Γ 上存在一点 z'，使得以点 z_0 为心，以连接点 z_0 和 z' 的直线段 l' 为半径作的圆 Γ' 包含 Γ 在自己的内部. 设 z' 在 ξ 平面上的像点为 ξ'. 明显地连接点 ξ_0 和 ξ' 的直线段 l_ξ 在 z 平面上的映像为一条连接点 z_0 和 z' 的曲线 l. 于是我们有

$$\operatorname{mes} l' \leqslant \int_l |dz| = \int_{l_\xi} |z'(\xi)| \, |d\xi|$$

$$\leqslant \frac{4\theta}{\pi} \left(\frac{4\theta}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{2\theta}{\pi}} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2+\frac{\pi}{\theta}} R_2 \sigma.$$

因此，若记全体 $\{\Gamma'\}$ 为 (γ)，则 (γ) 的欧氏半径之和不超

过$\frac{1}{4}\varepsilon R_1$，含有圆的个数不超过$3n$.

最后，根据(5.4)-(5.8)式，我们判定当点z位在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_1,R_2)$内且在圆$(\gamma)$外时有(5.3)式.于是引理5.1得证.

类似地，应用定理5.3，我们可以证明下述结果：

引理5.2 设$f(z)$是$\overline{\Omega}(-\theta,\theta)$ $(0<\theta\leqslant\pi)$上的全纯函数，并且满足条件：

(1) 存在两个判别有穷复数a,b，使得a,b,∞间的相互球距均大于$d\left(0<d<\frac{1}{2}\right)$，同时有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\overline{\Omega}(-\theta,\theta,r),f=X\right\}}{\log r}\leqslant v<+\infty,\quad X=a,b.$$

(2) 在$\Gamma(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon_j R)(0<\varepsilon<Q;R_1\leqslant R\leqslant R_2)$上存在一个点集合$E_\alpha$，其线性测度 mes $E_\alpha\geqslant HR$ $\left(H\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)$，或者在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_1,R_2)$上存在一个连续统$L$，其直径$\geqslant HR_1$，并且当$z\in E_\alpha$或者$z\in L$时，有

$$|f(z)-\alpha|\leqslant e^{-N},$$

其中α是一个有穷复数，$N\geqslant 0$是一个实数，则对任意取定的数$\eta>0$，只要R_1充分大，对位在$\overline{\Omega}(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon;R_1,R_2)$上的点$z$有

$$|f(z)-\alpha|\leqslant\exp\left\{A(\varepsilon,\theta)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{6\pi}{\theta}}\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2(v+\eta)}R_2^{v+\eta}\log\frac{R_2}{R_1}+\log^+|\alpha|\right]\right.$$

$$-\frac{B(\varepsilon,\theta)}{C(\theta)\log\frac{R_2}{R_1}+D(\varepsilon,\theta)}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{2\pi}{\theta}}N\Bigg\},$$

其中$A(\varepsilon,\theta)<+\infty$, $B(\varepsilon,\theta)>0$ 和$D(\varepsilon,\theta)<+\infty$ 是依赖于ε,θ的常数, $C(\theta)$ 是依赖于θ的常数.

§ 5.2. 下级为有穷的整函数类[43c]

定理5.4 设$f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数, 其下级$\mu<+\infty$. 记$f(z)$的Julia方向个数为q, 判别有穷渐近值个数为l, 有穷亏值个数为p, 其中l'个亏值同时是渐近值, 则有关系式

$$2p-l'+l\leqslant q.$$

证. (1) 首先我们考虑下述情况: $q<+\infty$, $p<+\infty$, $l<+\infty$, 以及p和l不能同时为零.

因为p和l不能同时为零, 所以根据定理4.4的系, 我们判定$\mu\geqslant\frac{1}{2}$. 另外, 根据定理2.15, 我们有$q\geqslant 1$. 以下, 我们记$f(z)$的p个有穷亏值为$a_i\,(i=1,2,\cdots,p)$, 其相应亏量为$\delta(a_i,f)=\delta_i>0$; 记$f(z)$的l个判别有穷渐近值为$b_j\,(j=1,2,\cdots,l)$, 其相应定值路径为L_j. 根据引理2.2 (置其中的$h_1=0$) 和引理3.9 (置其中的$k=3\mu$, $\sigma=\log 2$), 我们判定必定存在两个序列$r_n\,(n=1,2,\cdots)$和$t_n\,(n=1,2,\cdots)$, 使得[1)]

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}=\mu,\tag{5.9}$$

---

1) 当$p=0$时, 我们仅考虑满足(5.9)式的序列$\{r_n\}$.

$$r_n \leqslant t_n \leqslant 2r_n \,, \tag{5.10}$$

以及

$$\text{mes}\, E_i^n \geqslant K,\ K = K(\delta,\ \mu,\ p) > 0,\ i = 1,2,\cdots,p\,.$$

其中

$$E_i^n = E\left\{\theta \,\middle|\, \log \frac{1}{|f(t_n e^{i\theta}) - a_i|} \geqslant \frac{\delta}{4} T(t_n, f),\right.$$

$$\left. 0 \leqslant \theta < 2\pi \right\},\ \ \delta = \min\{\delta_i\}\,.$$

设$f(z)$的q条Julia方向为$\Delta(\theta_k)$ ($k = 1, 2, \cdots, q;\ 0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < 2\pi$). 置

$$\omega = \min_{1<k<q} \{\theta_{k+1} - \theta_k\}\,, \theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi\,,$$

$$M = \max\{1,\ |q_1|,\cdots,\ |a_p|,\ |b_1|,\cdots,\ |b_l|\}\,.$$

然后取定一个数η,

$$0 < \eta < \frac{\min\{\omega, \mu\omega\}}{360(\mu+1)\pi},$$

则根据(5.9)和(5.10)式,当n充分大时,我们有

$$T(t_n, f) \geqslant T(r_n, f) \geqslant r_n^{\mu-\eta} \tag{5.11}$$

$$T(r_n, f) \leqslant r_n^{\mu+\eta}\,. \tag{5.12}$$

最后,再取定一个数ε,

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\pi\eta}{6(\mu+1)}, \frac{K}{12q}, \frac{\omega}{8}\right\}$$

和置

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon),$$

则根据定理2.13和有限覆盖定理，我们判定必定存在两个判别有穷复数α,β使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n(r,\overline{\Omega},f=X)}{\log r}=0,\quad X=\alpha,\beta.$$

因为α和β为有穷数，所以存在一个数d, $0<d<\frac{1}{2}$，使得α, β, ∞间的相互球距均大于d.

(2) 我们还需要下述引理.

引理5.3 设两条简单连续曲线$L_{nm}(m=1,2)$分别连接圆周$|z|=r_n^{1-3\eta}$上的点$A_{nm}(m=1,2)$和圆周$|z|=\frac{1}{2}r_n$上的点$B_{nm}(m=1,2)$，同时这两条曲线无交，并且均位在$\overline{\Omega}\left(-3\varepsilon,3\varepsilon;r_n^{1-3\eta},\frac{1}{2}r_n\right)$内．于是$L_{n1}$和$L_{n2}$以及圆周$|z|=r_n^{1-3\eta}$介在两点$A_{n1}$和$A_{n2}$间的圆周弧和圆周$|z|=\frac{1}{2}r_n$介在两点$B_{n1}$和$B_{n2}$间的圆周弧界囿一个区域$\Omega_n\subset\overline{\Omega}\left(-3\varepsilon,3\varepsilon;r_n^{1-3\eta},\frac{1}{2}r_n\right)$. 进一步假设

$$\max_{z\in L_{nm}}\log|f(z)|\leqslant M_{nm}<+\infty,\ m=1,2,$$

$$\Omega_n'=\Omega_n\bigcap\Gamma_n',$$

其中Γ_n'表示圆环$r_n^{1-2\eta}\leqslant|z|\leqslant r_n^{1-\eta}$，则当$n$充分大时，对位在$\Omega_n'$

内的点 z 有

$$\log|f(z)| \leqslant M_{n1} + M_{n2} + 1 .$$

证． 首先，应用 Poisson-Jensen 公式，并且根据(5.12)式，我们得到

$$\log M\left(r_n^{1-3\eta}, f\right) \leqslant \log M\left(\frac{1}{2}r_n, f\right) \leqslant 3T(r_n, f) \leqslant 3r_n^{\mu+\eta} . \tag{5.13}$$

其次，应用引理2.10，并且根据(5.13)式，当 $z \in \Omega_n'$ 时，我们有

$$\log|f(z)| \leqslant M_{n1} + M_{n2} + \frac{4r_n^{-\frac{\pi\eta}{6\varepsilon}}}{\pi\left[1 - r_n^{-\frac{\pi\eta}{3\varepsilon}}\right]} 3r_n^{\mu+\eta}$$

$$+ \frac{4.2^{\frac{\pi}{6\varepsilon}} \cdot r_n^{-\frac{\pi\eta}{6\varepsilon}}}{\pi\left[1 - 2^{\frac{\pi}{3\varepsilon}} r_n^{-\frac{\pi\eta}{3\varepsilon}}\right]} 3r_n^{\mu+\eta} .$$

进一步根据 ε 的选取，我们有

$$-\frac{\pi\eta}{6\varepsilon} + \mu + \eta < -(\mu + 1) + (\mu + \eta) = -1 + \eta < 0 .$$

于是当 n 充分大时，我们判定

$$\log|f(z)| \leqslant M_{n1} + M_{n2} + 1 ,$$

即引理5.3得证．

(3)我们考虑圆环序列 $\Gamma_n: r_n^{1-3\eta} \leqslant |z| \leqslant 2r_n \ (n = 1, 2, \cdots)$．因为定值路径 $L_j \ (j = 1, 2, \cdots, l)$ 是始自原点伸展到 ∞ 的简单连续曲线，所以 L_j 与圆周 $|z| = r_n^{1-3\eta}$ 和圆周 $|z| = 2r_n$ 均有交．我们在圆周 $|z| = r_n^{1-3\eta}$ 上取最后一个交点，同时在圆周 $|z| = 2r_n$ 上取第一个

交点，并且记L_j介于这两个交点间的部分为L_{jn}. 明显地，每条曲线L_{jn} ($1 \leqslant j \leqslant l$) 至少交于$q$个闭域$\overline{\Omega}(\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+2} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ ($k = 1, 2, \cdots, q; \theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi, \theta_{q+2} = \theta_2 + 2\pi$) 中的一个$\overline{\Omega}(\theta_{k_j} + 3\varepsilon, \theta_{k_j+2} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ ($1 \leqslant k_j \leqslant q$)，进而唯一地确定一条Julia方向$\Delta(\theta_{k_j+1})$. 于是按照这种方式，每条曲线$L_{jn}$都对应一条Julia 方向$\Delta b(\theta_{k_j+1}) = \Delta(\theta_{k_j+1})$，$l$ 条曲线L_{jn} ($j = 1, 2, \cdots, l$) 对应l条Julia 方向$\Delta b(\theta_{k_j+1})$ ($j = 1, 2, \cdots, l$). 现在，我们证明集合$\{\Delta b(\theta_{k_j+1}) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$中任何两条Julia方向不相重合.

事实上，如果不然，设存在两条ulia 方向$\Delta b(\theta_{k_j+1})$和$\Delta b(\theta_{k_{j'}+1})$相重合. 于是$L_{jn}$和$L_{j'n}$ ($j \neq j'$) 同时交于$\overline{\Omega}(\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+2} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ ($k = k_j = k_{j'}$). 以下，我们证明这是不可能的，即导出矛盾. 为此，只需要考虑下述几种典型情况：

1) L_{jn}和$L_{j'n}$同时交于$\overline{\Omega}(\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+1} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$. 在这种情况下，$L_{jn} \cap \overline{\Omega}(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon, r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$必定含有一段连续曲线$L'_{jn}$，使得$L'_{jn}$的直径$\geqslant \frac{\varepsilon}{2} r_n^{1-3\eta}$，并且当$n$充分大时有

$$|f(z) - b_j| < 1 \qquad z \in L'_{jn}.$$

于是，应用引理5.2，置其中的$\theta = \frac{1}{2}(\theta_{k+1} - \theta_k) - \varepsilon$, $R_1 = r_n^{1-3\eta}$,

$R_2 = 2r_n$, $L = L'_{jn}$, $H = \frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha = b_j$, $N = 0$ 和$\nu = 0$，则当$z \in \overline{\Omega}(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$时，我们得到

$$|f(z) - b_j| \leqslant \exp\left\{A(\varepsilon, \theta)\, 2^{\frac{6\pi}{\frac{1}{2}(\theta_{k+1} - \theta_k) - \varepsilon}} r_n^{\frac{18\pi\eta}{\frac{1}{2}(\theta_{k+1} - \theta_k) - \varepsilon}} \right.$$

$$\left. \times \left[2^{2\eta} r_n^{6\eta^2} 2^{\eta} r_n^{\eta} \cdot \log(2r_n^{3\eta}) + \log^+ |b_j| \right] \right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{A(\varepsilon,\theta,\eta)\, r_n^{\frac{18\pi\eta}{\frac{1}{2}\omega-\varepsilon}}\left[r_n^{6\eta^2+\eta}\log r_n+\log M\right]\right\}.$$

如果进一步注意到$\varepsilon < \frac{\omega}{8} < \frac{\omega}{4}$, $\eta < 1$, 以及

$$|f(z)| \leqslant |f(z)-b_j| + |b_j| \leqslant |f(z)-b_j| + M,$$

则我们可以判定

$$\log|f(z)| \leqslant A(\varepsilon,\theta,\eta)\, r_n^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta}. \tag{5.14}$$

根据η的选取，我们有

$$\frac{1}{1-3\eta}\left\{\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta\right\} < \frac{1}{4}.$$

于是

$$\log|f(z)| \leqslant \{r_n^{1-3\eta}\}^{\frac{1}{4}} \leqslant |z|^{\frac{1}{4}}.$$

另外，在$\overline{\Omega}(\theta_k+3\varepsilon,\ \theta_{k+1}-3\varepsilon;\ r_n^{1-3\eta},\ 2r_n)$上必定存在一条连接$L_{jn}$和$L_{j'n}$的曲线$L_n$. 于是，特别地当$z \in L_n$时有

$$\log|f(z)| \leqslant |z|^{\frac{1}{4}}. \tag{5.15}$$

另一方面，根据定理4.3，我们判定在L_j和$L_{j'}$间存在一条伸展到∞的连续曲线L，使得

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|} \geqslant \frac{1}{2}.$$

因为L一定交于L_n上的一点z_n，所以当n充分大时，一方面有

$$\log|f(z_n)| \geqslant |z_n|^{\frac{1}{3}},$$

另一方面，根据(5.15)式又有

$$\log|f(z_n)| \leqslant |z_n|^{\frac{1}{4}}.$$

于是我们导出矛盾.

2) L_{jn} 交于 $\overline{\Omega}(\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+1} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ 内，同时 $L_{j'n}$ 交于 $\overline{\Omega}(\theta_{k+1} + 3\varepsilon, \theta_{k+2} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$. 类似于情况 1) 的讨论，我们特别地可以判定当 $z \in \Delta\left(\theta_{k+1} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, \frac{1}{2}r_n\right)$[1]时有

$$\log|f(z)| \leqslant \{r_n^{1-3\eta}\}^{\frac{1}{4}} = M_{n1},$$

以及当 $z \in \Delta\left(\theta_{k+1} + 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, \frac{1}{2}r_n\right)$时，有

$$\log|f(z)| \leqslant \{r_n^{1-3\eta}\}^{\frac{1}{4}} = M_{n2}.$$

进一步应用引理5.3, 我们判定当 $z \in \overline{\Omega}(\theta_{k+1} - 3\varepsilon, \theta_{k+1} + 3\varepsilon; r_n^{1-2\eta}, r_n^{1-\eta})$时，有

$$\log|f(z)| \leqslant 2\{r_n^{1-3\eta}\}^{\frac{1}{4}} + 1.$$

明显地，在 $\overline{\Omega}(\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+1} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ 上存在一条连接点 $r_n^{1-\eta}e^{i(\theta_{k+1} - 3\varepsilon)}$ 和 L_{jn} 的曲线段 L_n', 以及在 $\overline{\Omega}(\theta_{k+1} + 3\varepsilon, \theta_{k+2} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ 上存在一条连接点 $r_n^{1-\eta}e^{i(\theta_{k+1} + 3\varepsilon)}$ 和 $L_{j'n}$ 的曲线段 L_n''. 置

$$L_n = L_n' + \Gamma(\theta_{k+1} - 3\varepsilon, \theta_{k+1} + 3\varepsilon, r_n^{1-\eta})^{2)} + L_n'',$$

则 L_n 是一条连接 L_{jn} 和 $L_{j'n}$ 的曲线段，并且当 $z \in L_n$ 时，只要 n 充分

---

1) 这个记号的意义表示直线段: $\arg z = \theta_{k+1} - 3\varepsilon, r_n^{1-3\eta} < |z| < \frac{1}{2}r_n$.

2) 这个记号的意义表示圆弧, $|z| = r_n^{1-\eta}$, $\theta_k - 3\varepsilon < \arg z < \theta_{k+1} + 3\varepsilon$.

大，我们就有

$$\log|f(z)| \leqslant 3|z|^{\frac{1}{4}}.$$

以下作类似于情况 1)的讨论，即可导出矛盾.

3) L_{jn} 交于 $\overline{\Omega}(\theta_k+3\varepsilon,\ \theta_{k+1}-3\varepsilon;\ r_n^{1-3\eta},2r_n)$，同时 $L_{j'n}$ 整个地位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\ \theta_{k+1}+3\varepsilon;\ r_n^{1-3\eta},\ 2r_n)$ 内.

4) L_{jn} 和 $L_{j'n}$ 同时整个地位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\ \theta_{k+1}+3\varepsilon;\ r_n^{1-3\eta},\ 2r_n)$ 内.

在 3)和 4)的情况下，如果注意到当 n 充分大时，有

$$|f(z)-b_j|<1,\ z\in L_{jn},\ |f(z)-b_{j'}|<1,\ z\in L_{j'n},$$

或

$$|f(z)|\leqslant M+1,\ z\in L_{jn}\bigcup L_{j'n}.$$

则应用引理 5.3，类似于情况 1)和 2)的讨论，我们即可导出矛盾.

(4)当 n 充分大时，每个亏值 $a_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 对应一个集合 E_i^n，$\operatorname{mes}E_i^n\geqslant K$. 进一步根据 ε 的选取，我们判定在 q 个集合 $E_i^n\bigcap[\theta_k+3\varepsilon,\theta_{k+1}-3\varepsilon]\ (k=1,2,\cdots,q;\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$ 中至少存在一个集合 $E_i^n\bigcap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\ (1\leqslant k_i\leqslant q)$，使得其测度

$$\operatorname{mes}\{E_i^n\bigcap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q},$$

进而唯一地确定两条相邻的 Julia 方向 $\Delta(\theta_{k_i})$ 和 $\Delta(\theta_{k_i+1})$[1] 于是，按照这种方式，每个亏值 a_i 对应两条相邻的 Julia 方向 $\Delta_a(\theta_{k_i})=\Delta(\theta_{k_i})$ 和 $\Delta_a(\theta_{k_i+1})=\Delta(\theta_{k_i+1})$，$p$ 个亏值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$ 对于 p 对 Julia 方向 $\{\Delta_a(\theta_{k_i}),\ \Delta_a(\theta_{k_i+1})\mid i=1,2,\cdots,p\}$. 现在，我们证明集合 $\{\Delta_a(\theta_{k_i}),\ \Delta_a(\theta_{k_i+1})\mid i=1,2,\cdots,p\}$ 中任何两条 Julia 方向不相重合.

---

1)当 $p\geqslant1$ 时，必有 $q\geqslant2$. 这个事实是定理6.2的直接推论. 因此，相邻的两条 Julia 方向总是存在的.

事实上，如果不然，设存在两条Julia方向相重合．我们将导出矛盾．为此，只需要考虑下述两种典型情况：

1) $\operatorname{mes}\{E_i^n\bigcap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\ \theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}$，以及 $\operatorname{mes}\{E_i^n\bigcap[\theta_{k_i'}+3\varepsilon,\theta_{k_i'+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}$ $(k_i=k_i=k,\ 1\leqslant k\leqslant q)$.

我们应用引理5.2，置其中的 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k+1}-\theta_k)-\varepsilon$, $R=t_n$, $R_1=r_n^{1-3\eta}$, $R_2=2r_n$, $E\alpha=E\{t_ne^{i\varphi}\mid\varphi\in E_i^n\bigcap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\ \theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\}$, $H=\frac{K}{2q}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha=a_i$, $N=\frac{\delta}{4}T(t_n,f)$ 和 $\nu=0$，则当 n 充分大时，对位在 $\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon,\ \theta_{k+1}-2\varepsilon;r_n^{1-3\eta},\ 2r_n)$ 上的点 z 有

$$
\begin{aligned}
|f(z)-a_i|\leqslant\exp\Bigg\{&A(\varepsilon,\theta)2^{\frac{12\pi}{\theta_{k+1}-\theta_k-2\varepsilon}}r_n^{\frac{36\pi\eta}{\theta_{k+1}-\theta_k-2\varepsilon}}\\
&\times\left[2^{2\eta}r_n^{6\eta^2}2^{\eta}r_n^{\eta}\log(2r_n^{3\eta})+\log^+|a_i|\right]\\
&-\frac{B(\varepsilon,\theta)}{C(\theta)\log(2r_n^{3\eta})+D(\varepsilon,\theta)}r_n^{-\frac{12\pi\eta}{\theta_{k+1}-\theta_k-2\varepsilon}}\\
&\times 2^{\frac{-4\pi}{\theta_{k+1}-\theta_k-2\varepsilon}}\frac{\delta}{4}T(t_n,f)\Bigg\}\\
\leqslant\exp\Bigg\{&A(\varepsilon,\theta,\eta)r_n^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta}\\
&-B(\varepsilon,\theta,\eta,\delta)r_n^{-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta}T(t_n,f)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

进一步根据η的选取有

$$\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta-\left\{-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta+(\mu-\eta)\right\}<-\frac{2}{3}<0,$$

$$\mu-\eta-\frac{24\pi\eta}{\omega}-2\eta>\frac{\mu}{2}.$$

于是,再根据(5.11)式,我们判定

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant -r_n^{\frac{\mu}{2}}. \tag{5.16}$$

另一方面,在$\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;r_n^{1-3\eta},2r_n)$上存在一点$z_n=t_ne^{i\varphi},\varphi\in E_i^n\cap[\theta_{k_{i'}}+3\varepsilon,\theta_{k_{i'}+1}-3\varepsilon]$,使得

$$\log|f(z_n)-a_{i'}|\leqslant -\frac{\delta}{4}T(t_n,f)\leqslant -\frac{\delta}{4}r_n^{(\mu-\eta)}\leqslant -r_n^{\frac{\mu}{2}}.$$

如果注意到$a_i\neq a_{i'}$,并且有

$$|a_i-a_{i'}|\leqslant|f(z_n)-a_i|+|f(z_n)-a_{i'}|\leqslant 2e^{-r_n^{\frac{\mu}{2}}},$$

则当n充分大时,我们导出矛盾.

2) $\operatorname{mes}\{E_i^n\cap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}$,以及$\operatorname{mes}\{E_i^n\cap[\theta_{k_{i'}}+3\varepsilon,\theta_{k_{i'}+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}$ $(k_i+1=k_{i'}=k,2\leqslant k\leqslant q+1)$.

类似于情况1)的讨论,我们特别地可以得到当$z\in\Delta(\theta_k-3\varepsilon,r_n^{1-3\eta},\frac{1}{2}r_n)$时,有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant -r_n^{\frac{\mu}{2}},\ \log|f(z)|\leqslant\log M+1=M_{n1},$$

以及当$z\in\Delta(\theta_k+3\varepsilon, r_n^{1-3\eta}, \frac{1}{2}r_n)$时，有

$$\log|f(z)-a_{i'}|\leqslant -r_n^{\frac{\mu}{2}}, \ \log|f(z)|\leqslant \log M+1=M_{n2}.$$

进一步应用引理5.3，我们判定当$z\in\overline{\Omega}(\theta_k-3\varepsilon, \theta_k+3\varepsilon; r_n^{1-2\eta}, r_n^{1-\eta})$时，有

$$\log|f(z)|\leqslant 2\log M+3, \ |f(z)|\leqslant e^3M^2=N.$$

最后，如果注意到$p<+\infty$，则p个亏值$a_i(i=1, 2, \cdots, p)$间的相互距离有一个正的下界$d'>0$. 于是借助于变换$\zeta=\frac{z}{r_n^{1-2\eta}}$，应用定理3.2，我们判定$a_i=a_{i'}$，但是，根据假设，应有$a_i\neq a_{i'}$，从而导出矛盾.

(5)我们证明下述引理.

引理5.4 假设某个集合的测度$\text{mes}\{E_i^n\bigcap[\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}$ $(1\leqslant k\leqslant q, \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$，某条曲线$L_{jn}$交于$\overline{\Omega}(\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ $(\theta_{q+2}=\theta_2+2\pi)$或$\overline{\Omega}(\theta_{k-1}+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ $(\theta_0=\theta_q-2\pi)$，则当n充分大时，必有$a_i=b_j$，同时存在一条连接L_{jn}和任意点$z_n\in E\{t_ne^{i\varphi}|\varphi\in E_i^n\bigcap[\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon]\}$的连续曲线$L_n$，使得当$z\in L_n$时，有

$$|f(z)-a|\leqslant\varepsilon_n, \ \ a=a_i=b_j \ \ \varepsilon_n\to 0, \ \ n\to+\infty.$$

证 我们只需考虑下述几种典型情况：

1) $\text{mes}\{E_i^n\bigcap[\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}$，以及$L_{jn}$交于$\overline{\Omega}(\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$.

首先，按照推导(5.16)式的方式，我们可以判定当n充分大时，

对位在 $\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ 上的点 z 有

$$\log|f(z)-a_i| \leqslant -r_n^{\frac{\mu}{2}}. \tag{5.17}$$

其次，置

$$\varepsilon_{jn}=\max_{z\in L_{jn}}|f(z)-b_j|, \tag{5.18}$$

则当 $n\to+\infty$ 时，有 $\varepsilon_{jn}\to 0$. 任意取定一点 $z_0\in L_{jn}\cap\overline{\Omega}(\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$，则有

$$|a_i-b_j|\leqslant|f(z_0)-a_i|+|f(z_0)-b_j|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\mu}{2}}}+\varepsilon_{jn}\to 0$$
$$(n\to+\infty).$$

于是，我们判定 $a_i=b_j$. 在集合 $E\{t_ne^{i\varphi}|\varphi\in E_i^n\cap[\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon]\}$ 上任意取定一点 z_n，然后用直线 L_n 连接点 z_n 和 z_0，则当 $z\in L_n$ 时，有

$$|f(z)-a|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\mu}{2}}},\quad a=a_i=b_j.$$

2) $\mathrm{mes}\{E_i^n\cap[\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\dfrac{K}{2q}$，以及 L_{jn} 交于 $\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+3\varepsilon, \theta_{k+2}-3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$.

首先，按照推导(5.14)式的方式，我们可以判定当 n 充分大时，对位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+2\varepsilon, \theta_{k+2}-2\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ 上的点 z 有

$$\log|f(z)|\leqslant A(\varepsilon,\theta,\eta)r_n^{\frac{72\pi\mu}{\omega}+8\eta}. \tag{5.19}$$

于是，特别地当 $z\in\Delta\left(\theta_{k+1}+3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, \dfrac{1}{2}r_n\right)$ 时，有

$$\log|f(z)|\leqslant A(\varepsilon,\theta,\eta)r_n^{\frac{72\pi\mu}{\omega}+8\eta}=M_{n1}.$$

其次，根据(5.17)式，当$z\in\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;r_n^{1-3\eta},2r_n)$时，有

$$\log|f(z)|\leqslant\log^+|f(z)-a_i|+\log^+|a_i|+\log 2$$
$$\leqslant\log M+\log 2=\log 2M\ . \tag{5.20}$$

于是，特别地当$z\in\Delta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon;r_n^{1-3\eta},\frac{1}{2}r_n\right)$时，有

$$\log|f(z)|\leqslant\log 2M=M_{n2}\ .$$

进一步应用引理5.3，当$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon,r_n^{1-2\eta},r_n^{1-\eta})$时，我们判定

$$\log|f(z)|\leqslant A(\varepsilon,\theta,\eta)r_n^{\frac{72\pi n}{\omega}+8\eta}+\log 2M+1<r_n^{\frac{72\pi n}{\omega}+9\eta}\ . \tag{5.21}$$

于是，根据(5.19)-(5.21)式，当点z位在圆$\left|z-\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)\cdot e^{i\theta_{k+1}}\right|<4\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)$上时，有

$$\log|f(z)|\leqslant r_n^{\frac{72\pi n}{\omega}+9\eta}\ .$$

另外，根据(5.17)式，当$z\in\Gamma\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon,\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)\right)$时，有

$$|f(z)-a_i|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\mu}{2}}}\ .$$

作变换

$$\zeta=\frac{z-\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)e^{i\theta_{k+1}}}{2\varepsilon\left(r_n^{1-\eta}+r_n^{1-2\eta}\right)},$$

则圆$\left|z-\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)e^{i\theta_{k+1}}\right|\leqslant 2\varepsilon\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)$变为$\zeta$平面上的单位圆$|\zeta|\leqslant 1$, $\Gamma\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon; \frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)\right)$变为$\zeta$平面上的集合$E_a$. 明显地, E_a位在圆$|\zeta|\leqslant\frac{3}{4}$内, 并且若取$h=\frac{1}{16e}$, 则$E_a$不能被包含在欧氏半径之和不超过$2eh$的一些圆内. 置$g(\zeta)=f\left(2\varepsilon\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)\zeta+\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)e^{i\theta_{k+1}}\right)$, 则$g(\zeta)$在圆$|\zeta|\leqslant 1$上全纯, 并且有上界$r_n^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+9\eta}$, 同时当$z\in E_a$时, 有

$$|g(\zeta)-a_i|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\mu}{2}}}.$$

如果进一步应用定理5.2, 置其中的$M=e^{r_n^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+9\eta}}$, $N=r_n^{\frac{\mu}{2}}$, $a=a_i$, $\tau=r=\frac{3}{4}$, 则可以判定对位在圆$|\zeta|\leqslant\frac{3}{4}$上的点$\zeta$有

$$\begin{aligned}|g(\zeta)-a_i|\leqslant \exp\Bigg\{&\left(r_n^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+9\eta}+\log^+|a|+\log 2\right)\\&-A\left(\log\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{16e}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)^2 r_n^{\frac{\mu}{2}}\Bigg\}\\\leqslant \exp\Bigg\{&\left(r_n^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+9\eta}+\log M+\log 2-Ar_n^{\frac{\mu}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

再根据η的选取，我们有

$$\frac{72\pi\eta}{\omega}+9\eta-\frac{\mu}{2}<-\frac{\mu}{4}.$$

于是，当n充分大时，对位在圆$\left|z-\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)e^{i\theta_{k+1}}\right|\leqslant 2\varepsilon\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)$上的点$z$有

$$|f(z)-a_i|\leqslant\exp\left\{-Ar_n^{\frac{\mu}{2}}\right\},$$

其中$A>0$是数字常数．特别地，当$z\in\Gamma\left(\theta_{k+1}+2\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon;\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)\right)$时，有

$$|f(z)-a_i|\leqslant\exp\left\{-Ar_n^{\frac{\mu}{2}}\right\}.$$

应用引理5.2，置其中的$\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k+2}-\theta_{k+1})-\varepsilon$, $R_1=r_n^{1-3\eta}$, $R_2=2r_n$, $R=\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)$, $E_a=\Gamma\left(\theta_{k+1}+2\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon;\frac{1}{2}\left(r_n^{1-2\eta}+r_n^{1-\eta}\right)\right)$, $H=\varepsilon$, $\alpha=a_i$ $N=Ar_n^{\frac{\mu}{2}}$ 和$v=0$，则当$z\in\Omega\left(\theta_{k+1}+2\varepsilon,\theta_{k+2}-2\varepsilon,r_n^{1-3\eta},2r_n\right)$时，有

$$|f(z)-a_i|\leqslant\exp\left\{A(\varepsilon,\theta)2^{\frac{12\pi}{\theta_{k+2}-\theta_{k+1}-2\varepsilon}}r_n^{\frac{18\pi\eta}{\theta_{k+2}-\theta_{k+1}-2\varepsilon}}\right.$$

$$\times\left[2^{2\eta}r_n^{6\eta^2}2^{\eta}r_n^{\eta}\log(2r_n^{3\eta})+\log^+|a_i|\right]$$

$$-\frac{B(\varepsilon,\theta)}{C(\theta)\log(2r_n^{3\eta})+D(\varepsilon,\theta)}\left(2^{\frac{4\pi}{\theta_{k+2}-\theta_{k+1}-2\varepsilon}}\right)^{-1}$$

$$\times r_n^{\frac{-12\pi\eta}{\theta_{k+2}-\theta_{k+1}-2\varepsilon}} A r_n^{\frac{\mu}{2}}\Bigg\}.$$

$$\leqslant \exp\left\{A(\varepsilon,\theta,\eta)r_n^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta}-B(\theta,\varepsilon)r_n^{-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta+\frac{\mu}{2}}\right\}.$$

进一步根据 η 的选取，我们有

$$\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta-\left(\frac{\mu}{2}-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta\right)<-\frac{\mu}{6},$$

$$\frac{\mu}{2}-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta>\frac{\mu}{3}.$$

于是

$$|f(z)-a_i|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\mu}{3}}}.$$

现在，我们取点 $z_0\in L_{jn}\cap\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+3\varepsilon,\theta_{k+2}-3\varepsilon,r_n^{1-3\eta},2r_n)$，则根据 (5.18) 式有

$$|f(z_0)-b_j|\leqslant\varepsilon_{jn}.$$

因为 $p<+\infty$ 和 $l<+\infty$，所以在 p 个亏值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$ 和 l 个渐近值 $b_j(j=1,2,\cdots,l)$ 中，只能含有有限个判别值.于是这有限个判别值间的相互距离必有一个正的下界 $d'>0$. 另一方面，我们有

$$|a_i-b_j|\leqslant|f(z_0)-a_i|+|f(z_0)-b_j|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\mu}{3}}}+\varepsilon_{jn}.$$

于是，当 n 充分大时，有

$$|a_i-b_j|<d'.$$

因此我们判定 $a_i = b_j$. 我们再任取一点 $z_n = t_n e^{i\varphi}$, $\varphi \in E_i^n \cap [\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+1} - 3\varepsilon]$, 然后用直线 L_n'连接点 z_n 和 $\frac{1}{2}(r_n^{1-2\eta} + r_n^{1-\eta}) e^{i(\theta_{k+1} - 3\varepsilon)}$, 同时, 用直线 L_n'' 连接点 z_0 和 $\frac{1}{2}(r_n^{1-2\eta} + r_n^{1-\eta}) \cdot e^{i(\theta_{k+1} + 3\varepsilon)}$. 置

$$L_n = L_n' + \Gamma(\theta_{k+1} - 3\varepsilon, \theta_{k+1} + 3\varepsilon; \frac{1}{2}(r_n^{1-2\eta} + r_n^{1-\eta})) + L_n''$$

则当 $z \in L_n$ 时, 有

$$|f(z) - a| \leqslant e^{-r_n^{\frac{\mu}{3}}}, \quad a = a_i = b_j.$$

3) $\operatorname{mes}\{E_i^n \cap [\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+1} - 3\varepsilon]\} \geqslant \frac{K}{2q}$, 以及 L_{jn} 整个地位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k+1} - 3\varepsilon, \theta_{k+1} + 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ 内.

首先, 当 n 充分大时, 对位在 $\overline{\Omega}(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon, r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ 上的点 z 有

$$\log|f(z) - a_i| \leqslant -r_n^{\frac{\mu}{2}},$$

进而有

$\log|f(z)| \leqslant \log M + \log 2 = M_{n1}$.

其次, 设 L_{jn} 与圆周 $|z| = r_n^{1-3\eta}$ 的交点为 A_{n2}, 自 A_{n2} 点始沿着 L_j 趋向 ∞ 时, 记 L_{jn} 与圆周 $|z| = \frac{1}{2} r_n$ 的第一个交点为 B_{n2}, L_{jn} 介于 A_{n2} 和 B_{n2} 间的部分为 L_{jn}', 则根据 (5.18) 式, 当 $z \in L_{jn}'$ 时, 有

$$\log|f(z) - b_j| \leqslant \log \varepsilon_{jn},$$

进而有

$$\log|f(z)| \leqslant \log^+|f(z)-b_j| + \log^+|b_j| + \log 2$$

$$\leqslant \log M + \log 2 = M_{n2}.$$

L'_{jn} 和 $\Delta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon;\ r_n^{1-3\eta}, \frac{1}{2}r_n\right)$ 以及 $\Gamma\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon;\ r_n^{1-3\eta}\right)$ 和 $\Gamma\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon; \frac{1}{2}r_n\right)$ 上的部分弧段界围一个单连通域 $\Omega'_n \subset \Omega\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon;\ r_n^{1-3\eta}, \frac{1}{2}r_n\right)$. 设共形映照 $\zeta = \varphi_n(z)$ 将 Ω'_n 变为 ζ 平面上的 $\Omega_\zeta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, R_n\right)$, 点 A_{n2} 变为点 $r_n^{1-3\eta}e^{i(\theta_{k+1}+3\varepsilon)}$, 点 $r_n^{1-3\eta}e^{i(\theta_{k+1}-3\varepsilon)} = A_{n1}$ 变为 $r_n^{1-3\eta}e^{i(\theta_{k+1}-3\varepsilon)}$, 点 B_{n2} 变为点 $R_ne^{i(\theta_{k+1}+3\varepsilon)}$ 和点 $\frac{1}{2}r_ne^{i(\theta_{k+1}-3\varepsilon)} = B_{n1}$ 变为点 $R_ne^{i(\theta_{k+1}-3\varepsilon)}$, 则根据引理 3.4, 我们判定

$$R_n \geqslant \frac{1}{2}r_n. \tag{5.22}$$

设 $\zeta = \varphi_n(z)$ 的逆变换为 $z = \varphi_n^{-1}(\zeta)$ 和置 $F_n(\zeta) = f(\varphi_n^{-1}(\zeta))$, 则当 $\zeta \in \Delta_\zeta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, R_n\right)$ 时, 有

$$\log|F_n(\zeta)-a_i| \leqslant -r_n^{\frac{\mu}{2}},$$
$$\log|F_n(\zeta)| \leqslant \log 2M = M_{n1}.$$

当 $z \in \Delta_\zeta\left(\theta_{k+1}+3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, R_n\right)$ 时, 有

$$\log|F_n(\zeta)-b_j| \leqslant \log \varepsilon_{jn},$$

$$\log|F_n(\zeta) \leqslant \log 2M = M_{n2}.$$

当$\zeta \in \Gamma_\zeta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}\right)$时，根据(5.13)式有

$$\log|F_n(\zeta)| \leqslant 3r_n^{\mu+\eta},$$

以及当$\zeta \in \Gamma_\zeta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon; R_n\right)$时，有

$$\log|F_n(\zeta)| \leqslant 3r_n^{\mu+\eta}.$$

于是应用引理2.10，当$\zeta \in \Omega_\zeta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon; r_n^{1-2\eta}, r_n^{1-\eta}\right)$时，我们得到

$$\log|F_n(\zeta)| \leqslant M_{n1}+M_{n2}+\left\{\frac{4\left(\frac{r_n^{1-3\eta}}{|\zeta|}\right)^{\frac{\pi}{6\varepsilon}}}{\pi\left[1-\left(\frac{r_n^{1-3\eta}}{|\zeta|}\right)^{\frac{\pi}{3\varepsilon}}\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{4\left(\frac{|\zeta|}{R_n}\right)^{\frac{\pi}{6\varepsilon}}}{\pi\left[1-\left(\frac{|\zeta|}{R_n}\right)^{\frac{\pi}{3\varepsilon}}\right]}\right\}3r_n^{\mu+\eta}.$$

再根据(5.22)式有

$$\log|F_n(\zeta)| \leqslant M_{n1}+M_{n2}+\left\{\frac{4r_n^{-\frac{\pi\eta}{6\varepsilon}}}{\pi\left[1-r_n^{-\frac{\pi\eta}{3\varepsilon}}\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{4\cdot 2^{\frac{\pi}{6\varepsilon}} r_n^{-\frac{\pi\eta}{6\varepsilon}}}{\pi\left[1-2^{\frac{\pi}{3\varepsilon}} r_n^{-\frac{\pi\eta}{3\varepsilon}}\right]}\right\}3r_n^{\mu+\eta}.$$

进一步根据ε的选取，我们有

$$-\frac{\pi\eta}{6\varepsilon}+\mu+\eta<-1+\eta<0.$$

于是，当n充分大时，有

$$\log|F_n(\zeta)|\leqslant 2\log 2M+1=\log(4eM^2)=\log N.$$

现在，借助于变换$\xi=\dfrac{\zeta}{r_n^{1-2\eta}}$，应用定理3.2，我们判定$a_i=b_j$，同时在$\overline{\Omega}_\zeta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon;r_n^{1-2\eta},r_n^{1-\eta}\right)$上存在一条连接$\Delta_\zeta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon,r_n^{1-2\eta},r_n^{1-\eta}\right)$和$\Delta_\zeta\left(\theta_{k+1}+3\varepsilon;r_n^{1-2\eta},r_n^{1-\eta}\right)$的连续曲线$l'_n$，使得当$\zeta\in l'_n$时，有

$$|F_n(\zeta)-a|\leqslant\varepsilon_{jn3},\ a=a_i=b_j,$$

$$\varepsilon_{n3}=(M+N)\max\left\{e^{-\frac{1}{3}r_n^{\frac{\mu}{2}}},\ \varepsilon_{jn}^{\frac{1}{3}}\right\}\to 0\quad n\to+\infty.$$

记l'_n在z平面上的映像为L'_n，则L'_n是一条连接$\Delta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon,r_n^{1-3\eta},2r_n\right)$和$L_{jn}$的连续曲线，并且当$z\in L'_n$时，有

$$|f(z)-a|\leqslant\varepsilon_{n3}.$$

记L'_n与$\Delta\left(\theta_{k+1}-3\varepsilon,r_n^{1-3\eta},2r_n\right)$的一个交点为$z_0$. 然后用直线$L''_n$连接点$z_0$和任意一点$z_n=t_ne^{i\varphi}$，$\varphi\in E_i^{\eta}\cap[\theta_k+3\varepsilon,\theta_{k+1}-3\varepsilon]$. 置

$$L_n=L'_n+L''_n,$$

则当$z\in L_n$时，我们判定

$$|f(z)-a| \leqslant \varepsilon_{n3}.$$

根据上述讨论，如果取 $\varepsilon_n = \varepsilon_{n3}$，则引理 5.4 得证.

(6) 现在，我们证明两组 Julia 方向集合 $\{\Delta_a(\theta_{k_i}), \Delta_a(\theta_{k_i+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 和 $\{\Delta_b(\theta_{k_j+1}) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$ 之间至多有 l' 条 Julia 方向重合. 事实上，如果 $a_i \neq b_j$，则根据引理 5.4，我们判定 $\Delta_b(\theta_{k_j+1})$ 既不能重合于 $\Delta_a(\theta_{k_i})$，也不能重合于 $\Delta_a(\theta_{k_i+1})$. 于是，在上述两组 Julia 方向集合之间，如果相重的 Julia 方向个数 $> l'$，则必定存在两条 Julia 方向 $\Delta_b(\theta_{k_j+1})$ 和 $\Delta_b(\theta_{k_{j'}+1})$ $(j \neq j')$ 分别重合于 $\Delta_a(\theta_{k_i})$ 和 $\Delta_a(\theta_{k_i+1})$ $(a_i = b_j = b_{j'})$. 应用引理 5.4，我们可以找到一条连接 L_{jn} 和 $L_{j'n}$ 的连续曲线 L_n，使得当 $z \in L_n$ 时，有

$$|f(z)-b| \leqslant \varepsilon_n, \; b = b_j = b_{j'},$$

$$\varepsilon_n \to 0, \quad n \to +\infty.$$

但是这与 b_j 和 $b_{j'}$ 是判别的渐近值的假设相矛盾. 于是两组集合 $\{\Delta_a(\theta_{k_i}), \Delta_a(\theta_{k_i+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 和 $\{\Delta_b(\theta_{k_i+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, l\}$ 之间至多有 l' 条 Julia 方向相重合. 因此，我们判定

$$2p - l' + l \leqslant q.$$

(7) 最后，我们考虑其它情况：

当 $q = +\infty$ 或 p 和 l 同时为零时，定理成立是显然的.

当 $q < +\infty$ 时，则 $p = +\infty$ 或 $l = +\infty$ 时的情况不能发生. 事实上，当 $q < +\infty$, $p = +\infty$ 和 $l < +\infty$ 时，我们取 $p' < +\infty$，使得

$$2p' - l' + l > q.$$

另一方面，根据最初考虑的情况 (1) 的证明，应有

$$2p' - l' + l \leqslant q.$$

于是我们得到一个矛盾. 当 $p < +\infty$, $l = +\infty$ 或 $p = +\infty$, $l = +\infty$ 时, 我们类似地得到一个矛盾. 于是定理 5.4 完全得证.

定理 5.4 有下述推论:

系 1. $p + l \leqslant q$ 和 $l \leqslant q$.

系 2. $2p \leqslant q$.

系 3. 若 $2p = q$, 则有 $l = l'$.

系 4. 若 $l = q$, 则有 $p = 0$.

我们能否构造一个下级 μ 为有穷的整函数 $f(z)$, 使得 $f(z)$ 具有 q 条 Julia 方向, l 个判别有穷渐近值, p 个有穷亏值, 其中 l' 个亏值同时是渐近值, 并且适合下述等式

$$2p - l' + l = q\ ?$$

在一些特殊情况下, 这样的例子是存在的. 例如, 函数

$$\int_0^z e^{-z^q} dz$$

具有 q 个有穷亏值, $2q$ 条 Julia 方向, 并且 $l = l'$. 于是等式 $2p - l' + l = q$ 成立. 另外, 函数

$$\int_0^z \frac{\sin z^q}{z^q} dz$$

具有 $2q$ 个判别有穷渐近值, $2q$ 条 Julia 方向, 并且 $p = 0$. 于是等式 $2p - l' + l = 2q$ 成立.

定理 5.5 设 $f(z)$ 是一个整函数, 其下级 $\mu < +\infty$. 记 $f(z)$ 的 Julia 方向个数为 q, 判别有穷渐近值个数为 l, 有穷亏值个数为 p, 其中 l' 个亏值同时是渐近值. 再假定 $q < +\infty$ 和 $2p - l' + l = q$, 则有 $p = l'$ 和 $\lambda = \mu$, 其中 λ 是 $f(z)$ 的级.

证. (1)首先，根据条件$2p-l'+l=q<+\infty$，我们判定$p<+\infty$和$l<+\infty$. 其次，根据$f(z)$是整函数，我们有$q\geqslant 1$. 于是，这个等式$2p-l'+l=q\geqslant 1$说明p和l不能同时为零. 进而根据定理4.4的系，我们判定$\mu\geqslant\frac{1}{2}$. 另一方面，因为$q<+\infty$和$\mu<+\infty$，所以根据定理2.17的系1，我们判定级$\lambda<+\infty$.

以下，我们先假设$p\geqslant 1$和记$f(z)$的p个有穷亏值为$a_i(i=1,2,\cdots,p)$，其相应亏量为$\delta(a_i,f)=\delta_i>0$，$f(z)$的l个判别有穷渐近值为$b_j(j=1,2,\cdots,l)$，其相应定值路径为L_j，以及$f(z)$的q条Julia方向为$\Delta(\theta_k)(k=1,2,\cdots,q;\ 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi)$. 置

$$\omega=\min_{1\leqslant k\leqslant q}\{\theta_{k+1}-\theta_k\},\quad \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi,\quad \delta=\min_{1\leqslant i\leqslant p}\{\delta_i\},$$

$$M=\max\{1,|a_1|,\cdots,|a_p|,|b_1|,\cdots,|b_l|\}$$

和任意取定一个数η,

$$0<\eta<\frac{\min(\omega,\mu\omega)}{360(\lambda+1)\pi}.$$

然后，我们构造序列$r_n=2^{(1+\eta)^n}(n=1,2,\cdots)$. 根据引理2.5和引理3.9(置其中的$K=2h(1+\lambda)(1+\eta)\eta^{-1}$, $h=3$, $\sigma=\log 2$)，只要n_0充分大，则当$n\geqslant n_0$时，在区间$[r_{n-1},2r_n]$中必定存在一个值t_n，使得

$$\operatorname{mes}E_i^n\geqslant K,\quad K=K(\delta,\lambda,p,\eta)>0,\quad i=1,2,\cdots,p,$$

其中

$$E_i^n=E\left\{\theta\left|\log\frac{1}{|f(t_ne^{i\theta})-a_i|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(t_n,f),\quad 0\leqslant\theta<2\pi\right.\right\},$$
$$i=1,2,\cdots,p.$$

另外，根据级λ和下级μ的定义，只要n_0充分大，当$r\geqslant r_{n_0}$时，有

$$r^{\mu-\eta} \leqslant T(r, f) \leqslant r^{\lambda+\eta}.$$

最后，我们取定一个数ε,

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\pi\eta}{6(\lambda+1)}, \frac{K}{12q}, \frac{\omega}{8}\right\}.$$

置

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{q} \overline{\Omega}(\theta_k + \varepsilon, \theta_{k+1} - \varepsilon),$$

则根据定理2.13和有限覆盖定理，我们判定存在两个判别有穷值α, β, 使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ n\{r, \overline{\Omega}, f = X\}}{\log r} = 0, \ X = \alpha, \beta.$$

因为α和β是有穷值，所以存在一个数d, $0 < d < \frac{1}{2}$, 使得α, β, ∞间的相互球距均大于d.

(2)考虑圆环序列Γ_n: $r_n^{1-3\eta} \leqslant |z| \leqslant 2r_n (n = 1, 2, \cdots)$. 自原点始沿着$L_j (j = 1, 2, \cdots, l)$趋向于$\infty$时，我们取$L_j$与圆周$|z| = r_n^{1-3\eta}$的最后一个交点，以及$L_j$与圆周$|z| = 2r_n$的第一个交点，然后记$L_j$介于这两个交点间的部分为$L_{jn}$. 类似于定理5.4的证明，只要$n_0$充分大，对每个值$n(n = n_0, n_0 + 1, \cdots)$, 我们都可以使每条曲线$L_{jn}(j = 1, 2, \cdots, l)$ 对应一条Julia方向$\Delta(\theta_{k_{jn}+1}) = \Delta_b(\theta_{k_{jn}+1})$ $(1 \leqslant k_{jn} \leqslant q; j = 1, 2, \cdots l)$. L_{jn}对应$\Delta_b(\theta_{k_{jn}+1})$表示$L_{jn}$与$\Omega(\theta_{k_{jn}} + 3\varepsilon, \theta_{k_{jn}+2} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)$ $(\theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi)$有交. 同样类似地，我们可以证明集合$\{\Delta_b(\theta_{k_{jn}+1}) | j = 1, 2, \cdots, l\}$中任何两条Julia方向不相重合.

类似于定理5.4的证明，只要n_0充分大，对于每个值$n(n$

$= n_0, n_0 + 1, \cdots$), 我们都可以使每个亏值 $a_i(i = 1, 2, \cdots, p)$ 对应一对 Julia 方向 $\{\Delta(\theta_{k_{in}}) = \Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta(\theta_{k_{in}+1}) = \Delta_a(\theta_{k_{in}+1})\}$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$. a_i 对应 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1})\}$ 表示有

$$\text{mes}\{E_i^n \bigcap [\theta_{k_{in}} + 3\varepsilon, \theta_{k_{in}+1} - 3\varepsilon]\} \geqslant \frac{K}{2q}.$$

同样类似地,我们可以证明集合 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 中的任何两条 Julia 方向不相重合.

最后,类似于定理5.4的证明,我们可以判定两个集合 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 和 $\{\Delta_b(\theta_{k_{jn}+1}) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$ 之间至多有 l' 条 Julia 方向相重合. 于是

$$2p - l' + l \leqslant q.$$

另一方面,根据假设 $2p - l' + l = q$, 我们判定每条 Julia 方向 $\Delta(\theta_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$ 都必定属于 $\{\Delta_b(\theta_{k_{jn}+1}) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$ 或 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$. 否则应有 $2p - l' + l \leqslant q - 1$. 从而导出矛盾.

(3) 证明 $p = l'$. 当 $p = 0$ 时, 必有 $p = l' = 0$. 于是, 我们只需考虑 $p \geqslant 1$ 时的情况. 事实上, 如果 $p \neq l'$, 则有 $p > l'$. 我们不妨假设亏值 a_1 不是 $f(z)$ 的一个渐近值. 对于每个值 $n(n = n_0, n_0 + 1, \cdots)$, a_1 对应一对 Julia 方向 $\{\Delta_a(\theta_{k_{1n}}), \Delta_a(\theta_{k_{1n}+1})\}$, 从而有

$$\text{mes}\{E_1^n \bigcap [\theta_{k_{1n}} + 3\varepsilon, \theta_{k_{1n}+1} - 3\varepsilon]\} \geqslant \frac{K}{2q}.$$

以下, 我们证明 $k_{1n} = k_{1n+1}$ $(n = n_0, n_0 + 1, \cdots)$. 事实上, 如果不然, 则根据每条 Julia 方向 $\Delta(\theta_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$ 都必属于 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 或 $\{\Delta_b(\theta_{k_j+1}) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$ $(n = n_0, n_0 + 1, \cdots)$, 我们只需考虑下述几种典型情况.

1) $q > 3$ 和 $k_{1n} = k_{in+1}$, $i \neq 1$.

应用引理5.2，置其中的$\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k_{1n}+1}-\theta_{k_{1n}})-\varepsilon$，$R=t_n$，$R_1=r_{n-1}$，$R_2=2r_{n+1}$，$E_\alpha=E\{t_ne^{i\varphi}\mid\varphi\in E_1^n\cap[\theta_{k_{1n}}+3\varepsilon,\theta_{k_{1n}+1}-3\varepsilon]\}$，$H=\frac{K}{2q}$，$\alpha=a_1$，$N=\frac{\delta}{4}T(t_n,f)$和$v=0$,则只要$n_0$充分大，当$n\geqslant n_0$时，对位在$\overline{\Omega}(\theta_{k_{1n}}+2\varepsilon,\theta_{k_{1n}+1}-2\varepsilon;r_{n-1},2r_{n+1})$上的点$z$有

$$|f(z)-a_1|\leqslant\exp\left\{A(\varepsilon,\theta)\left(\frac{2r_{n+1}}{r_{n-1}}\right)^{\frac{6\pi}{\theta}}\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{2r_{n+1}}{r_{n-1}}\right)^{2^\eta}(2r_{n+1})^\eta\log\frac{2r_{n+1}}{r_{n-1}}+\log^+|a_1|\right]$$

$$-\frac{B(\varepsilon,\theta)}{C(\theta)\log\frac{2r_{n+1}}{r_{n-1}}+D(\varepsilon,\theta)}$$

$$\left.\times\left(\frac{r_{n-1}}{2r_{n+1}}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}\frac{\delta}{4}T(t_n,f)\right\}.$$

进一步注意到

$$\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k_{1n}+1}-\theta_{k_{1n}})-\varepsilon\geqslant\frac{\omega}{2}-\varepsilon\geqslant\frac{\omega}{4},$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_{n-1}}=r_{n+1}^{1-(1+\eta)^{-2}}=r_{n+1}^{(2+\eta)(1+\eta)^{-2}\cdot\eta}\leqslant r_{n+1}^{3\eta},$$

$$T(t_n,f)\geqslant r_n^{\mu-\eta}\geqslant r_{n-1}^{\mu-\eta}\geqslant r_{n+1}^{(1-2\eta)(\mu-\eta)},$$

则得到

$$|f(z)-a_1|\leqslant\exp\left\{A(\varepsilon,\theta,\eta)r_{n+1}^{\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta}\right.$$

$$\left.-B(\varepsilon,\theta,\omega,\eta,\delta)r_{n+1}^{(1-2\eta)(\mu-\eta)-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta}\right\}.$$

再根据 η 的选取，我们有

$$\frac{72\pi\eta}{\omega}+8\eta-\left\{(1-2\eta)(\mu-\eta)-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta\right\}<-\frac{2}{3}\mu<0,$$

$$(1-2\eta)(\mu-\eta)-\frac{24\pi\eta}{\omega}-\eta>\frac{\mu}{2}.$$

于是

$$|f(z)-a_1|\leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}}. \tag{5.23}$$

另一方面，因为有

$$\text{mes}\left\{E_i^{n+1}\cap[\theta_{k_{in+1}}+3\varepsilon,\theta_{k_{in+1}+1}-3\varepsilon]\right\}\geqslant\frac{K}{2q},$$

所以存在一点 $z_0=t_{n+1}e^{i\varphi}$, $\varphi\in E_i^{n+1}\cap[\theta_{k_{in+1}}+3\varepsilon,\theta_{k_{in+1}+1}-3\varepsilon]$，使得

$$\log\frac{1}{|f(z_0)-a_i|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(t_{n+1},f)$$

或

$$|f(z_0)-a_i|<e^{-\frac{\delta}{4}T(t_{n+1},f)}.$$

于是，结合(5.23)式，我们判定

$$\begin{aligned}|a_i-a_1|&\leqslant|f(z_0)-a_1|+|f(z_0)-a_i|\\&\leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}}+e^{-\frac{\delta}{4}T(t_{n+1},f)}.\end{aligned}$$

因此，只要 n_0 充分大，当 $n\geqslant n_0$ 时，必有 $a_1=a_i$，从而导出矛盾.

2) $q>3$ 和 $k_{1n}=k_{in+1}+1, i\neq 1$.

类似于定理5.4证明中(4)节情况2)的讨论，只要 n_0 充分大，当 $n\geqslant n_0$ 时，必有 $a_1=a_i$, 从而导出矛盾.

3) $q\geqslant 2$ 和 L_{jn+1} 交于 $\overline{\Omega}(\theta_{k_{1n}-1}+3\varepsilon, \theta_{k_{1n}+1}-3\varepsilon; r_{n+1}^{1-3\eta}, 2r_{n+1})$.

类似于引理5.4的证明，只要 n_0 充分大，当 $n\geqslant n_0$ 时，必有 $a_1=b_j$, 从而导出矛盾.

4) $q=2$ 和 $k_{1n}=k_{1n+1}+1$.

首先，类似于情况1)的讨论，对于位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k_{1n}}+2\varepsilon, \theta_{k_{1n}+1}-2\varepsilon, r_{n-1}, 2r_{n+1})$ 上的点 z 有

$$|f(z)-a_1|<e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}}. \tag{5.24}$$

特别地，当 $z\in\Delta(\theta_{k_{1n}}+2\varepsilon, r_{n-1}, r_{n+1})$ 时，有

$$|f(z)-a_1|\leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}},$$

以及当 $z\in\Delta(\theta_{k_{1n}+1}-2\varepsilon, r_{n-1}, r_{n+1})$ 时，有

$$|f(z)-a_1|\leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}}.$$

其次，我们有

$$\operatorname{mes}\{E_i^{n+1}\cap[\theta_{k_{1n+1}}+3\varepsilon, \theta_{k_{1n+1}+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}.$$

于是类似于定理5.4证明中(4)节情况1)的讨论，当 $z\in\overline{\Omega}(\theta_{k_{1n+1}}+2\varepsilon, \theta_{k_{1n+1}+1}-2\varepsilon; r_{n-1}, 2r_{n+1})$ 时，我们得到

$$|f(z)-a_1|\leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}}. \tag{5.25}$$

特别地当 $z\in\Delta(\theta_{k_{1n+1}}-2\varepsilon;r_{n-1},r_{n+1})$ 时，有

$$|f(z)-a_1|\leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}}.$$

以及当 $z\in\Delta(\theta_{k_{1n+1}}+2\varepsilon;r_{n-1},r_{n+1})$ 时，有

$$|f(z)-a_1|\leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}}.$$

另外，只要 n_0 充分大，应用 Poisson-Jensen 公式，我们判定

$$\begin{aligned}\log M(r_{n-1},f-a_1)&\leqslant 3T(2r_{n-1},f-a_1)\\&\leqslant 3\{T(2r_{n-1},f)+\log M+\log 2\}\leqslant r_{n-1}^{\lambda+\eta},\end{aligned}$$

$$\log M(r_{n+1},f-a_1)\leqslant r_{n+1}^{\lambda+\eta}.$$

现在，应用引理2. 10，当 $z\in\Gamma(\theta_{k_{1n}}-2\varepsilon,\theta_{k_{1n}}+2\varepsilon;r_n)$ 时，我们得到

$$\log|f(z)-a_1|\leqslant\left\{1-\left[\frac{4\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right)}+\frac{4\left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-\left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^{\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right)}\right]\right\}\left(-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}\right)$$

$$+\frac{4\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right)}r_n^{\lambda+\eta}$$

$$+\frac{4\left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-\left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^{\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right)} r_{n+1}^{\lambda+\eta},$$

$$\log|f(z)-a_1| \leqslant \left\{1-\frac{4r_{n-1}^{-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-r_{n-1}^{-\frac{\pi\eta}{2\varepsilon}}\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{4r_n^{-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-r_n^{-\frac{\pi\eta}{2\varepsilon}}\right)}\right\}\left(-r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}\right)+\frac{4r_{n-1}^{-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}+\lambda+\eta}}{\pi\left(1-r_{n-1}^{-\frac{\pi\eta}{2\varepsilon}}\right)}$$

$$+\frac{4}{\pi\left(1-r_n^{\frac{\pi\eta}{2\varepsilon}}\right)} r_n^{-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}+(\lambda+\eta)(1+\eta)}.$$

注意到只要 n_0 充分大，当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$1-\frac{4r_{n-1}^{-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-r_{n-1}^{-\frac{\pi\eta}{2\varepsilon}}\right)}-\frac{4r_n^{-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}}}{\pi\left(1-r_n^{-\frac{\pi\eta}{2\varepsilon}}\right)} \geqslant \frac{1}{2},$$

以及根据 ε 和 η 的选取，我们有

$$-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}+\lambda+\eta \leqslant -\frac{3}{2}\lambda-\frac{3}{2}+\lambda+\eta \leqslant -\frac{1}{2}\lambda-1,$$

$$-\frac{\pi\eta}{4\varepsilon}+(\lambda+\eta)(1+\eta) \leqslant -\frac{3}{2}\lambda-\frac{3}{2}+\lambda+\eta \leqslant -\frac{1}{2}\lambda-1.$$

于是，我们判定

$$\log|f(z)-a_1|\leqslant -r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}+1 . \tag{5.26}$$

类似地，当 $z\in\Gamma(\theta_{k_{1n}+1}-2\varepsilon, \theta_{k_{1n}+1}+2\varepsilon; r_n)$ 时，我们判定

$$\log|f(z)-a_1|\leqslant -r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}+1 . \tag{5.27}$$

因此，根据(5.24)—(5.27)式，我们得到

$$\log|M(r_n, f-a_1)\leqslant -\frac{1}{2}r_{n+1}^{\frac{\mu}{2}}+1 .$$

如果存在一个整数序列 $n_m(m=1, 2, \cdots)$，使得 $k_{1n_m}=k_{1m_m}+1(m=1, 2, \cdots)$，则有

$$\log M(r_{n_m}, f-a_1)\leqslant -\frac{1}{2}r_{n_m+1}^{\frac{\mu}{2}}+1\,(m=1, 2, \cdots),$$

于是，我们判定 $f(z)\equiv a_1$，从而导出矛盾.

现在，我们命 $k_1=k_{1n}(n=n_0, n_0+1, \cdots)$. 于是对于每个值 $n(n\geqslant n_0)$，$\Delta_a(\theta_{k_{1n}})$ 必定重合于 $\Delta_a(\theta_{k_1})$，以及 $\Delta_a(\theta_{k_{1n}}+1)$ 必定重合于 $\Delta_a(\theta_{k_1+1})$. 因此 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}(\theta_{k_1}+2\varepsilon, \theta_{k_1+1}-2\varepsilon)$ 上一致地收敛于值 a_1，即 a_1 是 $f(z)$ 的一个渐近值. 但是这与 a_1 不是渐近值的假设相矛盾，从而证明了 $p=l'$.

(4) 证明 $\lambda=\mu$.

1) 根据假设 $2p-l'+l=q$，对于每个值 $n\ (n=n_0, n_0+1, \cdots)$ 相应的两个 Julia 方向集合 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1})\,|\,i=1, 2, \cdots, p\}$ 和 $\{\Delta_b(\theta_{k_{jn}+1})\,|\,j=1, 2, \cdots, l\}$ 之间必定有且恰有 l' 条 Julia 方向相重合. 再注意到 $p=l'$，类似于定理 5.4 证明中 (6) 节的讨论，我们进一步判定每对 Julia 方向 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1})\}$ $(i=1, 2, \cdots, p)$ 和集合 $\{\Delta_b(\theta_{k_{jn}+1})\,|\,j=1, 2, \cdots, l\}$ 之间必定有且恰恰有一条 Julia 方

向相重合.

以下，我们证明$k_{in}=k_{in+1}$ $(i=1,2,\cdots,p;n=n_0,n_0+1,\cdots)$. 事实上，如果不然，我们只需考虑下述几种典型情况：

(i) $q=2$.

在这种情况下，必有$p=1$. 于是类似于(3)中情况1)的讨论，我们可以证明存在一整数序列n_m $(m=1,2,\cdots)$，使得$k_{1n_m}=k_{1n_m+1}+1$ $(m=1,2,\cdots)$，同时有

$$\log M(r_{n_m},f-a_1)\leqslant -\frac{1}{2}r_{n_m}^{\frac{\mu}{2}}+1 \quad (m=1,2,\cdots).$$

因此，我们判定$f(z)\equiv a_1$，从而导出矛盾.

(ii) $q>3$和$k_{in}=k_{i'n+1}$或$k_{in}=k_{i'n+1}+1(i\neq i')$.

类似于(3)中情况1)和2)的讨论，我们判定$a_i=a_{i'}$，从而导出矛盾.

(iii) $q>3$和$k_{in}=k_{jn+1}+1$，以及$k_{in}+1=k_{j'n+1}+1$ $(j\neq j')$.

类似于(3)中情况1)和定理5.4证明中(6)节的讨论，我们判定b_j和$b_{j'}$是非判别的渐近值，从而导出矛盾.

(iv) $q>3$和$k_{in}=k_{in+1}+1$，以及$k_{in}+1=k_{jn+1}+1$.

首先，在集合$\{\Delta_b(\theta_{k_{jn+1}+1})\,|\,j=1,2,\cdots,l\}$中，必定存在一条Julia方向$\Delta_b(\theta_{k_{j'n+1}+1})$，使得$\Delta_b(\theta_{k_{j'n+1}+1})$重合于$\Delta_a(\theta_{k_{in+1}})$或$\Delta_a(\theta_{k_{in+1}+1})$，类似于(3)中情况1)和4)的讨论以及引理5.4的证明，我们可以判定b_j和$b_{j'}$是非判别渐近值，从而导出矛盾.

现在，置$k_i=k_{in}$ $(1\leqslant i\leqslant p;n=n_0,n_0+1,\cdots)$，则$f(z)$在$\overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon)$ $(1\leqslant i\leqslant p)$上一致地趋近于$a_i$. 特别地，在$\overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon)$ $(1\leqslant i\leqslant p)$上存在一条定值路径$L'_i$，使得

$$\lim_{\substack{z\in L'_i\\|z|\to+\infty}} f(z)=a_i.$$

我们不妨假定L'_i $(1\leqslant i\leqslant p)$和定值路径$L_i$定义同一个渐近值，即

有 $a_i = b_i\ (i = 1, 2, \cdots, p)$.

2) 现在，我们证明只要 n_0 充分大，$L_j(p+1 \leqslant i \leqslant l)$ 位在圆 $|z| \leqslant r_{n_0}$ 外的部份，必定整个地位在某个 $\Omega(\theta_{k_j} - 3\varepsilon, \theta_{k_j} + 3\varepsilon; r_{n_0}, +\infty)\ (1 \leqslant k_j \leqslant q, k_j \neq k_i, k_j \neq k_i + 1, i = 1, 2, \cdots, p)$ 的内部. 事实上，如果不然，则必定存在值 n, $n \geqslant n_0$, 使得 L_j 必定交于某个闭域 $\overline{\Omega}(\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+1} - 3\varepsilon; r_n^{1-3\eta}, 2r_n)\ (1 \leqslant k \leqslant q)$. 于是 $k \neq k_{jn}$ 或 $k+1 \neq k_{jn}$. 我们设 $k \neq k_{jn}$. 另外，$\Delta(\theta_k)$ 属于 $\{\Delta_a(\theta_{k_{in}}), \Delta_a(\theta_{k_{in}+1}) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 或 $\{\Delta_b(\theta_{k_{jn}+1}) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$. 于是，类似于定理 5.4 证明中 (3) 节的讨论，我们可以判定 b_j 和某个 $a_i(1 \leqslant i \leqslant p)$ 是非判别渐近值或 b_j 和某个 $b_{j'}(p+1 \leqslant j' \leqslant l, j' \neq j)$ 是非判别渐近值，从而导出矛盾. 最后，$l - p$ 个域 $\Omega(\theta_{k_j} - 3\varepsilon, \theta_{k_j} + 3\varepsilon; r_{n_0}, +\infty)\ (j = p+1, p+2, \cdots, l)$ 是相互判别的.

3) 现在，我们证明 $\lambda = \mu$.

因为 $f(z)$ 以 ∞ 为亏值，其相应亏量 $\delta(\infty, f) = 1$, 所以根据引理 2.3 (置其中的 $h_1 = 0$) 和引理 3.9 (置其中的 $k = 2\lambda, \sigma = \log 2$), 我们判定存在两个序列 R'_m 和 R_m, 使得

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\log T(R'_m, f)}{\log R'_m} = \lambda,$$

$$R'_m \leqslant R_m \leqslant 2R_m,$$

同时 R_m 具有性质：置

$$E_m = E\left\{\theta \,\middle|\, \log|f(R_m e^{i\theta})| > \frac{1}{4} T(R_m, f), 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\}, \qquad (5.28)$$

则有

$$\operatorname{mes} E_m \geqslant \tilde{K}, \tilde{K} = \tilde{K}(\lambda) > 0.$$

其中 $\tilde{K}$ 是依赖于级 λ, 但与 m 无关的常数.

对于ε的选取，我们作进一步的要求：$\varepsilon < \frac{\tilde{K}}{12q}$. 于是在$q$个区间$[\theta_k + 3\varepsilon, \theta_{k+1} - 3\varepsilon]$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$中至少存在一个区间$[\theta_{km} + 3\varepsilon, \theta_{k_m+1} - 3\varepsilon]$，使得

$$\text{mes}\{E_m \cap [\theta_{km} + 3\varepsilon, \theta_{k_m+1} - 3\varepsilon]\} \geqslant \frac{\tilde{K}}{2q}.$$

我们不妨假定$k_m = k_{m+1}$ $(m = 1, 2, \cdots)$. 否则，只要选取一个子序列.

以下，我们区分三种情况讨论：

(i) $q = 1$.

首先，根据定理2.17的系2，我们判定$\lambda \leqslant \frac{1}{2}$. 其次，根据假设$2p - l' + l = q$，必有$l = 1$. 于是根据定理4.4的系，我们判定$\mu \geqslant \frac{1}{2}$. 因此我们有$\lambda = \mu$.

(ii) $q = 2$.

根据条件$2p - l' + l = q$，我们判定仅仅两种情况可能发生：

i) $p = l = 1$.

不妨假定

$$\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \bar{\Omega}(\theta_1 + 2\varepsilon, \theta_2 - 2\varepsilon)}} f(z) = a_1 \tag{5.29}$$

于是，只能有

$$\text{mes}\{E_m \cap [\theta_2 + 3\varepsilon, \theta_3 - 3\varepsilon]\} \geqslant \frac{\tilde{K}}{4}. \quad m = 1, 2, \cdots,$$

其中$\theta_3 = \theta_1 + 2\pi$. 以下，我们证明$\lambda \leqslant \frac{\pi}{\theta_3 - \theta_2 - \varepsilon}$. 事实上，如果不

然，则有 $\lambda > \frac{\pi}{\theta_3-\theta_2-\varepsilon}$. 因为$f(z)$ 在 $\Omega(\theta_2,\theta_3)$ 上没有Julia 方向，所以根据引理2.10, 我们有

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{\log^+\log^+ M\left\{\overline{\Omega}\left(-\frac{\theta_3-\theta_2}{2}+\varepsilon, \frac{\theta_3-\theta_2}{2}-\varepsilon; R\right), f\right\}}{\log R}$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\theta_3-\theta_2-\varepsilon}.$$

进一步根据 (5.28) 式，我们判定 $\lambda \leqslant \frac{\pi}{\theta_3-\theta_2-\varepsilon}$，从而导出矛盾.

另一方面，根据 (5.29) 式，特别地有

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Delta(\theta_1+2\varepsilon)}} f(z) = a_1, \quad \lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Delta(\theta_2-2\varepsilon)}} f(z) = a_1.$$

置

$$\tilde{M} = \sup_{z\in\Delta(\theta_1+2\varepsilon)\cup\Delta(\theta_2-2\varepsilon)} |f(z)|$$

和取一点 $z_0 = R_m e^{i\varphi}$, $\varphi\in E_m\cap[\theta_2+2\varepsilon, \theta_3-2\varepsilon]$，使得

$$\log|f(z_0)| > \frac{1}{4}T(R_m, f) > 1 + 2\log\tilde{M}. \tag{5.30}$$

应用引理2.9, 我们有

$$\log|f(z_0)| \leqslant 2\log\tilde{M} + \frac{4\left(\frac{|z_0|}{R}\right)^{\frac{\pi}{\theta_3-\theta_2+4\varepsilon}}}{\pi\left\{1-\left(\frac{|z_0|}{R}\right)^{\frac{2\pi}{\theta_3-\theta_2+4\varepsilon}}\right\}}$$

$$\times \log M(R, f).$$

进一步根据 (5.30) 式，我们判定

$$\frac{\pi}{\theta_3 - \theta_2 + 4\varepsilon} \leqslant \lim_{R \to +\infty} \frac{\log\log M(R,f)}{\log R} = \mu$$

或

$$\frac{\pi}{\mu} \leqslant \theta_3 - \theta_2 + 4\varepsilon.$$

另一方面，我们有 $\frac{\pi}{\lambda} \geqslant \theta_3 - \theta_2 - \varepsilon$. 于是 $\frac{\pi}{\mu} \leqslant \frac{\pi}{\lambda} + 5\varepsilon$. 因为可以选取 ε 充分小，所以必有 $\lambda \leqslant \mu$, 即有 $\lambda = \mu$.

ii) $l = 2$.

在这种情况下，两条路径 L_1 和 L_2 位在圆 $|z| \leqslant r_{n_0}$ 外部分，必定分别位在 $\Omega(\theta_1 - 3\varepsilon, \theta_1 + 3\varepsilon; r_{n_0}, +\infty)$ 和 $\Omega(\theta_2 - 3\varepsilon, \theta_2 + 3\varepsilon; r_{n_0}, +\infty)$ 的内部，于是类似于 (1) 的讨论，我们可以判定 $\lambda = \mu$.

iii) $q \geqslant 3$.

因为在 $\Omega(\theta_{k_m} - 3\varepsilon, \theta_{k_m} + 3\varepsilon; r_{n_0}, +\infty)$ 和 $\Omega(\theta_{k_m+1} - 3\varepsilon, \theta_{k_m+1} + 3\varepsilon; r_{n_0}, +\infty)$ 内部必定分别都存在定值路径，所以我们可以类似地判定 $\lambda = \mu$. 于是，定理 5.5 完全得证.

§5.3. 具有有穷条 Julia 方向的整函数类[43h]

定理 5.6 设 $f(z)$ 是（开平面 $|z| < +\infty$ 上的）一个整函数. 记 $f(z)$ 的 Julia 方向个数为 q, 判别有穷渐近值个数为 l, 有穷亏值个数为 p, 其中 l' 个亏值同时是渐近值. 如果 $q < +\infty$, 则有

$$p - l' + l \leqslant 2\mu,$$

其中 μ 是 $f(z)$ 的下级.

证. 当 $\mu = +\infty$ 时，定理 5.6 成立是显然的. 于是，我们只须考

虑$\mu < +\infty$时的情况.

当$\mu < +\infty$时，根据$q < +\infty$和定理2.17的系1，我们判定$f(z)$的级$\lambda < +\infty$. 另一方面，当$p - l' = 0$时，根据定理4.7我们判定定理5.6成立.于是我们只需考虑$p - l' \geqslant 1$时的情况. 当$p - l' \geqslant 1$时，根据定理4.4的系，我们判定下级$\mu \geqslant \frac{1}{2}$.

以下，我们只需证明当$\frac{1}{2} \leqslant \mu \leqslant \lambda < +\infty$和$p - l' \geqslant 1$时，定理5.6成立.事实上，如果不然，则存在整数$p_1$, $1 \leqslant p_1 \leqslant p - l'$, $p_1 < +\infty$和整数l_1, $0 \leqslant l_1 \leqslant l$, $l_1 < +\infty$, 使得

$$p_1 + l_1 \geqslant [2\mu] + 1.$$

(1) 我们选取p_1个$f(z)$的非渐近值亏值$a_i (i = 1, 2, \cdots, p_1)$，其相应亏量$\delta(a_i, f) = \delta_i > 0$, 以及$l_1$个$f(z)$的判别有穷渐近值$b_j (j = 1, 2, \cdots, l_1)$，其相应定值路径为$L_j$. 不失一般性，我们可以假设$L_j (1 \leqslant j \leqslant l_1)$是一条始自原点趋于$\infty$的简单连续曲线，同时在圆$|z| \leqslant 2$内部份为直线段，并且$l_1$条曲线$L_j (j = 1, 2, \cdots, l_1)$除原点外彼此无交点，$L_j$和$L_{j+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant l_1; L_{l_1+1} \equiv L_1)$是相邻的，界囿一个单连通域$D_j$. 置

$$M_0 = \sup_{z \in \bigcup_{j=1}^{l_1} L_j} |f(z)| < +\infty, \tag{5.32}$$

$$M_1 = \max\{1, |a_1|, \cdots, |a_{p_1}|, |b_1|, \cdots, |b_{l_1}|\}, \tag{5.33}$$

$$M_2 = \min\{1, |a_i - a_{i'}|, |b_j - b_{j'}|, |a_i - b_j| \mid 1 \leqslant i \neq i' \leqslant p_1, 1 \leqslant j \neq j' \leqslant l_1 \text{和} b_j \neq b_{j'}\}. \tag{5.34}$$

根据定理4.3，我们判定在D_j $(1 \leqslant j \leqslant l_1)$内存在一条伸展到$\infty$的连续曲线$\Gamma_j$, 使得

$$\varliminf_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in\Gamma_j}}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}\geqslant\frac{1}{2}. \tag{5.35}$$

于是，我们可以在 $\Gamma_j\,(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 上选取一点 z_j'，使得 $|f(z_j')|\geqslant M_0$. 置

$$r_0'=\max\{|z_1'|,|z_2'|,\cdots,|z_{l_1}'|\}.$$

当 $r>r_0'$ 时，记 $D_j\,(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 位在圆 $|z|<r$ 内且含有点 z_j' 的连通分支为 $\Omega_j(r)$ 和注意到

$$M\{\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r),f\}=\max_{z\in\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r)}|f(z)|,$$
$$j=1,2,\cdots,l_1,$$

则 $M\{\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r),f\}$ $(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 是 $r\,(r\geqslant r_0')$ 的单调递增函数，并且根据 (5.35) 式有

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log\log M\{\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r),f\}}{\log r}\geqslant\frac{1}{2}. \tag{5.36}$$

另一方面，我们在 $D_j\cap(|z|=1)$ $(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 上取一点 z_j''. 然后根据连通性，在 $D_j\,(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 内存在一条连接点 z_j' 和 z_j'' 的曲线 L_j'. 我们再取值 r_0'', $r_0''>r_0'$ 使得 l_1 条曲线 $L_j'(j=1,2,\cdots,l_1)$ 均位在圆 $|z|<r$ 内且含有点 z_j'' 的连通分支即是 $\Omega_j(r)$. 记 $L_j\,(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 介于原点 $z=0$ 和它与圆周 $|z|=r$ 的第一个交点间的部分为 $L_j(r)$，则 $L_j(r)$ 和 $L_{j+1}(r)$ 在圆 $|z|<r$ 内界囿一个单连通区域 $D_j(r)$. 明显地，当 $r\geqslant r_0''$ 时，有 $\Omega_j(r)\subset D_j(r)\,(j=1,2,\cdots,l_1)$.

(2) 记 $f(z)$ 的 q 条 Julia 方向为 $\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;\ 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi)$. 置

$$\omega=\min_{1<k<q}(\theta_{k+1}-\theta_k),\ \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi,$$

$$\delta=\min_{1<i<p_1}\{\delta_i\}.$$

任意取定一个数η,

$$0<\eta<\frac{\omega}{2(31\times 32+84)\pi}$$

和数r_0, $r_0>r_0''$, 然后我们构造序列$r_m=r_0^{(1+\eta)^{2m}}$, $m=1,2,\cdots$. 根据引理2.4(置其中的$h_1=0$)和引理3.9(置其中的$\sigma=\log 2$)存在整数m_0, $m_0\geqslant 2$使得当$r\geqslant r_{m_0}$时,有

$$T(r,f)\leqslant r^{\lambda+\eta},\ \log M(r,f)\leqslant r^{\lambda+\eta}, \tag{5.37}$$

$$T(r,f)\geqslant r^{\mu-\eta}, \tag{5.38}$$

以及当$m\geqslant m_0$时,在区间$[r_m, 2r_m^{1+\eta}]$中存在值t_m,使得集合

$$E_i(t_m)=E\left\{\theta\left|\log\frac{1}{|f(t_me^{i\theta})-a_i|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(t_m,f),0\leqslant\theta<2\pi\right.\right\},$$
$$(i=1,2,\cdots,p_1)$$

的测度

$$\mathrm{mes}E_i(t_m)\geqslant K=K(\delta,\lambda,p_1,\eta)>0.$$

最后,我们再取定一个数ε,

$$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{\pi\eta}{24(\lambda+1)},\frac{K}{12q},\frac{\omega}{40}\right\}$$

和置$\overline{\Omega}=\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon)$,则根据定理2.13和有限覆盖定理,存在两个判别有穷值α和β,使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n(r,\overline{\Omega},f=X)}{\log r}=0,\quad X=\alpha,\beta.$$

显然，存在数 $d, 0<d<\frac{1}{2}$ 使得 α, β 和 ∞ 间的相互球距均大于 d.

(3) 当 $m \geqslant m_0$ 时，根据 ε 的选取，对于每一个值 $i(1 \leqslant i \leqslant p_1)$，在 q 个集合 $E_i(t_m) \cap [\theta_k+3\varepsilon, \theta_{k+1}-3\varepsilon]$ $(k=1,2,\cdots,q)$ 中，至少存在一个集合 $E_i(t_m) \cap [\theta_{k_i}+3\varepsilon, \theta_{k_i+1}-3\varepsilon]$ $(1 \leqslant k_i \leqslant q)$，使得

$$\text{mes}\{E_i(t_m) \cap [\theta_{k_i}+3\varepsilon, \theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\} \geqslant \frac{K}{2q}.$$

再根据(5.38)式和 η 的选取，应用引理5.2，置其中的 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k_i+1}-\theta_{k_i})-\varepsilon$, $R_1=t_{m-1}$, $R=t_m$, $R_2=t_{m+1}$, $E_\alpha=E\{t_m e^{i\varphi} \mid \varphi \in E_i(t_m) \cap [\theta_{k_i}+3\varepsilon, \theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\}$, $H=\frac{K}{2q} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha=a_i$, $N=\frac{\delta}{4}T(t_m, f)$ 和 $\nu=0$, 我们判定存在值 $m_1, m_1 \geqslant m_0$ 使得当 $m \geqslant m_1$ 和 $z \in \overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon; t_{m-1}, t_{m+1})$ 时，有

$$\log|f(z)-a_i| \leqslant -At_m^{-\left(\frac{31+8\pi}{\omega}+1\right)\eta} T(t_m, f), \tag{5.39}$$

其中 $A>0$ 是与 m 无关的常数. 置

$$\varepsilon_m'=e^{-At_m^{-\left(\frac{31\times 8\pi}{\omega}+1\right)\eta} T(t_m, f)},$$

则存在值 $m_2, m_2 \geqslant m_1$ 使得当 $m \geqslant m_2$ 时，有

$$\varepsilon_m'<\frac{1}{4}M_2<1. \tag{5.40}$$

于是，p_1 个集合 $\overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon; t_{m-1}, t_{m+1})$ $(i=1,2,\cdots,p_1)$ 是相互判别的.

记 $L_j(1 \leqslant j \leqslant l_1)$ 介于它与圆周 $|z|=t_{m-1}$ 的最后一个交点和与圆周 $|z|=t_{m+1}$ 的第一个交点间部分为 L_{jm}. l_1 条曲线 $L_{jm}(j=1,2,\cdots,l_1)$ 分割圆环 $C_m: t_{m-1}<|z|<t_{m+1}$ 为 l_1 个区域 $D_{jm}(j$

$=1, 2, \cdots, l_1$）并且 L_{jm} 和 L_{j+1m} 是 D_{jm} 的边界部分．置

$$\varepsilon_m'' = \max_{1<j<l_1} \left\{ \sup_{z \in L_j \cap c_m} |f(z) - b_j| \right\}, \tag{5.41}$$

则当 $m \to +\infty$ 时有 $\varepsilon_m'' \to 0$. 于是，存在值 $m_3, m_3 \geqslant m_2$ 使得当 $m \geqslant m_3$ 时，有

$$\varepsilon_m'' < \frac{1}{4} M_2 < 1. \tag{5.42}$$

因此，直线段 $\Delta\left(\frac{\theta_{k_i}+\theta_{k_i+1}}{2}; t_{m-1}, t_{m+1}\right)$ 或者整个地位在 $D_{jm}(1 \leqslant j \leqslant l_1)$ 内，或者与 D_{jm} 无交．设 $s_j(0 \leqslant s_j \leqslant p_1)$ 个 $\Delta\left(\frac{\theta_{k_i}+\theta_{k_i+1}}{2}; t_{m-1}, t_m\right)(i=1, 2, \cdots, s_j)$ 位在 D_{jm} 内，则 D_{jm} 被分割为 s_j+1 个域 D_{jmv} $(v=1, 2, \cdots, s_j+1)$. 我们假设 L_{jm} 是 D_{jm1} 的边界部分和 L_{j+1m} 是 D_{jms_j+1} 的边界部分．明显地有 $\sum_{j=1}^{l_1} s_j = p_1$.

（4）我们证明，如果 $s_j \neq 0(1 \leqslant j \leqslant l_1)$，则当 m 充分大时，在 $D_{jmv} \cap (e^{-30\varepsilon} t_m \leqslant |z| \leqslant e^{30\varepsilon} t_m)$ $(1 \leqslant v \leqslant s_j+1)$ 中存在一个点 z_{jmv} 和一个与 m 无关的常数 $A>0$, 使得

$$\log |f(z_{jmv})| \geqslant AT(t_m, f) .$$

事实上，我们只需考虑一种典型情况，即对区域 D_{jms_j+1} 进行证明．注意到 $L_{j+1}m$ 是 D_{jms_j+1} 的边界部分．另外，设 $\Delta\left(\frac{\theta_k+\theta_{k+1}}{2}; t_{m-1}, t_{m+1}\right)(1 \leqslant k \leqslant q)$ 是 D_{jms_j+1} 的另一边界部分．并且当 $m \geqslant m_3$ 和 $z \in \overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon; t_{m-1}, t_{m+1})$ 时，有

$$\log |f(z) - a_i| \leqslant \log \varepsilon_m' = -A t_m^{-\left(\frac{31 \times 8\pi}{\omega}+1\right)\eta} T(t_m, f) \quad (1 \leqslant i \leqslant p_1). \tag{5.43}$$

其中$A>0$是与m无关的常数.根据(5.40)—(5.43)式,我们判定L_{j+1m}不能交于$\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$.

1)我们进一步证明L_{j+1m}不能整个地位在$\Omega(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$内.事实上,如果不然,设$L_{j+1m}$和$\Delta(\theta_{k+1}-3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$在圆环$C_m$内界囿一个区域$\Omega'\subset\Omega(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$,以及$\overline{\Delta}(\theta_{k+1}-3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$与圆周$|z|=t_{m-1}$的交点为$A_1$,与圆周$|z|=t_{m+1}$的交点为$B_1$,$L_{j+1m}$与圆周$|z|=t_{m-1}$的交点为$A_2$,与圆周$|z|=t_{m+1}$的交点为$B_2$.再假设共形映照$\zeta=\varphi(z)$将$\Omega'$变为$\zeta$平面上的区域$\Omega_\zeta(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon;t_{m-1},t'_{m+1})$,点$A_1,A_2,B_1,B_2$分别变为点$t_{m-1}e^{i(\theta_{k+1}-3\varepsilon)}$,$t_{m-1}e^{i(\theta_{k+1}+3\varepsilon)}$,$t'_{m+1}e^{i(\theta_{k+1}-3\varepsilon)}$和$t'_{m+1}e^{i(\theta_{k+1}+3\varepsilon)}$,则根据引理2.10,我们判定$t'_{m+1}\geq t_{m+1}$.置$g(\zeta)=f(\varphi^{-1}(\zeta))$,则根据(5.33)和(5.43)式,当$\zeta\in\Delta_\zeta(\theta_{k+1}-3\varepsilon;t_{m-1},t'_{m+1})$时,有

$$\log|g(\zeta)|=\log|f(z)|\leq\log^+|f(z)-a_i|+\log^+|a_i|+\log 2$$

$$\leq\log^+\varepsilon'_m+\log M_1+\log 2=\log 2M_1\ .$$

另一方面,根据(5.33)和(5.41)式,当$\zeta\in\Delta_\zeta(\theta_{k+1}+3\varepsilon;t_{m-1},t'_{m+1})$时,有

$$\log|g(\zeta)|=\log|f(z)|$$

$$\leq\log^+|f(z)-b_{j+1}|+\log^+|b_{j+1}|+\log 2$$

$$\leq\log^+\varepsilon''_m+\log M_1+\log 2=\log 2M_1\ .$$

另外,存在值m_4, $m_4\geq m_3$使得当$m\geq m_4$时,有$t_{m-1}<e^{-3\pi}t_m<e^{3\pi}t_m<\frac{1}{4}t_{m+1}$.于是,我们应用引理2.10可以判定,当$\zeta\in\Omega_\zeta(\theta_{k+1}-3\varepsilon,$

$\theta_{k+1}+3\varepsilon; e^{-3\pi}t_m, e^{3\pi}t_m)$时，有

$$\log|g(\zeta)|\leqslant 2\log 2M_1+\frac{4\left(\frac{t_{m-1}}{|\zeta|}\right)^{\frac{\pi}{6\varepsilon}}}{\pi\left(1-\left(\frac{t_{m-1}}{|\zeta|}\right)^{\frac{\pi}{3\varepsilon}}\right)}$$

$$\times\log M(t_{m-1},f)+\frac{4\left(\frac{|\zeta|}{t_{m+1}}\right)^{\frac{\pi}{6\varepsilon}}}{\pi\left(1-\left(\frac{|\zeta|}{t_{m+1}}\right)^{\frac{\pi}{3\varepsilon}}\right)}\log M(t_{m+1},f).$$

进一步根据(5.37)式和ε的选取，存在值$m_5, m_5\geqslant m_4$. 使得当$m\geqslant m_5$和$\zeta\in\Omega_\zeta(\theta_{k+1}-3\varepsilon, \theta_{k+1}+3\varepsilon; e^{-3\pi}t_m, e^{3\pi}t_m)$时，有

$$\log|g(\zeta)|\leqslant 2\log 2M_1+1,$$

$$|g(\zeta)|\leqslant 4eM_1^2.$$

明显地，存在值$m_6, m_6\geqslant m_5$使得当$m\geqslant m_6$时，有

$$(M_1+4eM_1^2)(\varepsilon_m'^{\frac{1}{3}}+\varepsilon_m''^{\frac{1}{3}})<M_2.$$

于是，借助于变换$\xi=e^{3\pi}t_m^{-1}\zeta$, 应用引理3.2, 我们判定$a_i=b_{j+1}$, 从而导出矛盾.

2)我们证明当m充分大时，L_{j+1m}也不能交于$\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+3\varepsilon, \theta_{k+2}-3\varepsilon; t_{m-1}, t_{m+1})$. 事实上，如果不然，则根据(5.33)式，应用引理5.2, 置其中的$\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k+2}-\theta_{k+1})-\varepsilon$, $R_1=t_{m-1}$, $R=t_m$, $R_2=t_{m+1}$, $L=L_{j+1m}$, $H=\varepsilon>\frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha=b_{j+1}$, $N=0$和$\gamma=0$, 我们判定存在值$m_7, m_7\geqslant m_6$使得当$m\geqslant m_7$和$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+2\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon; t_{m-1}, t_{m+1})$时，有

$$\log|f(z)|\leqslant\log^+|f(z)-b_{j+1}|+\log^+|b_j|+\log 2$$

$$\leqslant At_m^{\left(\frac{31\times 24\pi}{\omega}+40\right)\eta}.$$

其中$A>0$是与m无关的常数.特别地,当$z\in\Delta(\theta_{k+1}+3\varepsilon,\ t_{m-1},\ t_{m+1})$时,有

$$\log|f(z)|\leqslant At_m^{\left(\frac{31\times 21\pi}{\omega}+40\right)\eta}.$$

另一方面,根据(5.33)和(5.43)式,当$z\in\Delta(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\ t_{m-1},t_{m+1})$时,有

$$\log|f(z)|\leqslant\log 2M_1.$$

类似地,应用引理2.10,当$m\geqslant m_7$和$z\in\Omega(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\ \theta_{k+1}+3\varepsilon;\ e^{-3\pi}t_m,e^{3\pi}t_m)$时,有

$$\log|f(z)|\leqslant At_m^{\left(\frac{31\times 24\pi}{\omega}+40\right)\eta}+\log 2M_1+1.$$

进一步,当$z\in\Omega(\theta_{k+1}-4\varepsilon,\theta_{k+1}+4\varepsilon;e^{-3\pi}t_m,e^{3\pi}t_m)$时,有

$$|f(z)|\leqslant\exp\left\{At_m^{\left(\frac{31\times 24\pi}{\omega}+40\right)\eta}+\log 2M_1+1\right\}.$$

作变换

$$\zeta=\frac{1}{4\varepsilon}(\log z-\log t_m-i\theta_{k+1})$$

和置$g(\zeta)=f(z)$,则$g(\zeta)$在圆$|\zeta|\leqslant 1$上全纯,$\Gamma(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;t_m)$在$\zeta$平面上的像集$E$含于圆$|\zeta|\leqslant\frac{3}{4}$内.如果取$h=\frac{1}{16e}$,则$E$不能被包含在欧氏半径之和不超过$2eh$的一些圆内.根据(5.43)式,当$\zeta\in E$时,有

$$|g(\zeta)-a_i|\leqslant \exp\left\{-At_m^{-\left(\frac{31\times 8\pi}{\omega}+1\right)^\eta}T(t_m,f)\right\}.$$

根据(5.33)式和η的选取，应用定理5.2，置其中的$M=\exp\left\{At_m^{\left(\frac{31\times 24\pi}{\omega}+40\right)^\eta}+\log 2M_1+1\right\}$，$\alpha=a_i$，$N=At_m^{-\left(\frac{31\times 8\pi}{\omega}+1\right)^\eta}\times T(t_m,f)$，$\tau=r=\frac{3}{4}$，我们判定存在值$m_8$，$m_8\geqslant m_7$使得当$m\geqslant m_8$和$|\zeta|\leqslant\frac{3}{4}$时，有

$$\log|g(\zeta)-a_i|\leqslant -At_m^{-\left(\frac{31\times 8\pi}{\omega}+1\right)^\eta}T(t_m,f),$$

其中$A>0$是与m无关的常数．特别地，当$m\geqslant m_8$和$z\in\Gamma(\theta_{k+1}+2\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon,t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant -At_m^{-\left(\frac{31\times 8\pi}{\omega}+1\right)^\eta}T(t_m,f),A>0.$$

类似地，应用引理5.2，我们判定存在值m_9，$m_9\geqslant m_8$使得当$m\geqslant m_9$和$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+2\varepsilon,\theta_{k+2}-2\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$时，有

$$|f(z)-a_i|\leqslant\exp\left\{-At_m^{-2\left(\frac{31\times 8\pi}{\omega}+1\right)^\eta}T(t_m,f)\right\}\leqslant\frac{1}{4}M_2.$$

我们在$L_{j+1m}\cap\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+3\varepsilon,\theta_{k+2}-3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$上取一点$z_0$．然后根据(5.34)，(5.41)和(5.42)式有

$$M_2\leqslant|a_i-b_{j+1}|\leqslant|f(z_0)-a_i|+|f(z_0)-b_{j+1}|$$

$$\leqslant\frac{1}{4}M_2+\frac{1}{4}M_2=\frac{1}{2}M_2,$$

即是导出矛盾．

3)假设L_{j+1m}不交于$\overline{\Omega}(\theta_{k+1}-3\varepsilon,\theta_{k+s}-3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$ $(2\leqslant s<q)$，但是交于$\overline{\Omega}(\theta_{k+s}-3\varepsilon,\theta_{k+s+1}-3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$．我们证明当$m$

充分大时，在$\Omega(\theta_{k+1}-2\varepsilon,\theta_{k+s-1}+8\varepsilon;e^{-10\varepsilon}t_m,e^{10\varepsilon}t_m)$内存在一点$z_1$，使得$|f(z_1)-a_i|\geq 1$. 事实上，如果不然，则当$z\in\Omega(\theta_{k+1}-2\varepsilon,\theta_{k+s-1}+8\varepsilon;e^{-10\varepsilon}t_m,e^{10\varepsilon}t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leq 0 . \tag{5.44}$$

根据(5.38)式和η的选取，应用引理5.2，置其中的$\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k+1}-\theta_k)-\varepsilon$, $R_1=e^{-30\varepsilon}t_m$, $R=t_m$, $R_2=e^{30\varepsilon}t_m$, $E_\alpha=E\{t_me^{i\varphi}|\varphi\in E_i(t_m)\cap[\theta_k+3\varepsilon,\theta_{k+1}-3\varepsilon]\}$, $H=\frac{K}{2q}\geq\frac{\varepsilon}{2}$,

$\alpha=a_i$, $N=\frac{\delta}{4}T(t_m,f)$和$\nu=0$,我们判定存在值$m_{10}$, $m_{10}\geq m_9$使得当$m\geq m_{10}$和$z\in\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{30\varepsilon}t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leq -AT(t_m,f) ,$$

其中$A>0$是与m无关的常数.特别地，当$z\in\Delta(\theta_{k+1}-2\varepsilon;e^{-10\varepsilon}t_m,e^{10\varepsilon}t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leq -AT(t_m,f) . \tag{5.45}$$

作变换

$$\zeta=\frac{1}{10\varepsilon}\{\log z-\log t_m-i(\theta_{k+1}-2\varepsilon)\}$$

和置$g(\zeta)=f(z)$，则$g(\zeta)$在上半圆：$|\zeta|<1$和$I_m\zeta>0$内全纯，并根据(5.44)有

$$\log|g(\zeta)-a_i|\leq 0 ,$$

以及根据(5.45)式，当$|\zeta|<1$和$I_m\zeta=0$时有

$$\log|g(\zeta)-a_i|\leq -AT(t_m,f) .$$

进一步应用引理3.2，我们判定当$|\zeta|\leqslant\frac{1}{2}$和$\arg\zeta=\frac{\pi}{2}$时，有

$$\log|g(\zeta)-a_i|\leqslant\frac{1}{3}(-AT(t_m,f))\leqslant-AT(t_m,f),\ A>0.$$

于是，当$m\geqslant m_{10}$和$z\in\Gamma(\theta_{k+1}+2\varepsilon,\theta_{k+1}+3\varepsilon;t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant-AT(t_m,f),$$

其中$A>0$是与m无关的常数．类似地，应用引理5.2，我们判定存在值m_{11}，$m_{11}\geqslant m_{10}$ 使 得 当$m\geqslant m_{11}$ 和$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k+1}+2\varepsilon,\ \theta_{k+2}-2\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{30\varepsilon}t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant-AT(t_m,f),$$

其中$A>0$是与m无关的常数．重复上述讨论$s-1$次，我们判定存在值m_{12}，$m_{12}\geqslant m_{11}$ 使 得$m\geqslant m_{12}$ 和$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k+s-1}+2\varepsilon,\ \theta_{k+s}-2\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{30\varepsilon}t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant-AT(t_m,f),$$

其中$A>0$是与m无关的常数．再进一步应用引理5.2，我们判定当$m\geqslant m_{12}$和$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k+s-1}+2\varepsilon,\theta_{k+s}-2\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant-At_m^{-\left(\frac{31\times8\pi}{\omega}+1\right)^{\eta}}T(t_m,f),$$

其中$A>0$是与m无关的常数．以下，类似于1)和2)的讨论，我们判定L_{j+1m}不能交于$\overline{\Omega}(\theta_{k+s}-3\varepsilon,\theta_{k+s+1}-3\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$，从而导出矛盾．于是，当$m\geqslant m_{12}$时，在$\Omega(\theta_{k+1}-2\varepsilon,\theta_{k+s-1}+8\varepsilon;e^{-10\varepsilon}t_m,e^{10\varepsilon}t_m)$内存在一点$z_1$，使得

$$|f(z_1)-a_i|\geqslant1. \tag{5.46}$$

我们不妨假设当$z\in\Omega(\theta_{k+2}-2\varepsilon,\arg z_1;e^{-10\varepsilon}t_m,e^{10\varepsilon}t_m)$时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant 0 .$$

另一方面，根据上述的讨论，我们能看出，如果点 z_1 位在 $\Omega(\theta_{k+s'}-2\varepsilon,\theta_{k+s'+1}-2\varepsilon;e^{-10\varepsilon}t_m,e^{10\varepsilon}t_m)$ $(1\leqslant s'\leqslant s-1)$ 内，则点 z_1 必定位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k+s'}-2\varepsilon,\theta_{k+s'}+8\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{30\varepsilon}t_m)$ 内.

4) 我们证明当 m 充分大时，在 $\overline{\Omega}(\theta_{k+s'}-2\varepsilon,\theta_{k+s'}+18\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{10\varepsilon}t_m)$ 内存在一点 z_{jms_j+1}，使得

$$\log|f(z_{jms_j+1})|\geqslant AT(t_m,f) ,$$

其中 $A>0$ 是与 m 无关的常数.

首先，当 $m\geqslant m_{12}$ 和 $z\in\Delta(\theta_{k+s'}-2\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{30\varepsilon}t_m)$ 时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant -AT(t_m,f),\ A>0 . \tag{5.47}$$

其次，取一点 $z_{jms_j+1}\in\overline{\Omega}(\theta_{k+s'}-2\varepsilon,\theta_{k+s'}+18\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{30\varepsilon}t_m)$，使得当 $z\in\overline{\Omega}(\theta_{k+s'}-2\varepsilon,\theta_{k+s'}+18\varepsilon;e^{-30\varepsilon}t_m,e^{30\varepsilon}t_m)$ 时，有

$$|f(z)-a_i|\leqslant|f(z_{jms_j+1})-a_i| . \tag{5.48}$$

作变换

$$\zeta=\frac{1}{20\varepsilon}\{\log z-\log|z_1|-i(\theta_{k+s'}-2\varepsilon)\}$$

和置

$$g(\zeta)=f(z),\ g(\zeta_1)=f(z_1) ,$$

其中 ζ_1 是 ζ 平面上点 z_1 的像点，则 $g(\zeta)$ 在上半圆：$|\zeta|<1$ 和 $I_m\zeta>0$ 内全纯，并且根据(5.48)式有

$$\log|g(\zeta)-a_i|\leqslant\log|f(z_{jms'_j+1})-a_i| .$$

另一方面，根据(5.47)式，当 $|\zeta|<1$ 和 $I_m\zeta=0$ 时，有

$$\log|g(\zeta)-a_i|\leqslant -AT(t_m,f),\ A>0 ,$$

同时根据(5.46)式有

$$\log|g(\zeta_1)-a_i|\geqslant 0 .$$

注意到$|\zeta_1|\leqslant\frac{1}{2}$和$\arg\zeta_1=\frac{\pi}{2}$，应用引理3.2，我们判定

$$\begin{aligned}0\leqslant\log|g(\zeta_1)-a_i|&\leqslant\log|f(z_{jms_j+1})-a_i|+\frac{1}{3}(-AT(t_m,f))\\&\leqslant\log^+|f(z_{jms_j+1})|+\log 2M_1-AT(t_m,f)\ ,\end{aligned}$$

其中$A>0$是与m无关的常数.于是，存在值m_{13}, $m_{13}\geqslant m_{12}$使得当$m\geqslant m_{13}$时，有

$$\log|f(z_{jms_j+1})|\geqslant AT(t_m,f)\ ,$$

其中$A>0$是与m无关的常数.至此，我们证明了在$D_{jms_j+1}\bigcap(e^{-30\varepsilon}t_m\leqslant|z|\leqslant e^{30\varepsilon}t_m)$内存在一点$z_{jms_j+1}$和一个与$m$无关的常数$A>0$，使得

$$\log|f(z_{jms_j+1})|\geqslant AT(t_{m_1}f)\ . \tag{5.49}$$

5)根据上述讨论，我们看出，值m_{13}和(5.49)式中的值A的确定，除去依赖于某些不变参数M_0, M_1, M_2, d, δ, ω, η, ε外，主要依赖于s'和s，并且s'和s的值越大时，值m_{13}越大和值A越小.但是，对于每个域$D_{jm\nu}(1\leqslant\nu\leqslant s_j+1, s_j\neq 0, 1\leqslant j\leqslant l_1)$，相应的值$s'$和$s$均有$1\leqslant s'\leqslant s-1<q<+\infty$. 因此，存在值$m_{14}$, $m_{14}\geqslant m_{13}$和值A_0, $0<A_0<1$使得当$m\geqslant m_{14}$时，有

$$\left.\begin{aligned}&\log|f(z_{jm\nu})|\geqslant A_0T(t_m,f)\ ,\\&z_{jm\nu}\in D_{jm\nu}\bigcap(e^{-30^\varepsilon}t_m\leqslant|z|\leqslant e^{30^\varepsilon}t_m)\ ,\\&\nu=1,2\cdots,s_j+1,\ s_j\neq 0\ ,\\&j=1,2,\cdots,l_1.\end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

(5) 设$s_j\neq 0(1\leqslant j\leqslant l_1)$.在区间$\left[\frac{1}{4}A_0T(t_m,f),\frac{1}{2}A_0T(t_m,f)\right]$ $(m\geqslant m_{14})$上存在值$A_0'T(t_m,f)$,使得等位线$\log|f(z)|=A_0'T(t_m,f)$是解析的.考虑集合

$$E=E\{z\,|\,\log|f(z)|>A_0'T(t_m,f),\ |z|<t_{m+1}\}.$$

记含有点$z_{jm\nu}$ $(1\leqslant\nu\leqslant s_j+1)$ 的连通分支为$\Omega'_{jm\nu}$. 根据最大模原理,我们判定$\overline{\Omega}'_{jm\nu}\bigcap(|z|=t_{m+1})$不是空集且含有内点.

1)我们证明当m充分大时,有$\Omega'_{jm\nu}\subset D_{jm\nu}(j=1,2,\cdots l_1;\ \nu=1,2,\cdots,s_j+1,s_j\neq 0)$. 于是$\{\Omega'_{jm\nu}\}$彼此无交.

首先,根据$p_1\geqslant 1$, $f(z)$至少有两个亏值a_1和∞. 于是根据引理3.7,存在一个正数$\tau=\tau(\delta(a_1,f),\delta(\infty,f))$,对任意的值$\sigma$, $1\leqslant\sigma<+\infty$有

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{T(\sigma t,f)}{T(t,f)}\geqslant\sigma^{\tau}.$$

若置$\sigma=\sqrt[\tau]{\frac{24}{A_0}}$, $\sigma t=t_m$, 则存在值m_{15}, $m_{15}\geqslant m_{14}$使得当$m\geqslant m_{15}$时,有

$$T(t_m,f)\geqslant\frac{12}{A_0}T(\sigma^{-1}t_m,f)>\frac{12}{A_0}T(2t_{m-1},f).$$

于是

$$A_0'T(t_m,f)\geqslant\frac{A_0}{4}T(t_m,f)\geqslant 3T(2t_{m-1},f)$$

$$\geqslant\log M(t_{m-1},f).\tag{5.51}$$

另一方面,根据(5.39)—(5.42)式,当$m\geqslant m_{15}$

和 $z\in\bigcup_{j=1}^{l_1}L_{jm}\bigcup_{i=1}^{p_1}\Delta\left(\frac{\theta_{k_i}+\theta_{k_i+1}}{2};t_{m-1},t_{m+1}\right)$时，有

$$\log|f(z)|\leqslant\log 2M_1.$$

明显地，存在值m_{16}，$m_{16}\geqslant m_{15}$使得当$m\geqslant m_{16}$时，有

$$A_0'T(t_m,f)\geqslant\frac{A_0}{4}T(t_m,f)>\log 2M_1. \tag{5.52}$$

于是，根据(5.51)和(5.52)式，以及$\Omega'_{jm\nu}$的定义，我们判定当$m\geqslant m_{16}$时，有$\Omega'_{jm\nu}\subset D_{jm\nu}$.

2) 我们证明当m充分大时，有$\Omega'_{jm\nu}\subset D_j(t_{m+1})$. 首先，存在值$m_{17}$，$m_{17}\geqslant m_{16}$使得当$m\geqslant m_{17}$时，有

$$A_0'T(t_m,f)\geqslant\frac{A_0}{4}T(t_m,f)>\log M_0. \tag{5.53}$$

于是，根据(5.32)式，我们判定$\Omega'_{jm\nu}$与$L_j(j=1,2,\cdots,l_1)$无交.其次，根据$\Omega'_{jm\nu}\subset D_{jm\nu}$，我们判定$\overline{\Omega}'_{jm\nu}\bigcap(|z|=t_{m+1})\subset\bar{D}_{jm\nu}(|z|=t_{m+1})\subset\bar{D}_{jm}\bigcap(|z|=t_{m+1})=\bar{D}_j(t_{m+1})\bigcap(|z|=t_{m+1})$. 另外，根据$\overline{\Omega}_{jm\nu}\bigcap(|z|=t_{m+1})$不是空集且含有内点，我们判定存在点$z_2\in\Omega'_{jm\nu}\bigcap D_j(t_{m+1})$. 于是，当$m\geqslant m_{17}$时，有$\Omega'_{jm\nu}\subset D_j(t_{m+1})$.

3) 记$\Omega'_{jm\nu}$位在圆$|z|<\frac{1}{2}t_{m+1}$内且含有点$z_{jm\nu}$的连通分支为$\Omega_{jm\nu}\subset\Omega'_{jm\nu}$，则$\{\Omega_{jm\nu}\}$彼此无交.再记圆周$|z|=r(|z_{jm\nu}|\leqslant r\leqslant\frac{1}{4}t_{m+1};m\geqslant m_{17})$位在$\Omega_{jm\nu}$内部分的线性测度为$r\theta_{jm\nu}(r)$. 应用定理3.1，我们有

$$A_0T(t_m,f)\leqslant\log|f(z_{jm\nu})|\leqslant\frac{A_0}{2}T(t_m,f)$$

$$+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2|z_{jm\nu}|}^{\frac{1}{4}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm\nu}(r)}}\log M\left(\frac{1}{2}t_{m+1},f\right),$$

进一步，根据(5.50)式得到

$$\pi\int_{2e^{30\varepsilon_{t_m}}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm\nu}(r)}\leqslant\log T(t_{m+1},f)$$

$$-\log T(t_m,f)+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}. \tag{5.54}$$

4) 当 $m\geqslant m_{17}$ 时，根据(5.53)式，$\Omega_{jm\nu}$ 或者整个地位在 $\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 内，或者与 $\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 无交. 假设存在域 $\Omega_{jm\nu_j}(1\leqslant\nu_j\leqslant s_j+1)$，使得 $\Omega_{jm\nu_j}$ 整个地位在 $\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 内，我们简记 $\Omega_{jm\nu_j}=\Omega_{jm}$ 和 $\theta_{jm\nu_j}(r)=\theta_{jm}(r)$，则应用定理3.1有

$$A_0T(t_m,f)\leqslant\log|f(z_{jm\nu_j})|$$

$$\leqslant\frac{A_0}{2}T(t_m,f)+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2e^{30_{t_m}}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dt}{r\theta_{jm}(r)}}$$

$$\times\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\},$$

进一步得到

$$\pi\int_{2e^{30\varepsilon_{t_m}}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}\leqslant\log\log M$$

$$\times\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\}$$

$$-\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_m\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_m\right),f\right\}$$

$$+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}. \tag{5.55}$$

5)假设 s_j+1 个域 $\Omega_{jm\nu}(\nu=1,2,\cdots,s_j+1)$ 均与 $\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 无交.首先,任意取一个值 ν_j, $1\leqslant\nu_j\leqslant s_j+1$. 然后我们定义一个新的域 Ω_{jm} 用以取代 $\Omega_{jm\nu_j}$.具体地, Ω_{jm} 定义如下:先取一点 $z_{jm}\in\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m)$, 使得

$$|f(z_{jm})|=M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m),f\}.$$

明显地,点 z_{jm} 是 $\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 的内点.然后,在区间 $\left[\sqrt[4]{M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m),f\}},\ \sqrt{M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m),f\}}\right]$ 中取值 A_0'', 使得等位线 $|f(z)|=A_0''$ 是解析的.考虑集合

$$E=E\left\{z\,\middle|\,|f(z)|>A_0'',\ |z|<\frac{1}{2}t_{m+1}\right\}.$$

记含有点 z_{jm} 的连通分支为 Ω_{jm}, 则根据最大模原理,集合 $\overline{\Omega}_{jm}\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 不是空集且含有内点.另一方面,根据(5.36)式,存在值 m_{18}, $m_{18}\geqslant m_{17}$ 使得当 $m\geqslant m_{18}$ 时,有

$$A_0''\geqslant\sqrt[4]{M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m),f\}}>M_0.$$

于是,当 $m\geqslant m_{18}$ 时,有 $\Omega_{jm}\subset\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_m\right)$, 并且 Ω_{jm} 与 $\Omega_{jm\nu}(1\leqslant\nu\leqslant s_j+1)$ 无交.记圆周 $|z|=r\left(t_m\leqslant r\leqslant\frac{1}{4}t_{m+1}\right)$ 位在 Ω_{jm} 内部分的线性测度为 $r\theta_{jm}(r)$. 应用定理3.1,我们有

$$\begin{aligned}\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m),f\}&=\log|f(z_{jm})|\\&\leqslant\frac{1}{2}\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m),f\}\end{aligned}$$

$$+9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2t_m}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}}\log M$$

$$\times\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right), f\right\},$$

进一步得到

$$\pi\int_{2e^{30\varepsilon_{t_m}}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}\leqslant\log\log M$$

$$\times\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right), f\right\}$$

$$-\log\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\cap(|z|=t_m), f\}$$

$$+\log 18\sqrt{2}\leqslant\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\right.$$

$$\left.\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right), f\right\}$$

$$-\log\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\cap(|z|=t_m), f\}+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}.$$

于是，我们在形式上重新得到了(5.55)式.

今后，当 $m\geqslant m_{18}$ 和 $s_j\neq 0(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 时，若置 $1\leqslant\nu\neq\nu_j\leqslant s_j+1$，则取(5.54)；若置 $\nu=\nu_j$ 则取(5.55)式.

(6) 设 $s_j=0(1\leqslant j\leqslant l_1)$. 类似地，我们可以定义区域 $\Omega_{jm}\subset\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\subset\Omega_j(t_{m+1})\subset D_j(t_{m+1})$ 和导出不等式

$$\pi\int_{2e^{30\varepsilon_{t_m}}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}\leqslant\log\log M$$

$$\times\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\}$$

$$-\log\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m),f\}$$

$$+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}. \tag{5.56}$$

(7) 根据上述的讨论，我们看出当$m\geqslant m_{18}$和$2e^{30\varepsilon}t_m\leqslant r\leqslant\frac{1}{4}t_{m+1}$时，若记

$$\sum_{1<j<l_1}\theta_{jm}(r)=\sum_{\substack{1<j<l_1\\s_j=0}}\theta_{jm}(r)+\sum_{\substack{1<j<l_1\\s_j=0\\v=v_j}}\theta_{jmv}(r),$$

则有

$$\sum_{1<j<l_1}\theta_{jm}(r)+\sum_{\substack{1<j<l_1\\s_j\neq 0\\1<v\neq v_j<s_j+1}}\theta_{jmv}(r)\leqslant 2\pi.$$

于是，我们得到

$$(p_1+l_1)^2=\left\{\sum_{\substack{1<j<l_1\\s_j\neq 0\\1<v\neq v_j<s_j+1}}\sqrt{\theta_{jmv}(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_{jmv}(r)}}\right.$$

$$\left.+\sum_{1<j<l_1}\sqrt{\theta_{jm}(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_{jm}(r)}}\right\}^2$$

$$\leqslant 2\pi\left\{\sum_{\substack{1<j<l_1\\s_j\neq 0\\1<v\neq v_j<s_j+1}}\frac{1}{\theta_{jm}(r)}+\sum_{1<j<l_1}\frac{1}{\theta_{jm}(r)}\right\},$$

$$\frac{1}{2}(p_1+l_1)^2\int_{2e^{30\varepsilon}t_m}^{\frac{1}{4}t_{m+1}}\frac{dr}{r}\leqslant\sum_{\substack{1<j<l_1\\s_j\neq 0\\1<v\neq v_j<s_j+1}}$$

$$\pi\int_{2e^{30\varepsilon_{t_m}}}^{\frac{1}{4}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm\nu}(r)}+\sum_{1<j<l_1}\pi\int_{2e^{30\varepsilon_{t_m}}}^{\frac{1}{4}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}.$$

进一步，根据(5.54)—(5.56)式导出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(p_1+l_1)^2\left(\log\frac{t_{m+1}}{t_m}-\log 8e^{30^\varepsilon}\right)\\&\leqslant p_1(\log T(t_{m+1},f)-\log T(t_m,f))+p_1\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}\\&+\sum_{1<j<l_1}\left\{\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\}\right.\\&\left.-\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_m\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_m\right),f\right\}\right\}\\&+l_1\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}.\end{aligned}\tag{5.57}$$

现在，设序列 $R_n(n=1,2,\cdots)$满足下述条件：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_nf)}{\log R_n}=\mu.$$

对于每个充分大的值 n，存在值 m_n，使得

$$t_{m_n-1}\leqslant R_n\leqslant t_{m_n}.\tag{5.58}$$

于是，我们有

$$r_0^{(1+\eta)^{2m_n-2}}=r_{m_n-1}\leqslant t_{m_n-1}\leqslant R_n,$$

$$m_n\leqslant\frac{\log\log R_n-\log\log r_0}{2\log(1+\eta)}+1,\tag{5.59}$$

同时有

$$t_{m_n-1} \geqslant r_0^{(1+\eta)^{2m_n-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} (2r_{m_n}^{1+\eta})^{\frac{1}{(1+\eta)^3}}$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} (t_m)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} \geqslant \left(\frac{1}{2}R_n\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} \tag{5.60}$$

置 $m=m_{18}, m_{18}+1, \cdots, m_n-2$，则根据(5.57)—(5.60)式，我们得到

$$\frac{1}{2}(p_1+l_1)^2\left\{\log\frac{t_{m_n-1}}{t_{m_{18}}} - (m_n-m_{18}-1)\log 8e^{30\varepsilon}\right\}$$

$$\leqslant p_1\{\log T(t_{m_n-1}, f) - \log T(t_{m_{18}}, f)\}$$

$$+\sum_{1<j<l_1}\left\{\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m_n-1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m_n-1}\right), f\right\}\right.$$

$$\left.-\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m_{18}}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m_{18}}\right), f\right\}\right\}$$

$$+(p_1+l_1)(m_n-m_{18}-1)\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0},$$

$$\frac{1}{2}(p_1+l_1)^2\left\{\frac{1}{(1+\eta)^3}\log R_n - \frac{1}{(1+\eta)^2}\log 2\right.$$

$$\left.-\log t_{m_{18}} - \frac{\log\log R_n - \log\log r_0}{2\log(1+\eta)}\log 8e^{30\varepsilon}\right\}$$

$$\leqslant (p_1+l_1)\log T(R_n, f) + l_1\log 3 + (p_1+l_1)$$

$$\times\left(\frac{\log\log R_n - \log\log r_0}{2\log(1+\eta)}+1\right)\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}.$$

用 $\log R_n$ 除不等式两端，然后命 $n\to+\infty$，我们判定

$$\frac{(p_1+l_1)^2}{2(1+\eta)^3}\leqslant(p_1+l_1)\mu,$$

$$(p_1+l_1)\leqslant 2(1+\eta)^3\mu.$$

最后命 $\eta\to 0$，则得

$$p_1+l_1\leqslant 2\mu.$$

但是，这与(5.31)式相矛盾．于是，定理5.6完全得证．

§5.4. 极值长度和 Ahlfors 偏差定理[1]

5.4.1. 极值长度

设 Γ 表示开平面 $|z|<+\infty$ 上的一族曲线．每个 $\gamma\in\Gamma$ 是由可数个开弧，闭弧或闭曲线所组成，同时每个闭子弧都是可求长的．

设 $\rho(z)$ 是定义在全平面 $|z|\leqslant+\infty$ 上的实值函数，如果 $\rho(z)$ $(z=x+iy)$ 满足下述条件：

(1) $\rho(z)\geqslant 0$ 是可测函数，

(2) $A(\rho)=\iint\limits_{|z|<+\infty}\rho^2(z)dxdy\neq 0,\infty$，则称 $\rho(z)$ 是可充许函数．

对于一个可允许函数 $\rho(z)$，如果 $\rho(z)$ 作为 γ 的弧长的函数是可测的，则定义

$$l_\gamma(\rho)=\int_\gamma\rho|dz|.$$

---

1) 本节主要内容引自文[1e, f]．

否则,定义 $L_\gamma(\rho)=+\infty$. 进一步置

$$L(\Gamma,\rho)=\inf_{\gamma\in\Gamma}L_\gamma(\rho)$$

和定义

$$\lambda(\Gamma)=\sup_\rho\frac{L^2(\Gamma,\rho)}{A(\rho)},$$

其中的 ρ 取全体可允许函数. 以后,我们称 $\lambda(\Gamma)$ 为 Γ 的极值长度.

定理5.7 如果每个 $\gamma_2\in\Gamma_2$ 都包含一个 $\gamma_1\in\Gamma_1$, 则有 $\lambda(\Gamma_2)\geqslant\lambda(\Gamma_1)$.

证. 明显地,如果 $\gamma_2\supset\gamma_1$, 则有

$$L_{\gamma_1}(\rho)\leqslant L_{\gamma_2}(\rho),$$

$$L(\Gamma_1,\rho)\leqslant L(\Gamma_2,\rho).$$

于是 $\lambda(\Gamma_1)\leqslant\lambda(\Gamma_2)$.

例 1. 设 R 表示一个长为 $a>0$, 宽为 $b>0$ 的闭矩形, Γ 是在 R 上连接长度为 b 的两个对边的全部弧线集合. 于是对于任何一个可允许函数 ρ, 我们有

$$L(\Gamma,\rho)\leqslant\int_0^a\rho(x+iy)dx,$$

$$bL(\Gamma,\rho)\leqslant\iint_R\rho(x+iy)dxdy,$$

$$b^2L^2(\Gamma,\rho)\leqslant ab\iint_R\rho^2dxdy\leqslant abA(\rho),$$

$$\frac{L^2(\Gamma,\rho)}{A(\rho)}\leqslant\frac{a}{b}.$$

因此，$\lambda(\Gamma) \leqslant \frac{a}{b}$. 另一方面，我们取

$$\rho(z) = \begin{cases} 1 & z \in R, \\ 0 & z \bar{\in} R, \end{cases}$$

则有 $L(\Gamma, \rho) = a$ 和 $A(\rho) = ab$. 因此 $\lambda(\Gamma) \geqslant \frac{a}{b}$. 于是，我们有 $\lambda(\Gamma) = \frac{a}{b}$.

例 2. 设 Γ 是闭圆环 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ 内连接两个圆周 $|z| = r_1$ 和 $|z| = r_2$ 的全部弧线集合. 于是对于任何一个可允许函数 ρ, 我们有

$$L(\Gamma, \rho) \leqslant \int_{r_1}^{r_2} \rho dr,$$

$$2\pi L(\Gamma, \rho) \leqslant \iint \rho dr d\theta,$$

$$4\pi^2 L^2(\Gamma, \rho) \leqslant 2\pi \log \frac{r_2}{r_1} \iint \rho^2 r dr d\theta \leqslant 2\pi \log \frac{r_2}{r_1} A(\rho),$$

$$\frac{L^2(\Gamma, \rho)}{A(\rho)} \leqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

因此

$$\lambda(\Gamma) \leqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

另一方面，我们取 $\rho = \frac{1}{r}$, 则有 $\lambda(\Gamma) \geqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$. 于是，我们有

$$\lambda(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

例 3. 设 G 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个二连通域，C_1 和 C_2 分别是 G 的两个补集的有界和无界分支．如果 G 内的一条闭曲线 γ，相对于 C_1 的点有非零绕数(Winding number)，则称 γ 分离 C_1 和 C_2．记 Γ 是 G 内分离 C_1 和 C_2 的全体闭曲线集合．特别地，当 G 表示圆环 $r_1<|z|<r_2$ 时，对于任何一个可允许函数 ρ，我们有

$$L(\Gamma,\rho)\leqslant\int_0^{2\pi}\rho(re^{i\theta})rd\theta,$$

$$\frac{L(\Gamma,\rho)}{r}\leqslant\int_0^{2\pi}\rho(re^{i\theta})d\theta,$$

$$L(\Gamma,\rho)\log\frac{r_2}{r_1}\leqslant\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\rho(re^{i\theta})d\theta dr,$$

$$L^2(\Gamma,\rho)\left(\log\frac{r_2}{r_1}\right)^2\leqslant 2\pi\log\frac{r_2}{r_1}\iint\rho^2dxdy$$

$$\leqslant 2\pi\log\frac{r_2}{r_1}A(\rho),$$

$$\frac{L^2(\Gamma,\rho)}{A(\rho)}\leqslant\frac{2\pi}{\log\frac{r_2}{r_1}}.$$

于是

$$\lambda(\Gamma)\leqslant\frac{2\pi}{\log\frac{r_2}{r_1}}.$$

另一方面，我们取 $\rho=\dfrac{1}{2\pi r}$，则有

$$A(\rho)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1},$$

以及根据$\gamma\in\Gamma$的绕数

$$n(\gamma,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{dz}{z}\neq 0,$$

我们有

$$1\leqslant\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{dz}{z}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{|dz|}{r}=L_{\gamma}(\rho).$$

特别地，取$\gamma'\in\Gamma$就是圆周$|z|=r, r_1<r<r_2$，则有$L_{\gamma'}(\rho)=1$. 于是$L(\Gamma,\rho)=1$，从而判定

$$\lambda(\Gamma)\geqslant\frac{2\pi}{\log\frac{r_2}{r_1}}.$$

因此，我们有

$$\lambda(\Gamma)=\frac{2\pi}{\log\frac{r_2}{r_1}}.$$

以下，我们证明关于极值长度$\lambda(\Gamma)$的一个最重要性质.

定理5.8 $\lambda(\Gamma)$是保角不变量.

证． 设Γ位在某个区域Ω内，以及$\zeta=\xi+i\eta=\varphi(z)$将$\Omega$共形映照到区域$\Omega'$. 记$\Gamma$的像集合为$\Gamma'$. 对于任意取定的可允许函数$\rho$，我们定义

$$\rho_1(\zeta)=\begin{cases}\rho(\varphi^{-1}(\zeta))\left|\dfrac{d\varphi^{-1}(\zeta)}{d\zeta}\right|, & \zeta\in\Omega',\\ 0, & \zeta\bar{\in}\Omega'.\end{cases}$$

于是

$$\iint_{\Omega} \rho_1^2 d\xi d\eta = \iint_{\Omega} \rho^2 dxdy \leqslant A(\rho) ,$$

$$\int_{\gamma'} \rho_1 |d\zeta| = \int_{\gamma} \rho |dz| ,$$

其中γ'是$\gamma \in \Gamma$的像.因此,我们判定

$$\lambda(\Gamma') \geqslant \lambda(\Gamma) .$$

另一方面,对于一个给定的$\rho_1(\zeta)$,我们借助于定义

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1(\varphi(z)) \left| \dfrac{d\varphi(z)}{dz} \right|, & z \in \Omega, \\ 0 & z \bar{\in} \Omega; \end{cases}$$

可以判定$\lambda(\Gamma) \geqslant \lambda(\Gamma')$.因此,我们有$\lambda(\Gamma) = \lambda(\Gamma')$,即$\lambda(\Gamma)$是保角不变量.

5.4.2. 组合法则和对称原理

设Ω_1和Ω_2是两个不相交的开集合,Γ_1和Γ_2分别是Ω_1和Ω_2内的弧线集合.再设Γ是第三个弧线集合.我们证明下述组合法则:

定理5.9 如果每一个$\gamma \in \Gamma$都包含一个$\gamma_1 \in \Gamma_1$和一个$\gamma_2 \in \Gamma_2$,则有

$$\lambda(\Gamma) \geqslant \lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2) . \tag{5.61}$$

如果每一个$\gamma_1 \in \Gamma_1$和每一个$\gamma_2 \in \Gamma_2$都包含一个$\gamma \in \Gamma$,则有

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} \geqslant \frac{1}{\lambda(\Gamma_1)} + \frac{1}{\lambda(\Gamma_2)} . \tag{5.62}$$

证. 我们无妨假设$\lambda(\Gamma_1)$和$\lambda(\Gamma_2)$均不为零和∞,否

则,(5.61)和(5.62)式是定理5.7的直接推论.

首先证明(5.61)式.一般地,对于任意取定的可允许函数$\rho(z)$和一族曲线$\tilde{\Gamma}$,如果$L(\tilde{\Gamma},\rho)\neq 0,\infty$,我们置

$$\rho'(z)=K\rho(z),K=\frac{L(\tilde{\Gamma},\rho)}{A(\rho)},$$

则有$L(\tilde{\Gamma},\rho')=A(\rho')$.于是,对于任意取定的可允许函数$\rho_1(z)$和$\rho_2(z)$,并且满足条件$L(\Gamma_1,\rho_1)\neq 0,\infty$和$L(\Gamma_2,\rho_2)\neq 0,\infty$,我们置

$$\rho_1'(z)=K_1\rho_1(z),\quad K_1=\frac{L(\Gamma_1,\rho_1)}{A(\rho_1)},$$

$$\rho_2'(z)=K_2\rho_1(z),K_2=\frac{L(\Gamma_2,\rho_2)}{A(\rho_2)},$$

$$\rho'(z)=\max[\rho_1'(z),\rho_2'(z)],$$

则有

$$L(\Gamma,\rho')\geqslant L(\Gamma_1,\rho_1')+L_2(\Gamma_2,\rho_2')=A(\rho_1')+A(\rho_2'),$$

$$A(\rho')\leqslant A(\rho_1')+A(\rho_2'),$$

$$\lambda(\Gamma)\geqslant A(\rho_1')+A(\rho_2')=K_1^2A(\rho_1)+K_2^2A(\rho_2)$$

$$=\frac{L^2(\Gamma_1,\rho_1)}{A(\rho_1)}+\frac{L^2(\Gamma_2,\rho_2)}{A(\rho_2)}.$$

当$L(\Gamma_1,\rho_1)$或$L(\Gamma_2,\rho_2)$等于零或∞时,这个不等式是显然的.于是,根据$\rho_1(z)$和$\rho_2(z)$选取的任意性,我们判定

$$\lambda(\Gamma)\geqslant\lambda(\Gamma_1)+\lambda(\Gamma_2),$$

即(5.61)式成立.

其次证明(5.62)式.我们不妨假设$\lambda(\Gamma)\neq 0$. 对于任意取定的可允许函数，当$L(\Gamma,\rho)>0$时，定义

$$\rho_1(z)=\begin{cases}\rho(z), & z\in\Omega_1\\ 0, & z\bar{\in}\Omega_1,\end{cases}$$

$$\rho_2(z)=\begin{cases}\rho(z), & z\in\Omega_2\\ 0, & z\bar{\in}\Omega_2,\end{cases}$$

则有

$$L(\Gamma,\rho)\leqslant L(\Gamma_1,\rho_1),\quad L(\Gamma,\rho)\leqslant L(\Gamma_2,\rho_2),$$

$$A(\rho)\geqslant A(\rho_1)+A(\rho_2).$$

因此

$$\frac{A(\rho)}{L^2(\Gamma,\rho)}\geqslant\frac{A(\rho_1)}{L^2(\Gamma_1,\rho_1)}\,\frac{A(\rho_2)}{L^2(\Gamma_2,\rho_2)}.$$

当$L(\Gamma,\rho)=0$时，这个不等式是显然的.于是根据$\rho(z)$选取的任意性，我们判定

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)}\geqslant\frac{1}{\lambda(\Gamma_2)}+\frac{1}{\lambda(\Gamma_2)},$$

即 (5.62)式成立.

最后，我们证明一个对称原理.设$\bar{\gamma}$表示γ关于实轴的镜面对称，γ^+ 表示$\gamma\cup\bar{\gamma}$位在上半平面$\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$的部份.明显地有$\gamma\cup\bar{\gamma}=\gamma^+\cup\overline{(\gamma^+)}$. 如果$\Gamma$表示集合$\{\gamma\}$，则$\bar{\Gamma}$和$\Gamma^+$分别表示集合$\{\bar{\gamma}\}$和$\{\gamma^+\}$.

定理 5.10 如果$\bar{\Gamma}=\Gamma$，则有$\lambda(\Gamma)=\dfrac{1}{2}\lambda(\Gamma^+)$.

证. 对于任意取定的可允许函数$\rho(z)$，置

$$\hat{\rho}(z)=\max\{\rho(z),\rho(\bar{z})\},$$

则有

$$L_{\gamma}(\hat{\rho})=L_{\gamma^{+}}(\hat{\rho})\geqslant L_{\gamma^{+}}(\rho)\geqslant L(\Gamma^{+},\rho),$$

$$A(\hat{\rho})\leqslant A(\rho)+A(\bar{\rho})=2A(\rho),$$

$$\frac{L^{2}(\Gamma^{+},\rho)}{A(\rho)}\leqslant 2\frac{L^{2}(\Gamma,\hat{\rho})}{A(\hat{\rho})}\leqslant 2\lambda(\Gamma).$$

于是 $\lambda(\Gamma^{+})\leqslant 2\lambda(\Gamma)$. 另一方面,对于任意给定的可允许函数 $\rho(z)$,置

$$\rho^{+}(z)=\begin{cases}\rho(z)+\rho(\bar{z}), & \operatorname{Im} z\geqslant 0,\\ 0 & \operatorname{Im} z<0,\end{cases}$$

则有

$$L_{\gamma^{+}}(\rho^{+})=L_{\gamma^{+}+\overline{(\gamma^{+})}}(\rho)=L_{\gamma+\bar{\gamma}}(\rho)$$

$$=L_{\gamma}(\rho)+L_{\bar{\gamma}}(\rho)\geqslant 2L(\Gamma,\rho),$$

$$A(\rho^{+})\leqslant 2\iint\limits_{|z|<+\infty}(\rho^{2}+\bar{\rho}^{2})dxdy=2A(\rho).$$

于是

$$\frac{L^{2}(\Gamma,\rho)}{A(\rho)}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{L^{2}_{\gamma^{+}}(\rho^{+})}{A(\rho^{+})}\leqslant\frac{1}{2}\lambda(\Gamma^{+}),$$

$$\lambda(\Gamma)\leqslant\frac{1}{2}\lambda(\Gamma^{+}).$$

因此,我们有 $\lambda(\Gamma)=\dfrac{1}{2}\lambda(\Gamma^{+})$,即定理 5.10 得证.

5.4.3. 两个极值问题

设 Ω 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个域, E_1 和 E_2 是位在 Ω 补集上的两个集合，并且它们与 Ω 的边界均相交于非空集合. 再设 Γ 是 Ω 内连接 E_1 和 E_2 的连通弧线集合，即每个 $\gamma\in\Gamma$ 除去两个端点外均位在 Ω 内，同时 γ 的两个端点分别位在 E_1 和 E_2 上. 以后，我们称 $\lambda(\Gamma)$ 为 E_1 和 E_2 的极值距离，并且记为 $d_\Omega(E_1, E_2)$.

设 G 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个二连通域, C_1 和 C_2 分别是 G 的两个补集的有界和无界分支. 再设 Γ 是 G 内分离 C_1 和 C_2 的全体闭曲线集合. 以后，我们称 $\lambda^{-1}(\Gamma)$ 为 G 的模，并且记为 $M(G)$. 如果将 G 共形映照到圆环，则根据例2 和例3，我们判定 $M(G)=d_\Omega(C_1,C_2)$. 以下，我们寻求 $M(G)$ 的最大值，如果下述条件之一被满足：

(1) C_1 是单位圆 $|z|\leqslant 1$ 和 C_2 包含点 $z=R>1$.

(2) C_1 包含圆点 $z=0$ 和点 $z=-1$, 同时 C_2 包含点 $z=P>0$.

H. Grötzoch 证明了下述结果：

定理5.11 设二连通域 G_0 的补集是单位圆 $|z|\leqslant 1$ 和直线段 $[R,+\infty]$, 则当 G 满足条件(1)时，有

$$M(G)\leqslant M(G_0)=M(G_0,R).$$

证. 设 Γ 是位在 G 内分离 C_1 和 C_2 的闭曲线集合, $\lambda(\Gamma)=M(G)^{-1}$. 再设 $\tilde{\Gamma}$ 是位在 $C_1\bigcup\{R\}$ 的补集内的闭曲线集合，并且每个 $\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}$ 相对于点 $z=R$ 有零绕数，同时对于原点 $z=0$ 有非零绕数. 明显地, $\Gamma\subset\tilde{\Gamma}$, 所以 $\lambda(\Gamma)\geqslant\lambda(\tilde{\Gamma})$. 注意到集合 $\tilde{\Gamma}$ 是对称的，所以根据定理5.10, 我们判定 $\lambda(\tilde{\Gamma})=\dfrac{1}{2}\lambda(\tilde{\Gamma}^+)$. 类似地，设 Γ_0 是位在 G_0 内分离单位圆 $|z|\leqslant 1$ 和直线段 $[R,+\infty)$ 的闭曲线集合. 根据 G_0 的对称性，我们有 $\lambda(\Gamma_0)=\dfrac{1}{2}(\Gamma_0{}^+)$.

以下，我们证明 $\tilde{\Gamma}^+=\Gamma_0{}^+$ 事实上，每个 $\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}$ 必定分别与直线

段$(-\infty,1)$和$(1,R)$交于P_1点和P_2点，于是点P_1和P_2分$\tilde{\gamma}$为两部分$\tilde{\gamma}_1$和$\tilde{\gamma}_2$，即$\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2$. 注意到$\tilde{\gamma}^+=\tilde{\gamma}_1{}^++\tilde{\gamma}_2{}^+=(\tilde{\gamma}_1+\overline{\tilde{\gamma}_2{}^+})^+$，以及$\tilde{\gamma}_1+\overline{\tilde{\gamma}_2{}^+}\in\Gamma_0$，所以我们判定$\tilde{\gamma}^+\in\Gamma_0{}^+$，即$\tilde{\Gamma}^+\subset\Gamma_0{}^+$. 另一方面，$\Gamma_0{}^+\subset\tilde{\Gamma}^+$是显然的. 于是$\tilde{\Gamma}^+=\Gamma_0{}^+$. 因此，我们判定$\lambda(\Gamma)\geqslant\lambda(\tilde{\Gamma})=\lambda(\Gamma_0)$，即有$M(G)\leqslant M(G_0)=M(G_0R)$.

O. Teichmüller 证明了下述结果：

定理5.12 设二连通域G_1的补集是两个直线段$[-1,0]$和$[P,+\infty]$，则当G满足条件(2)时，有

$$M(G)\leqslant M(G_1)=M(G_1P).$$

证. 设$z=f(\zeta)$共形映照单位圆$|\zeta|<1$到$C_1\bigcup G$，并且$f(0)=0$. 记C_1的原像为C_1'. 根据Koebe$\frac{1}{4}$覆盖定理，我们判定$|f'(0)|\leqslant 4P$. 进一步设C_1'上的点α有$f(\alpha)=-1$，根据偏差定理，我们有

$$1=|f(\alpha)|\leqslant\frac{|\alpha|\,|f'(0)|}{(1-|\alpha|)^2}\leqslant\frac{4P|\alpha|}{(1-|\alpha|)^2}.$$

另一方面，Koebe函数$z=f_1(\zeta)=\dfrac{\zeta}{(1+\zeta)^2}$共形映照单位圆$|\zeta|<1$到直线段$[\frac{1}{4},+\infty]$的补集. 于是$F(\zeta)=4Pf_1(\zeta)$共形映照单位圆$|\zeta|<1$到$G_1\bigcup[-1,0]$，明显地，$z$平面上的直线段$[-1,0]$的原像为$\zeta$平面上的直线段$[\alpha_1,0]$，并且$\alpha_1<0$和$F(\alpha_1)=-1$. 于是

$$1=|\mathrm{F}(\alpha_1)|=\frac{4P|\alpha_1|}{(1-|\alpha|)^2}.$$

因为$\dfrac{t}{(1-t)^2}$是t的递增函数，所以有$|\alpha_1|<|\alpha|$.

借助于共形映照$z=\frac{1}{\zeta}$和定理5.11,我们可以判定$M(G)\leqslant M\left(G_0\frac{1}{|\alpha|}\right)$,以及$M(G_1,P)=M\left(G_0,\frac{1}{|\alpha_1|}\right)$.再根据$\frac{1}{|\alpha|}\leqslant\frac{1}{|\alpha_1|}$,我们得到$M\left(G_0,\frac{1}{|\alpha|}\right)\leqslant M\left(G_0,\frac{1}{|\alpha_1|}\right)$.于是$M(G)\leqslant M(G,P)$,即定理5.12得证.

简记$M(G_1P)=\Lambda(P)=\Lambda$.以下,我们对$\Lambda(P)$进行估计.

设ω_1和ω_2是两个有穷复数,并且$\text{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1}>0$,则函数

$$W=\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left\{\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right\},\omega=m\omega_1+n\omega_2,$$

$$m,n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots \tag{5.63}$$

称为 Weierstrass 函数.明显地,$\wp(z)$是双周期亚纯函数,$P(z)=\wp(-z)$,以及$\wp(z)$的极点$z=\omega$都是二级的.于是$\wp(z)$在周期平行四边形内取每个复数为二次.进一步,我们有

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum_{\omega\neq 0}\frac{2}{(z-\omega)^3},$$

$$\wp'(z)=-\wp'(-z),\wp'(z+\omega)=\wp(z).$$

特别地,我们有

$$\wp'\left(\frac{\omega}{2}\right)=-\wp'\left(-\frac{\omega}{2}\right)=-\wp'\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

于是,我们判定$\wp'\left(\frac{\omega}{2}\right)=0$.因此,若记$e_1=\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$,$e_2=\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$和$e_3=\wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$,则$e_1$、$e_2$, e_3均为$\wp(z)$的二级重值,并且是相

可判别的.

现在，我们特别地取 $\omega_1 = 1$ 和 $\omega_2 = 2i\Lambda$，则根据 (5.63) 式，当 $x = 0$ 或 $\frac{1}{2}$ 时，以及 $y = 0$ 或 Λ 时，$w = \wp(z)$ 均取实值，因此 e_1, e_2 和 e_3 均位在 w 平面的实轴上，并且 $w = \wp(z)$ 映射以 $z = 0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ 为顶点的矩形边界为整个实轴．进一步根据 $\wp(z) = \wp(-z)$，我们可以判定 $w = \wp(z)$ 在该矩形内是单叶共形映照．如果考察 $w = \wp(z)$ 在原点 $z = 0$ 的邻域内的变换情况，则可以判定 $w = \wp(z)$ 将该矩形内部共形映照到下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$，同时根据映射保持方向的性质，必有 $e_2 < e_3 < e_1$．于是 w 平面上的直线段 $[e_1 + \infty]$ 和 $[e_2, e_3]$ 分别对应于 z 平面上的直线段：$y = 0$，$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 和 $y = \Lambda(P)$，$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$．如果我们继续作一个分式线性变换 $\zeta = \frac{w - e_3}{e_3 - e_2}$，则下半平面 $\operatorname{Im} w < 0$ 变为下半平面 $\operatorname{Im}\zeta < 0$，同时 w 平面上的直线段 $[e_1, +\infty]$ 和 $[e_2, e_3]$ 分别变为 ζ 平面上的直线段 $[P, +\infty]$ 和 $[-1, 0]$，其中

$$P = \frac{e_1 - e_3}{e_3 - e_2},$$

注意到两个直线段 $[P, +\infty]$ 和 $[-1, 0]$，的补集恰恰是 Teichmüller 极值域 G_1，并且这两个直线段间相对于 G_1 的极值距离恰恰是 $\Lambda(P)$，我们判定 $M(G_1 P) = \Lambda(P)$.

以下，我们寻求 $\Lambda(P)$ 与 P 之间的关系式．一般地，我们考虑函数

$$\frac{\wp(z) - \wp(u)}{\wp(z) - \wp(v)},$$

则 $z = \pm u + m\omega_1 + n\omega_2$ 和 $z = \pm v + m\omega_1 + n\omega_2$ 分别是这个函数

的零点和极点.然后,我们构造一个函数

$$F(z)=\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\left(1-e^{2\pi i\frac{n\omega_2+u-z}{\omega_1}}\right)\left(1-e^{2\pi i\frac{n\omega_2-u-z}{\omega_1}}\right)}{\left(1-e^{2\pi i\frac{n\omega_2+v-z}{\omega_1}}\right)\left(1-e^{2\pi i\frac{n\omega_2-v-z}{\omega_1}}\right)}.$$

容易验证这个无穷乘积是收敛的.取 $\omega_1=1,\omega_2=2i\Lambda(P)$ 和记 $q=e^{-2\pi\Lambda}<1$, 并且将第 n 项因子同 $-n$ 项因子相结合,我们得到

$$F(z)=\frac{\left(1-e^{2\pi i(u-z)}\right)\left(1-e^{-2\pi i(u+z)}\right)}{\left(1-e^{2\pi i(v-z)}\right)\left(1-e^{-2\pi i(v+z)}\right)}$$

$$\times\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{2\pi i(u+z)}\right)\left(1-q^{2n}e^{2\pi i(u-z)}\right)}{\left(1-q^{2n}e^{2\pi i(v+z)}\right)\left(1-q^{2n}e^{2\pi i(v-z)}\right)}$$

$$\times\frac{\left(1-q^{2n}e^{-2\pi i(u-z)}\right)}{\left(1-q^{2n}e^{-2\pi i(v-z)}\right)}\cdot\frac{\left(1-q^{2n}e^{-2\pi i(u+z)}\right)}{\left(1-q^{2n}e^{-2\pi i(v+z)}\right)}.$$

明显地,$F(z)$ 与 $\dfrac{\wp(z)-\wp(u)}{\wp(z)-\wp(v)}$ 有相同的零点,极点和相同的周期.于是

$$\frac{\wp(z)-\wp(u)}{\wp(z)-\wp(v)}=\frac{F(z)}{F(0)},$$

如果取 $u=\dfrac{\omega_1}{2}=\dfrac{1}{2}, v=\dfrac{\omega_2}{2}=i\Lambda$ 和 $z=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}=\dfrac{1}{2}+i\Lambda$, 则判定

$$P=\frac{e_1-e_3}{e_3-e_2}=-\frac{F(z)}{F(0)}.$$

注意到

$$e^{2\pi iz}=-q,\quad e^{2\pi iu}=-1,\quad e^{2\pi iv}=q,$$

我们有

$$F(z)=\frac{1-q^{-1}}{1+1}\cdot\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-2}}$$

$$\times\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-q^{2n+1})^2(1-q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n+2})(1+q^{2n})^2(1+q^{2n-2})}$$

$$=\frac{1}{4}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^4,$$

$$F(0)=\frac{1+1}{1-q}\cdot\frac{1+1}{1-q^{-1}}$$

$$\times\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+q^{2n})^4}{(1-q^{2n+1})^2(1-q^{2n-1})^2}$$

$$=-4q\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^4.$$

于是

$$P=-\frac{F(z)}{F(0)}=\frac{1}{16q}\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^8. \tag{5.64}$$

类似地，如果取 $u=\frac{\omega_1}{2}=\frac{1}{2}$, $v=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\frac{1}{2}+i\Lambda$, $z=\frac{\omega_2}{2}=i\Lambda$，则可以判定

$$P+1=\frac{e_2-e_1}{e_2-e_3}=\frac{1}{16q}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^8. \tag{5.65}$$

于是，(5.64)和(5.65)式给出下述估计：

$$16P\leqslant e^{2\pi\Lambda(P)}\leqslant 16(P+1). \tag{5.66}$$

5.4.4. Ahlfors 偏差定理

设 Ω 是开平面 $|z| < +\infty$ 上的一个曲边带形域，并且 Ω 沿着两个方向都伸展到 ∞. 记 Ω 的上边界为 B_1, 下边界为 B_2. 再设 E_1 和 E_2 分别是直线 $x = a$ 和 $x = b(a < b)$ 上两个连接 B_1 和 B_2 的直线段. 于是, E_1 和 E_2 以及 B_1 和 B_2 位在 E_1 和 E_2 间的部分界围一个区域 $\Omega_{12} \subset \Omega$. 另外，我们用 $\theta(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ 表示直线 $x = t$ 位在 Ω 内部份的长度. 在 B_1 和 B_2 满足相当广泛的条件下，可以证明 $\theta(t)$ 是一个下半连续函数，因而 $\dfrac{1}{\theta(t)}$ 是可测函数.

我们共形映照 Ω 到一个宽度为1的水平带形域 Ω', 并且 B_1 和 B_2 分别对应于水平直线 $B'_1: y = 0$ 和 $B'_2: y = 1$, 以及 Ω_{12} 对应于 Ω'_{12}, E_1 和 E_2 分别对应于 E'_1 和 E'_2.

我们取

$$\rho(z) = \rho(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta(x)}, & z \in \Omega \bigcap (a < \operatorname{Re} z < b), \\ 0, & z \bar{\in} \Omega \bigcap (a < \operatorname{Re} z < b), \end{cases}$$

则对于任何一条位在 Ω_{12} 内连接 E_1 和 E_2 的弧线 γ 有

$$\int_\gamma \rho(z)\,|dz| \geqslant \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)},$$

同时有

$$A(\rho) = \iint \rho^2 dxdy = \int_a^b \frac{1}{\theta(x)} dx.$$

于是

$$\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} \leqslant d_{\Omega_{12}}(E_1, E_2) = d_{\Omega'_{12}}(E'_1, E'_2).$$

置

$$d = \max_{z \in E_1'} \{ x \}, \quad \beta = \min_{z \in E_2'} \{ x \}.$$

我们对区域 Ω' 作关于实轴的镜面对称，则 Ω'，整个实轴和 Ω' 的镜面对称构成一个区域 $\hat{\Omega}$. 相应地记为$\hat{\Omega}_{12}$, $\hat{E}_1$ 和 $\hat{E}_2$. 明显地，它们关于实轴都是对称的．于是根据定理 5. 10, 我们有

$$d_{\hat{\Omega}_{12}}(\hat{E}_1, \hat{E}_2) = \frac{1}{2} d_{\Omega'_{12}}(E_1', E_2').$$

其次，我们借助于 $e^{\pi z}$ 将 $\hat{\Omega}$ 映为整个平面，$\hat{E}_1$ 和 $\hat{E}_2$ 分别映为 $\hat{E}_1'$ 和 $\hat{E}_2'$. 明显地，$\hat{E}_1'$ 和 $\hat{E}_2'$ 都是闭曲线，从而界囿一个二连通区域 $\hat{\Omega}'_{12}$. 于是 $\hat{\Omega}'_{12}$ 对应于 $\hat{\Omega}_{12}$, 即有

$$d_{\hat{\Omega}_{12}}(\hat{E}_1, \hat{E}_2) = d_{\hat{\Omega}'_{12}}(\hat{E}_1', \hat{E}_2').$$

注意到 $\hat{E}_1'$ 界囿的有界域中包含原点和 $\hat{E}_1'$ 通过一个相距原点为 $e^{\alpha\pi}$ 的点，同时 $\hat{E}_2'$ 分离 $\hat{E}_1'$ 和 ∞, 以及 $\hat{E}_2'$ 通过一个相距原点为 $e^{\beta\pi}$ 的点，我们根据定理 5. 12，可以判定

$$d_{\hat{\Omega}'_{12}}(\hat{E}_1', \hat{E}_2') \leqslant M(G_1 e^{\pi(\beta-\alpha)}) = \Lambda(e^{\pi(\beta-\alpha)}) .$$

于是，我们证明了下述结果：

定理 5. 13 我们有

$$\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} \leqslant 2\Lambda(e^{\pi(\beta-\alpha)}) .$$

现在，我们利用 (5. 66) 式给出一个十分有用的形式：

系． 如果 $\int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} \geqslant 2$, 则有

$$\beta - \alpha \geqslant \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)} - \frac{1}{\pi} \log 32 . \tag{5. 67}$$

事实上，在(5.66)式中，如果取 $P=1$，则有

$$e^{2\pi\Lambda(1)}\leqslant 32\,,$$

$$\Lambda(1)\leqslant\frac{1}{2\pi}\log 32=\frac{1}{2\pi}\log 2+\frac{2}{\pi}\log 2\leqslant\frac{5}{2\pi}<1\,.$$

另一方面，如果 $\int_a^b\frac{dx}{\theta(x)}\geqslant 2$，则根据定理 5.13 有

$$\Lambda(e^{\pi(\beta-\alpha)})\geqslant 1\,.$$

于是我们判定 $e^{\pi(\beta-\alpha)}\geqslant 1$. 因此，当在(5.66)式中取 $P=e^{\pi(\beta-\alpha)}$ 时，有

$$2\Lambda(e^{\pi(\beta-\alpha)})\leqslant\frac{1}{\pi}\log\{32e^{\pi(\beta-\alpha)}\}=\beta-\alpha+\frac{1}{\pi}\log 32\,.$$

再根据定理 5.13，我们判定(5.67)式成立.

§5.5. 零点分布在有穷条半直线上的整函数类[43j]

定理5.14 设 $f(z)$ 是（开平面 $|z|<+\infty$ 上的）一个整函数，$\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi)$ 是 z 平面上的 q 条半直线，并且对任意取定的数 $\varepsilon>0$，有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ n\{\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=0\}}{\log r}$$

$$=0,\quad \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi\,. \tag{5.68}$$

记 $f(z)$ 的判别有穷渐近值个数为 l，有穷非零亏值个数为 p，其中 l' 个亏值同时是渐近值. 如果 $q<+\infty$，则有

$$p-l'+l\leqslant 2\mu\,,$$

其中μ是$f(z)$的下级.

证. 当$\mu=+\infty$时,定理5.14成立是显然的,于是,我们只须考虑$\mu<+\infty$时的情况.另一方面,当$p-l'=0$时,根据定理4.7,我们判定定理5.14成立.于是,我们只须考虑$p-l'\geqslant 1$时的情况.当$\mu<+\infty$和$p-l'\geqslant 1$时,根据定理3.6,我们判定$f(z)$的级$\lambda<+\infty$,同时根据定理4.4的系有$\mu\geqslant\frac{1}{2}$.

以下,我们只须证明当$\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant\lambda<+\infty$和$p-l'\geqslant 1$时,定理5.14成立.事实上,如果不然,则存在整数p_1, $1\leqslant p_1\leqslant p-l'$, $p_1<+\infty$和整数l_1, $0\leqslant l_1\leqslant l$, $l_1<+\infty$使得

$$p_1+l_1\geqslant[2\mu]+1. \tag{5.69}$$

(1) 我们选取p_1个$f(z)$的非渐近值的有穷非零亏值$a_i(i=1,2,\cdots,p_1)$,其相应亏量$\delta(a_i,f)=\delta_i>0$,以及l_1个$f(z)$的判别有穷渐近值$b_j(j=1,2,\cdots,l_1)$,其相应的定值路径为L_j.不失一般性,我们可以假设$L_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$是一条始自原点趋于$\infty$的简单连续曲线,同时在圆$|z|\leqslant 2$内部份为直线段,并且$l_1$条曲线$L_j(j=1,2,\cdots,l_1)$除原点外彼此无交点,$L_j$和$L_{j+1}(1\leqslant j\leqslant l_1, L_{l_1+1}\equiv L_1)$是相邻的,界围一个单连通域$D_j$.置

$$M_0=\sup_{z\in\bigcup_{j=1}^{l_1}L_j}|f(z)|<+\infty, \tag{5.70}$$

$$M_1=\max\{1,|a_1|,\cdots,|a_{p_1}|,|b_1|,\cdots,|b_{l_1}|\}, \tag{5.71}$$

$$M_2=\min\{1,|a_i|,|a_i-a_{i'}|,|b_j-b_{j'}||a_i-b_j|$$

$$1\leqslant i\neq i'\leqslant p_1;\quad 1\leqslant j\neq j'\leqslant l_1 \text{ 和 } b_j\neq b_{j'}\} \tag{5.72}$$

根据定理4.3,我们判定在$D_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$内存在一条伸展到$\infty$的连续

曲线 Γ_j, 使得

$$\varlimsup_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Gamma_j}} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{5.73}$$

于是，我们可以在 $\Gamma_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 上选取一点 z_j', 使得 $|f(z_j')|\geqslant M_0$. 置

$$r_0'=\max\{|z_1'|,\cdots,|z_{l_1}'|\}.$$

当 $r>r_0'$ 时，记 $D_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 位在圆 $|z|<r$ 内且含有点 z_j' 的连通分支为 $\Omega_j(r)$ 和注意到

$$M\{\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r),f\}=\max_{z\in\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r)}|f(z)|,$$
$$j=1,2,\cdots,l_1,$$

则 $M\{\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r),f\}$ 是 $r(r>r_0')$ 的单调递增函数.并且根据(5.73)式有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log M\{\overline{\Omega}_j(r)\cap(|z|=r),f\}}{\log r}\geqslant\frac{1}{2}. \tag{5.74}$$

另一方面，我们在 $D_j\cap(|z|=1)(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 上取一点 z_j''. 然后根据连通性，在 $D_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 内存在一条连接点 z_j' 和 z_j'' 的连续曲线 L_j'. 我们再取值 r_0'', $r_0''>r_0'$ 使得 l_1 条曲线 $L_j'(j=1,2,\cdots,l_1)$ 均位在圆 $|z|\leqslant r_0''$ 内.于是，当 $r>r_0''$ 时，$D_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 位在圆 $|z|<r$ 内且含有点 z_j'' 的连通分支即是 $\Omega_j(r)$. 记 $L_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 介于原点 $z=0$ 和它与圆周 $|z|=r$ 的第一个交点间的部分为 $L_j(r)$, 则 $L_j(r)$ 和 $L_{j+1}(r)$ 在圆 $|z|<r$ 内界囿一个单连通域 $D_j(r)$. 明显地，当 $r\geqslant r_0''$ 时，有 $\Omega_j(r)\subset D_j(r)(j=1,2,\cdots,l_1)$.

(2) 置 $F(z)=f(z)-a_1$, 则根据(3.28)式，存在一个依赖于 $\delta(a_1f)$ 和 $\delta(\infty,f)$ 的正数 $\alpha=\alpha\{\delta(a_1f),\delta(\infty,f)\}>0$, 使得

$$\varliminf_{R\to+\infty}\frac{RT'(R,F)}{T(R,F)}\geqslant\alpha, \tag{5.75}$$

再置

$$\omega = \min_{1<k<q}\{\theta_{k+1}-\theta_k\},\ \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi\ ,$$

$$\delta = \min_{1<i<p_1}\{\delta_i\}\ .$$

任意取定一个数η,

$$0<\eta<\min\left\{\frac{\alpha\omega}{8\times 32\pi},\ \frac{\omega}{2\times 31\times 19\pi+36\pi}\right\}$$

和数r_0, $r_0>r_0''$, 然后我们构造序列$r_n=r_0^{(1+\eta)^{2m}}$, $m=1, 2, \cdots$. 根据定理2.4和引理3.9(置其中的$\sigma=\log 2$), 存在整数m_0, $m_0\geqslant 2$使得当$r\geqslant r_{m_0}$时, 有

$$T(r, f)\leqslant r^{\lambda+\eta},\ \log M(r, f)\leqslant r^{\lambda+\eta}\ , \tag{5.76}$$

$$T(r, f)\geqslant r^{\mu-\eta}\ . \tag{5.77}$$

以及当$m\geqslant m_0$时, 在区间$[r_n, 2r_n^{1+\eta}]$中存在值t_m, 使得集合

$$E_i(t_m)=E\left\{\theta\middle|\log\frac{1}{|f(t_me^{i\theta})-a_i|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(t_{m_1}f)0\leqslant\theta<2\pi\right\}$$

$$(i=1, \cdots, p_1)$$

的测度

$$\text{mes}\,E_i(t_m)\geqslant K=K(\delta, \lambda, p_1, \eta)>0\ .$$

最后, 我们再取定一个数ε,

$$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{K}{12q},\ \frac{\omega}{40}\right\}$$

和置 $\overline{\Omega}=\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon)$，则根据(5.68)式有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\{\overline{\Omega}\cap(|z|<r),f=0\}}{\log r}=0.$$

(3)当 $m\geqslant m_0$ 时，根据 ε 的选取，对每一个值 $i(1\leqslant i\leqslant p_1)$，在 q 个集合 $E_i(t_m)\cap[\theta_k+3\varepsilon,\theta_{k+1}-3\varepsilon]$ $(k=1,2,\cdots,q)$ 中至少存在一个集合 $E_i(t_m)\cap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\theta_{k_i+1}-3\varepsilon]$ $(1\leqslant k_i\leqslant q)$，使得

$$\operatorname{mes}\{E_i(t_m)\cap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}.$$

再根据(5.77)式和 η 的选取，应用引理 3.14，置其中的 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k_i+1}-\theta_{k_i})-\varepsilon$，$\lambda'=0$，$R_{n1}=t_{m-1}$，$R_n=t_m$，$R_{n2}=t_{m+1}$，$E_n=E\{tme^{i\varphi}\mid\varphi\in E_i(t_m)\cap[\theta_{k_i}+3\varepsilon,\theta_{k_i+1}-3\varepsilon]\}$，$\alpha=\frac{K}{2q}$，$a=a_i$，$N_n=\frac{\delta}{4}T(t_m,f)$，$\eta_0=\eta$，则存在值 m_1，$m_1\geqslant m_0$ 使得当 $m\geqslant m_1$，$z\in\overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$ 时，有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant -At_m^{-(\frac{31\times24\pi}{\omega}+1)\eta}T(t_m,f),\qquad(5.78)$$

其中 $A>0$ 是与 m 无关的常数. 置

$$\varepsilon_m'=e^{-At_m^{-(\frac{31\times24\pi}{\omega}+1)\eta}T(t_m,f)},\qquad(5.79)$$

则存在值 m_2，$m_2\geqslant m_1$ 使得 $m\geqslant m_2$ 时，有

$$\varepsilon_m'<\frac{1}{4}M_2<1.\qquad(5.80)$$

于是，p_1 个集合 $\overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$ $(i=1,2,\cdots,p_1)$ 是相互判别的. 进一步，如果再次应用引理 3.14，特别地置其中的 R_{n1}

$=t_m^{1-\eta 2}$, $R_n=t_m$, $R_{n2}=t_m^{1+\eta 2}$, 则当 $m\geq m_1$ 和 $z\in\overline{\Omega}(\theta_{k_i}+2\varepsilon,\theta_{k_i+1}-2\varepsilon;t_m^{1-\eta 2},t_m^{1+\eta 2})$时,有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant -At_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta 2}T(t_m,f)\ ,\tag{5.81}$$

其中 $A>0$ 是与 m 无关的常数.明显地有

$$\varepsilon_m'\geqslant e^{-At_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2}T(t_m,f)}$$

记 $L_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 介于它与圆周 $|z|=t_{m-1}$ 的最后一个交点与圆周 $|z|=t_{m+1}$ 的第一个交点间的部分为 L_{jm}, l_1 条曲线 L_{jm} $(j=1,2,\cdots,l_1)$ 分割圆环 $C_m:t_{m-1}\leqslant|z|\leqslant t_{m+1}$ 为 l_1 个区域 D_{jm} $(j=1,2,\cdots,l_1)$, 并且 L_{jm} 和 L_{j+1m} 是 D_{jm} 的边界部分.置

$$\varepsilon_m''=\max_{1<j<l_1}\left\{\sup_{z\in L_j\cap C_m}|f(z)-b_j|\right\}\ ,\tag{5.82}$$

则当 $m\to+\infty$ 时,有 $\varepsilon_m''\to 0$. 于是,存在值 m_3, $m_3\geqslant m_2$ 使得当 $m\geqslant m_3$ 时,有

$$\varepsilon_m'<\frac{1}{4}M_2<1\ .\tag{5.83}$$

因此,直线段 $\Delta\left(\frac{\theta_{k_i}+\theta_{k_i+1}}{2};t_{m-1},t_{m+1}\right)$ 或者整个地位在 $D_{jm}(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 内,或者与 D_{jm} 无交.设 $S_j(0\leqslant s_j\leqslant p_1)$ 个 $\Delta\left(\frac{\theta_{k_i}+\theta_{k_i+1}}{2};t_{m-1},t_{m+1}\right)(i=1,2,\cdots,s_j)$ 位在 D_{jm} 内,则 D_{jm} 被分割为 s_j+1 个区域 $D_{jmv}(1\leqslant v\leqslant s_j+1)$. 我们假设 L_{jm} 是 D_{jm1} 的边界部份和 L_{j+1m} 是 D_{jms_j+1} 的边界部分.明显地有 $\sum\limits_{j=1}^{l_1}s_j=p_1$.

(4) 设 $s_j\neq 0(1\leqslant j\leqslant l_1)$. 当 $1<v<s_j+1$ 时,我们记 $D'_{jmv}\equiv D_{jmv}\cap(t_m^{1-\eta 2}<|z|<t_m^{1+\eta 2})$; 当 $v=s_j+1$ 时,我们记 D'_{jms_j+1} 为由 L_{j+1m},

$\Delta\left(\frac{\theta_{ks_j}+\theta_{ks_j+1}}{2};t_{m-1},t_{m+1}\right)$和两个圆周$|z|=t_m^{1-\eta 2}$，$|z|=t_m^{1+\eta 2}$界围的一个位在$D_{jms_j+1}$内的区域；当$v=1$时，我们记$D'_{jm1}$为由$L_{jm}$，$\Delta\left(\frac{\theta_{k_1}+\theta_{k_1+1}}{2};t_{m-1},t_{m+1}\right)$和两个圆周$|z|=t_m^{1-\eta 2}$，$|z|=t_m^{1+\eta 2}$界围的一个位在$D_{jm1}$内的区域．以下，我们证明当$m$充分大时，在$D'_{jmv}(1\leqslant v\leqslant s_j+1)$内存在一个点$z_{jmv}$和一个与$m$无关的常数$A>0$，使得

$$\log|f(z_{jmv})|\geqslant At_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta 2}T(t_m,f).$$

事实上，我们只须考虑一种典型情况，即对区域D'_{jms_j+1}进行证明．首先注意到L_{j+1m}是D_{jms_j+1}的边界部分，其次设$\Delta\left(\frac{\theta_k+\theta_{k+1}}{2};t_{m-1},t_{m+1}\right)(1\leqslant k\leqslant q)$是$D_{jms_j+1}$的另一边界部分．当$m\geqslant m_3$和$z\in\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;t_{m-1},t_{m+1})$时，根据(5.78)式有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant\log\varepsilon'_m=-At_m^{-\left(\frac{31\times 24\pi}{\omega}+1\right)\eta}T(t_m,f)\qquad(1\leqslant i\leqslant p_1),$$

其中$A>0$是与m无关的常数．当$m\geqslant m_3$和$z\in\overline{\Omega}(\theta_k+3\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;t_m^{1-\eta 2},t_m^{1+\eta 2})$时，根据(5.81)式有

$$\log|f(z)-a_i|\leqslant -At_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta 2}T(t_m,f)\qquad(1\leqslant i\leqslant p_1),\tag{5.84}$$

其中$A>0$是与m无关的常数．

1)我们沿着两个方向分别延长$\Delta\left(\frac{\theta_k+\theta_{k+1}}{2},t_{m-1},t_{m+1}\right)$和$L_{j+1m}$，使得如此得到的两条简单曲线$B_1$和$B_2$均始自原点$z=0$，伸展到$\infty$，并且除去原点$z=0$外，$B_1$和$B_2$彼此在开平面$|z|<+\infty$

上再无交点．于是 B_1 和 B_2 界围一个单连通区域 $D \supset D_{jms_j+1}$. 我们取值 t, 使得圆周 $|z|=t$ 与 $\bar{D}_{jms_j+1}$ 相交．然后自圆周 $|z|=t$ 与 $\Delta\left(\dfrac{\theta_k+\theta_{k+1}}{2};t_{m-1},t_{m+1}\right)$ 的交点始，沿着圆周 $|z|=t$ 按照反时针方向绕行遇到 L_{j+1m} 时止，我们记这段圆弧为 $l_z(t)$. 作变换 $\zeta=\sigma+i\tau=\log z$, 则 D 被共形映照为 ζ 平面上的曲边带形域 D_ζ, 并且 B_1 映为 D_ζ 的下边界 B_1' 和 B_2 映为 D_ζ 的上边界 B_2'. 我们记 $l_z(t)$ 的像为 $l_\zeta(\sigma)$ $(\sigma=\log t)$. 进一步，作变换 $w=u+iv=W(\zeta)$, 将 D_ζ 共形映照为 w 平面上的水平带形域 D_w, 并且 B_1' 映为直线 $B_1'':v=0$ 和 B_2' 映为直线 $B_2'':v=1$. 我们记 $l_\zeta(\sigma)$ 的像为 $l_w(\sigma)$. 置

$$u^*(\sigma)=\max_{\zeta\in l_\omega(\sigma)} u(\zeta), \quad u_*(\sigma)=\min_{\zeta\in l_\omega(\sigma)} u(\zeta),$$

然后应用定理 5.13 的系，我们判定

$$u_*(\log t_m+2\pi+\log 34)-u^*(\log t_m-2\pi-\log 34)$$

$$\geqslant \int_{\log t_m-2\pi-\log 34}^{\log t_m+2\pi+\log 34}\frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}-\frac{1}{\pi}\log 32 .$$

如果注意到 $f(z)$ 的连续性，则不改变渐近值，我们总可以适当变形 B_2', 以保证 $\theta(\sigma)$ 是下半连续函数，即保证 $\dfrac{1}{\theta(\sigma)}$ 是可测函数．进一步，注意到 $\theta(\sigma)\leqslant 2\pi$, 我们有

$$u_*(\log t_m+2\pi+\log 34)-u^*(\log t_m-2\pi-\log 34)$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\{4\pi+2\log 34\}-\frac{1}{\pi}\log 32>2 . \tag{5.85}$$

同理，我们有

$$u_*(\log t_m^{1+\eta^2})-u^*(\log t_m+2\pi+\log 34)$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\{\eta^2 \log t_m - 2\pi - \log 34\} - \frac{1}{\pi}\log 32$$

$$\geqslant \frac{\eta^2}{2\pi}\log t_m - \left(1 + \frac{3}{2\pi}\log 34\right), \tag{5.86}$$

以及

$$u_*(\log t_m - 2\pi - \log 34) - u^*(\log t_m^{1-\eta^2})$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\{\eta^2 \log t_m - 2\pi - \log 34\} - \frac{1}{\pi}\log 32$$

$$> \frac{\eta^2}{2\pi}\log t_m - \left(1 + \frac{3}{2\pi}\log 34\right). \tag{5.87}$$

2) 我们证明，如果置 $g(w) = f(z)$，则当 m 充分大时，在区域：$u^*(\log t_m^{1-\eta^2}) < u < u_*(\log t_m^{1+\eta^2})$，$0 < v < 1$ 内必定存在一个点 w_{jms_j+1} 使得

$$\log|g(w_{jms_j+1})| \geqslant A t_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2} T(t_m, f),$$

其中 $A > 0$ 是与 m 无关的常数.

首先证明，如果置 $\Delta = \dfrac{\eta^2}{4(\lambda+1)}$，则当 m 充分大时，在区域：$u^*(\log t_m^{1-\eta^2}) + 1 \leqslant u \leqslant u_*(\log t_m^{1+\eta^2}) - 1$，$0 < v < 1 - \Delta$ 内必定存在一点 w^*，使得

$$|g(w^*)| > 2M_1.$$

事实上，如果不然，则当点 w 位在闭区域：$u^*(\log t_m^{1-\eta^2}) + 1 \leqslant u \leqslant u_*(\log t_m^{1+\eta^2}) - 1$，$0 \leqslant v \leqslant 1 - \Delta$ 上时，恒有

$$|g(w)| \leqslant 2M_1. \tag{5.88}$$

另一方面，当$m\geqslant m_3$和点w位在直线段：$u^*(\log t_m^{1-\eta^2})+1\leqslant u\leqslant u_*(\log t_m^{1+\eta^2})-1$, $v=1$上时，根据(5.71), (5.82)和(5.83)式，我们有

$$|g(w)|\leqslant|g(w)-b_{j+1}|+|b_{j+1}|\leqslant 1+M_1\leqslant 2M_1 .$$

于是，借助于变换e^w和引理2.10，当$m\geqslant m_3$时，我们判定，当点w位在区域：$u^*(\log t_m-2\pi-\log 34)\leqslant u\leqslant u_*(\log t_m+2\pi+\log 34)$; $1-\Delta<v<1$内时有

$$\log|g(w)|\leqslant 2\log(2M_1)$$

$$+\frac{4\left\{\dfrac{e^{u^*(\log t_m^{1-\eta^2})+1}}{e^u}\right\}^{\frac{\pi}{\Delta}}}{\pi\left\{1-\left(\dfrac{e^{u^*(\log t_m^{1-\eta^2})+1}}{e^u}\right)^{\frac{2\pi}{\Delta}}\right.}t_m^{\lambda+1}$$

$$+\frac{4\left\{\dfrac{e^u}{e^{u_*(\log t_m^{1+\eta^2})-1}}\right\}^{\frac{\pi}{\Delta}}}{\pi\left\{1-\left(\dfrac{e^u}{e^{u_*(\log t_m^{1+\eta^2})-1}}\right)^{\frac{2\pi}{\Delta}}\right\}}t_m^{(1+\eta^2)(\lambda+1)}$$

$$\leqslant 2\log(2M_1)$$

$$+\frac{4e^{\{u^*(\log t_m^{1-\eta^2})+1-u_*(\log t_m-2\pi-\log 34)\}\frac{\pi}{\Delta}}}{\pi\{1-e^{\{u^*(\log t_m^{1-\eta^2})+1-u_*(\log t_m-2\pi-\log 34)\}\frac{2\pi}{\Delta}}\}}t_m^{\lambda+1}$$

$$+\frac{4e^{\{u^*(\log t_m+2\pi+\log 34)-u_*(\log t_m^{1+\eta^2})+1\}\frac{\pi}{\Delta}}}{\pi\{1-e^{\{u^*(\log t_m+2\pi+\log 34)-u_*(\log t_m^{1+\eta^2})+1\}\frac{2\pi}{\Delta}}\}}$$

$$\times t_m^{(1+\eta^2)(\lambda+1)} .$$

进一步，根据(5.86)和(5.87)式，我们得到

$$\log|g(w)|\leqslant 2\log(2M_1)$$

$$+\frac{4e^{(2+\frac{3}{2\pi}\log 34)\frac{\pi}{\Delta}}\cdot t^{-\frac{\eta^2}{2\Delta}+\lambda+1}}{\pi\left\{1-e^{(2+\frac{3}{2\pi}\log 34)\frac{2\pi}{\Delta}}\cdot t_m^{-\frac{\eta^2}{\Delta}}\right\}}$$

$$+\frac{4e^{(2+\frac{3}{2\pi}\log 34)\frac{\pi}{\Delta}}t_m^{-\frac{\eta^2}{2\Delta}+(1+\eta^2)(\lambda+1)}}{\pi\left\{1-e^{(2+\frac{3}{2\pi}\log 34)\frac{2\pi}{\Delta}}t_m^{-\frac{\eta^2}{\Delta}}\right\}}.$$

因为$\Delta=\dfrac{\eta^2}{4(\lambda+1)}$，所以存在值$m_4$, $m_4\geqslant m_3$使得当$m\geqslant m_4$时，有

$$\log|g(w)|\leqslant 2\log(2M_1)+\log(2M_1)=3\log(2M_1),$$

即当点w位在区域：$u^*(\log t_m-2\pi-\log 34)<u<u_*(\log t_m+2\pi+\log 34)$, $1-\Delta<v<1$内时有

$$|g(w)|\leqslant(2M_1)^3.$$

再结合(5.88)式，我们判定当$m\geqslant m_4$和点w位在区域：$u^*(\log t_m-2\pi-\log 34)<u<u_*(\log t_m+2\pi+\log 34)$, $0<v<1$内时有

$$|g(w)|\leqslant(2M_1)^3.$$

根据(5.79)和(5.82)式，存在值m_5, $m_5\geqslant m_4$使得当$m\geqslant m_5$时，有

$$\{M_1+(2M_1)^3\}\{\varepsilon_m'^{\frac{1}{3}}+\varepsilon_m''^{\frac{1}{3}}\}<M_2.$$

然后，注意到条件(5.85)式，通过适当的变换和应用定理3.2，我们可以判定$a_i=b_{j+1}$. 但是，这是不可能的，于是，我们证明了当$m\geqslant m_5$时，在区域：$u^*(\log t_m^{1-\eta^2})+1\leqslant u\leqslant u_*(\log t_m^{1+\eta^2})-1$, $0<v<1-\Delta$内，必定存在一点w^*使得

$$|g(w^*)|>2M_1. \tag{5.89}$$

现在，我们以点 $w=\mathrm{Re}\,w^*$ 为心，以 1 为半径作上半圆 $C:|w-\mathrm{Re}\,w^*|<1, \mathrm{Im}\,w\geqslant 0$. 明显地，$C$ 位在闭区域：$u^*(\log t_m^{1-\eta^2})\leqslant u\leqslant u_*(\log t_m^{1+\eta^2}), 0\leqslant v<1$ 内. 记直线段 $\mathrm{Re}\,w^*-1\leqslant u\leqslant \mathrm{Re}\,w^*+1, v=0$ 为 Γ，则根据引理 3.2，Γ 相对于点 $w\in C$ 的调和测度

$$u(w, \Gamma, C)=\frac{2\varphi}{\pi}-1,$$

其中 φ 是从点 w 观测 Γ 的张角开度. 另外，根据 (5.84) 式，当 $w\in\Gamma$ 时，我们有

$$\log|g(w)-a_i|\leqslant -At_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m, f). \tag{5.90}$$

另一方面，我们在 C 上取一点 w_{jms_j+1}，使得

$$|g(w_{jms_j+1})|=\max_{w\in c}|g(w)|.$$

于是，当 $w\in C$ 时，有

$$|g(w)-a_i|\leqslant|g(w)|+|a_i|\leqslant|g(w_{jms_j+1})|+M_1. \tag{5.91}$$

因此，(5.89)—(5.91) 式给出

$$\log M_1\leqslant\log|g(w^*)-a_i|\leqslant\log\{|g(w_{jms_j+1})|+M_1\}$$

$$+u(w^*, \Gamma, C)\{-At_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m, f)\},$$

$$\log^+|g(w_{jms_j+1})|\geqslant u(w^*, \Gamma, C)$$

$$At_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m, f)-\log(2M_1), \tag{5.92}$$

其中 $A>0$ 是与 m 无关的常数. 以下，我们估计 $u(w^*, \Gamma, C)$. 事实上，根据等式

$$\frac{\pi}{4}=\left\{\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}+\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right\},$$

我们有

$$1=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{Im} w^*}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{Im} w^*}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{Im} w^*}{1+\operatorname{Im} w^*}.$$

因为 $\operatorname{Im} w^* \leqslant 1-\Delta$, 所以有

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\Delta}{2}.$$

再注意到 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$, 进一步有

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\Delta}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\Delta}{2\sqrt{2}}.$$

于是，我们判定

$$\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\Delta}{2\sqrt{2}},$$

$$u(w^*,\Gamma,C)=\frac{2\varphi}{\pi}-1=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}\Delta}{\pi}>0.$$

将该式代入(5.92)式，然后我们取值 m_6, $m_6\geqslant m_5$ 使得当 $m\geqslant m_6$ 时，有

$$\log^{+}|g(w_{jms_j+1})| \geqslant At_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f) > 2M_1,$$

其中 $A>0$ 是与 m 无关的常数.因此,点 w_{jms_j+1} 位在区域: $u^*(\log t_m^{1-\eta^2}) < u < u_*(\log t_m^{1+\eta^2}), 0<v<1$ 内.

记 w_{jms_j+1} 点在 z 平面上的原像点为 z_{jms_j+1},则点 z_{jms_j+1} 位在区域 $D'_{jms_j+1} \subset D_{jms_j+1}$ 内.于是我们证明了当 $m \geqslant m_6$ 时,在 D'_{jms_j+1} 内存在一点 z_{jms_j+1} 和一个与 m 无关的常数 $A>0$ 使得

$$\log|f(z_{jms_j+1})| \geqslant At_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f).$$

3)因为 $D_{jm\nu}(1 \leqslant \nu \leqslant s_j+1, s_j \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant l_1)$ 的个数 $\leqslant p_1+l_1$,所以存在值 $m_7, m_7 \geqslant m_6$ 和一个与 m 无关的常数 $A_0, 0<A_0<1$ 使得 $m \geqslant m_7$ 时有

$$\log|f(z_{jm\nu})| \geqslant A_0 t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f),$$

$$z_{jm\nu} \in D'_{jm\nu} \subset D_{jm\nu},$$

$$\nu = 1, 2, \cdots, s_j+1, s_j \neq 0$$

$$j = 1, 2, \cdots, l_1.$$

(5)设 $s_j \neq 0(1 \leqslant j \leqslant l_1)$.在区间 $\left[\frac{1}{4}A_0 t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f), \frac{1}{2}A_0 t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f)\right] (m \geqslant m_7)$ 上存在值 $A'_0 t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f)$,使得等位线 $\log|f(z)| = A'_0 t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f)$ 是解析的.考虑集合

$$E = E\{z \mid \log|f(z)| > A'_0 t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f), |z| < t_{m+1}\}.$$

记含有点 $z_{jm\nu}(1 \leqslant \nu \leqslant s_j+1)$ 的连通分支为 $\Omega'_{jm\nu}$.根据最大模原理,我们判定 $\overline{\Omega}_{jm\nu} \cap (|z| = t_{m+1})$ 不是空集且含有内点.

1)我们证明当 m 充分大时，有 $\Omega'_{jm\nu}\subset D_{jm\nu}(j=1,2,\cdots,l_1;\nu=1,2,\cdots,s_j+1,s_j\neq 0)$. 于是 $\{\Omega'_{jm\nu}\}$ 彼此无交.

首先，根据(5.75)式有

$$\varliminf_{m\to+\infty}\frac{\log T(t_m,F)-\log T(2t_{m-1},F)}{\log t_m-\log 2t_{m-1}}$$

$$\geqslant\varliminf_{R\to+\infty}\frac{RT'(R,F)}{T(R,F)}\geqslant\alpha,$$

其中 $F(z)=f(z)-a_1$. 另外，根据第一基本定理有

$$T(t_m,F)\leqslant T(t_m,f)+O(1),$$

$$T(2t_{m-1},F)\geqslant T(2t_{m-1},f)-O(1).$$

于是

$$\varliminf_{m\to+\infty}\frac{\log T(t_m,f)-\log T(2t_{m-1},f)}{\log t_m-\log 2t_{m-1}}\geqslant\alpha.$$

因此，存在值 m_8, $m_8\geqslant m_7$ 使得当 $m\geqslant m_8$ 时，有

$$\frac{\log T(t_m,f)-\log T(2t_{m-1},f)}{\log t_m-\log 2t_{m-1}}\geqslant\frac{\alpha}{2},$$

$$T(2t_{m-1},f)\leqslant\left(\frac{2t_{m-1}}{t_m}\right)^{\frac{\alpha}{2}}T(t_m,f).$$

进一步，根据 η 的选取，以及 $t_{m-1}\leqslant 2t_{m-1}^{1+\eta}$, $t_m\geqslant r_m$ 和 $r_m=r_{m-1}^{(1+\eta)^2}$, 我们可以判定存在值 m_9, $m_9\geqslant m_8$ 使得当 $m\geqslant m_9$ 时，有

$$\log M(t_{m-1},f)\leqslant 3T(2t_{m-1},f)\leqslant 3\left(\frac{2t_{m-1}}{t_m}\right)^{\frac{\alpha}{2}}T(t_m,f).$$

$$\leqslant \frac{A_0}{4} t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f)$$

$$\leqslant A_0' t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f) . \tag{5.93}$$

另一方面，根据(5.78)，(5.79)，(5.80)，(5.82)和(5.83)式，当$m \geqslant m_9 \geqslant m_3$和$z \in \bigcup_{J=1}^{l_1} L_{jm} \bigcup_{i=1}^{p_1} \Delta\left(\frac{\theta_{k_i}+\theta_{k_i+1}}{2}; t_{m-1}, t_m\right)$时，有

$$\log |f(z)| \leqslant \log 2M_1 .$$

明显地，存在值m_{10}，$m_{10} \geqslant m_9$使得当$m \geqslant m_{10}$时，有

$$A_0' t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f)$$

$$\geqslant \frac{A_0}{4} t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)} T(t_m, f) > \log 2M_1 . \tag{5.94}$$

于是，根据(5.93)和(5.94)式，以及$\Omega'_{jm\nu}$的定义，我们判定当$m \geqslant m_{10}$时，有$\Omega'_{jm\nu} \subset D_{jm\nu}$.

2) 我们证明当m充分大时，有$\Omega'_{jm\nu} \subset D_j(t_{m+1})$. 首先，存在值$m_{11}$，$m_{11} \geqslant m_{10}$使得当$m \geqslant m_{11}$时，有

$$A_0' t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f)$$

$$\geqslant \frac{A_0}{4} t_m^{-(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2} T(t_m, f) > \log 2M_0 . \tag{5.95}$$

于是，根据(5.70)式，我们判定$\Omega'_{jm\nu}$与$L_j(j=1, 2, \cdots, l_1)$无交.其次，根据$\Omega'_{jm\nu} \subset D_{jm\nu}$，我们判定$\Omega'_{jm\nu} \cap (|z| = t_{m+1}) \subset \bar{D}_{jm\nu} \cap (|z| = t_{m+1}) \subset \bar{D}_{jm} \cap (|z| = t_{m+1}) = \bar{D}_{jm}(t_{m+1}) \cap (|z| = t_{m+1})$. 另外，根据$\Omega'_{jm\nu} \cap (|z| = t_{m+1})$不是空集且含有内点，我们判定存在点$z_1 \in \Omega'_{jm\nu} \cap D_j(t_{m+1})$. 于是，当$m \geqslant m_{11}$时，有$\Omega'_{jm\nu} \subset D_j(t_{m+1})$.

3) 记 $\Omega'_{jm\nu}$ 位在圆 $|z|<\frac{1}{2}t_{m+1}$ 内且含有点 $z_{jm\nu}$ 的连通分支为 $\Omega_{jm\nu}\subset\Omega'_{jm\nu}$, 则 $\{\Omega_{jm\nu}\}$ 彼此无交. 置 $\theta_{jm\nu}=\overline{\Omega}_{jm\nu}\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 和命 $u_{jm\nu}(z)$ 表示 $\theta_{jm\nu}$ 关于域 $\Omega_{jm\nu}$ 相对于点 z 的调和测度.

再记圆周 $|z|=r\left(2r_m^{1+\eta^2}\leqslant r\leqslant\frac{1}{4}t_{m+1};m\geqslant m_{11}\right)$ 位在 $\Omega_{jm\nu}$ 内部分的线性测度为 $r\theta_{jm\nu}(r)$, 于是, 我们有

$$
\begin{aligned}
A_0t_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m,f)&\leqslant\log|f(z_{jm\nu})|\\
&\leqslant\frac{A_0}{2}t_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m,f)\\
&\quad+u_{jm\nu}(z)\log M\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right).
\end{aligned}\tag{5.96}
$$

注意到点 $z_{jm\nu}\in D'_{jm\nu}\subset D_{jm\nu}$ 和 $z_{jm\nu}\in\Omega_{jm\nu}\subset D_{jm\nu}$, 我们用一条位在 $\Omega_{jm\nu}$ 内的曲线 l_z 连接点 $z_{jm\nu}$ 和 $\theta_{jm\nu}$ 上的一点, 则 l_z 必定与圆周 $|z|=t_m^{1+\eta^2}$ 有交. 取其最后一个交点, 则该点可以确定圆周 $|z|=t_m^{1+\eta^2}$ 上的一个连通弧段, 使得该弧段位在 $\Omega_{jm\nu}$ 内, 并且将 $\Omega_{jm\nu}$ 分割成两个不连通的区域. 取该弧段上的一点 $z^*_{jm\nu}$, $|z^*_{jm\nu}|=t_m^{1+\eta^2}$, 使得 $u_{jm\nu}(z^*_{jm\nu})$ 达到最大值. 明显地 $z^*_{jm\nu}\in\Omega_{jm\nu}$, 并且根据最大模原理, 我们判定 $u_{jm\nu}(z)\leqslant u_{jm\nu}(z^*_{jm\nu})$. 于是, 根据(5.96)式和定理3.1有

$$
\begin{aligned}
\frac{A_0}{2}t_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m,f)&\leqslant u_{jm\nu}(z^*_{jm\nu})\log M\left(\frac{1}{2}t_{m+1},f\right)\\
&\leqslant 9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm\nu}(r)}}3T(t_{m+1},f),
\end{aligned}
$$

$$
\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm\nu}(r)}\leqslant\log T(t_{m+1},f)-\log T(t_m,f)
$$

$$+\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2\log t_m+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}. \qquad (5.97)$$

4) 当$m\geqslant m_{11}$时，根据(5.95)式，$\Omega_{jm\nu}$或者整个地位在$\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$内，或者与$\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$无交.假设存在域$\Omega_{jm\nu_j}$ $(1\leqslant\nu_j\leqslant s_j+1)$使得$\Omega_{jm\nu_j}$整个地位在$\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$内，我们简记$\Omega_{jm\nu_j}=\Omega_{jm}$和$\theta_{jm\nu_j}(r)=\theta_{jm}(r)$，则根据定理3.1有

$$A_0 t_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m,f)\leqslant\log|f(z_{jm\nu_j})|$$

$$\leqslant\frac{A_0}{2}t_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m,f)$$

$$+u_{jm\nu_j}(z_{jm\nu_j})\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\right.$$

$$\left.\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\},$$

$$\frac{A_0}{2}t_m^{-\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2}T(t_m,f)\leqslant u_{jm\nu_j}(z^*_{jm\nu_j})\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\right.$$

$$\left.\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\},$$

$$\leqslant 9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}}\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\right.$$

$$\left.\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\},$$

$$\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}\leqslant\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\right.$$

$$\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right), f\Big\}$$

$$-\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_m\right)\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_m\right), f\right\}$$

$$+\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2\log t_m+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}. \tag{5.98}$$

5) 假设 s_j+1 个域 $\Omega_{jm\nu}(\nu=1,2,\cdots,s_{j+1})$ 均与 $\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 无交.我们首先任意取定一个值 $\nu_j(1\leqslant\nu_j\leqslant s_j+1)$, 然后定义一个新的域 Ω_{jm}, 用以取代 $\Omega_{jm\nu_j}$. 具体地 Ω_{jm} 定义如下：先取一点 $z_{jm}\in\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m)$, 使得

$$|f(z_{jm})|=M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m), f\}.$$

明显地，点 z_{jm} 是 $\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 的内点.然后在区间 $[\sqrt[4]{M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m), f\}},\ \sqrt{M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m), f\}}]$ 中取值 A_0'', 使得等位线 $|f(z)|=A_0''$ 是解析的、考虑集合

$$E=E\left\{z\,\big|\,|f(z)|>A_0'',\ |z|<\frac{1}{2}t_{m+1}\right\}.$$

记含有点 z_{jm} 的连通分支为 Ω_{jm}, 则根据最大模原理，集合 $\overline{\Omega}_{jm}\bigcap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$ 不是空集且含有内点.另一方面，根据(5.74)式，存在值 m_{12}, $m_{12}\geqslant m_{11}$ 使得当 $m\geqslant m_{12}$ 时，有

$$A_0''\geqslant\sqrt[4]{M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\bigcap(|z|=t_m), f\}}>M_0.$$

于是，当 $m\geqslant m_{12}$ 时，有 $\Omega_{jm}\subset\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)$, 并且 Ω_{jm} 与 $\Omega_{jm\nu}$

$(1\leqslant v\leqslant s_j+1)$ 无交. 记圆周 $|z|=r\left(t_m\leqslant r\leqslant \frac{1}{4}t_{m+1}\right)$ 位在 Ω_{jm} 内部分的线性测度为 $r\theta_{jm}(r)$. 应用定理 3.1, 我们有

$$\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\cap(|z|=t_m),f\}=\log|f(z_{jm})|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\cap(|z|=t_m),f\}$$

$$+9\sqrt{2}\,e^{-\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{4}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}}\log M$$

$$\times\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\},$$

进一步得到

$$\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{4}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}\leqslant\log\log M$$

$$\times\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\},$$

$$-\log\log M\{\overline{\Omega}_j(t_m)\cap(|z|=t_m),f\},$$

$$+\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2\log t_m+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}.$$

于是, 我们在形式上重新得到了 (5.98) 式.

今后, 当 $m\geqslant m_{12}$ 和 $s_j\neq 0(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 时, 若置 $1\leqslant v\neq v_j\leqslant s_j+1$, 则取 (5.97) 式; 若置 $v=v_j$, 则取 (5.98) 式.

(6) 设 $s_j=0(1\leqslant j\leqslant l_1)$. 类似地, 我们可以定义区域 $\Omega_{jm}\subset\Omega_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\subset\Omega_j(t_{m+1})\subset D_j(t_{m+1})$ 和导出不等式

$$\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{4}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}\leqslant\log\log M$$

$$\times\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\}$$

$$-\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_m\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_m\right),f\right\},$$

$$+\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2\log tm+\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}. \tag{5.99}$$

(7) 根据上述的讨论，我们看出当$m\geqslant m_{12}$和$2t_m^{1+\eta^2}\leqslant r\leqslant\frac{1}{4}t_{m+1}$时，若记

$$\sum_{1<j<l_1}\theta_{jm}(r)=\sum_{\substack{1<j<l\\ s_j=0}}\theta_{jm}(r)+\sum_{\substack{1<j<l_1\\ s_j\neq 0\\ \nu=\nu_j}}\theta_{jm\nu}(r),$$

则有

$$\sum_{1<j<l_1}\theta_{jm}(r)+\sum_{\substack{1<j<l_1\\ s_j\neq 0\\ 1<\nu\neq\nu_j<s_j+1}}\theta_{jm\nu}(r)\leqslant 2\pi.$$

于是，我们得到

$$(p_1+l_1)^2=\left\{\sum_{\substack{1<j<l_1\\ s_j\neq 0\\ 1<\nu\neq\nu_j<s_j+1}}\sqrt{\theta_{jm\nu}(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_{jm\nu}(r)}}\right.$$

$$\left.+\sum_{1<j<l_1}\sqrt{\theta_{jm}(r)}\frac{1}{\sqrt{\theta_{jm}(r)}}\right\}^2$$

$$\leqslant 2\pi\left\{\sum_{\substack{1<j<l_1\\ s_j\neq 0\\ 1<\nu\neq\nu_j<s_j+1}}\frac{1}{\theta_{jm\nu}(r)}+\sum_{1<j<l_1}\frac{1}{\theta_{jm}(r)}\right\},$$

$$
\frac{1}{2}(p_1+l_1)^2\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r}\leqslant\sum_{\substack{1\le j\le l_1\\ s_j\neq 0\\ 1\le\nu\neq\nu_j\le s_j+1}}\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm\nu}(r)}
$$

$$
+\sum_{1\le j\le l_1}\pi\int_{2t_m^{1+\eta^2}}^{\frac{1}{2}t_{m+1}}\frac{dr}{r\theta_{jm}(r)}
$$

进一步，根据(5.97)—(5.99)式导出

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p_1+l_1)^2\left\{\log\frac{t_{m+1}}{t_m}-\eta^2\log t_m-\log 8\right\}\\
&\leqslant p_1\left\{\log T(t_{m+1},f)-\log T(t_m,f)\right\}\\
&+\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2 p_1\log t_m+p_1\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}\\
&+\sum_{1\le j\le l_1}\left\{\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m+1}\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_{m+1}\right),f\right\}\right.\\
&\left.-\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_m\right)\cap\left(|z|=\frac{1}{2}t_m\right),f\right\}\right\}\\
&+\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\eta^2 l_1\log t_m+l_1\log\frac{54\sqrt{2}}{A_0}.
\end{aligned}\tag{5.100}
$$

现在，设序列$R_n(n=1,2,\cdots)$满足下述条件：

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n,f)}{\log R_n}=\mu.
$$

对于每个充分大的值n，存在值m_n，使得

$$
t_{m_n-1}<R_n\leqslant t_{m_n}.\tag{5.101}
$$

于是，我们有

$$r_0^{(1+\eta)^{2m_n-2}} = r_{m_n-1} \leqslant t_{m_n-1} < R_n,$$

$$m_n \leqslant \frac{\log\log R_n - \log\log r_0}{2\log(1+\eta)} + 1, \tag{5.102}$$

同时有

$$\begin{aligned} t_{m_n-1} &\geqslant r_0^{(1+\eta)^{2m_n-2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} \left(2r_{m_n}^{1+\eta}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} t_{m_n}^{\frac{1}{(1+\eta)^3}} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2}R_n\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^3}}, \end{aligned} \tag{5.103}$$

并且还有

$$\begin{aligned} \sum_{m=m_{12}}^{m_n-2} \log tm &\leqslant \sum_{m=m_{12}}^{m_n-2} \log\left(2r_m^{1+\eta}\right) \\ &= \sum_{m=m_{12}}^{m_n-2} \log r_0^{(1+\eta)^{2m+1}} + (m_n - m_{12} - 1)\log 2 \\ &= \sum_{m=m_{12}}^{m_n-2} (1+\eta)^{2m+1} \log r_0 + (m_n - m_{12} - 1)\log 2 \\ &= \log r_0 \frac{(1+\eta)^{2m_n-1} - (1+\eta)^{2m_{12}+1}}{2(\eta+1)\eta} \\ &\quad + (m_n - m_{12} - 1)\log 2 \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{(1+\eta)\log R_n - (1+\eta)^{2m_{12}+1}\log r_0}{(2+\eta)\eta}$$

$$+ (m_n - m_{12} - 1)\log 2. \tag{5.104}$$

置 $m = m_{12}, m_{12}+1, \cdots, m_n - 2$, 则根据 (5.100)—(5.104) 式, 我们得到

$$\frac{1}{2}(p_1 + l_1)^2 \left\{\log \frac{t_{m_n-1}}{t_{m_{12}}} - \eta^2 \sum_{m=m_{12}}^{m_n-2} \log t_m\right.$$

$$\left. - (m_n - m_{12} - 1)\log 8\right\}$$

$$\leqslant p_1 \left\{\log T(t_{m_n-1}, f) - \log T(t_{m_{12}}, f)\right\}$$

$$+ \sum_{1<j<l_1} \left\{\log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m_n-1}\right)\right.\right.$$

$$\left.\cap\left(|z| = \frac{1}{2}t_{m_n-1}\right), f\right\}$$

$$\left.- \log\log M\left\{\overline{\Omega}_j\left(\frac{1}{2}t_{m_{12}}\right)\cap\left(|z| = \frac{1}{2}t_{m_{12}}\right), f\right\}\right\}$$

$$+ (p_1 + l_1)\left(\frac{30\pi}{\omega} + 1\right)\eta^2 \sum_{m=m_{12}}^{m_n-2} \log t_m$$

$$+ (p_1 + l_1)(m_{m_n} - m_{12} - 1)\log \frac{54\sqrt{2}}{A_0},$$

$$\frac{1}{2}(p_1 + l_1)^2 \left\{\frac{1}{(1+\eta)^3}\log R_n - \frac{1}{(1+\eta)^3}\log 2 - \log t_{m_{12}}\right.$$

$$
-\frac{(1+\eta)\log R_n-(1+\eta)^{2m_{12}+1}\eta\log r_0}{2+\eta}
$$

$$
\left.-\frac{\log\log R_n-\log\log r_0}{2\log(1+\eta)}\cdot\log 16\right\}
$$

$$
\leqslant (p_1+l_1)\log T(R_n,f)+l_1\log 3+(p_1+l_1)\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)
$$

$$
\times\frac{(1+\eta)\eta\log R_n-(1+\eta)^{2m_{12}+1}\eta\log r_0}{2+\eta}
$$

$$
+(p_1+l_1)\frac{\log\log R_n-\log\log r_0}{2\log(1+\eta)}
$$

$$
\times\log\frac{2^{(\frac{30\pi}{\omega}+1)\eta^2}\cdot 54\sqrt{2}}{A_0}.
$$

用$\log R_n$除不等式两端，然后命$n\to+\infty$，我们判定

$$
\frac{1}{2}(p_1+l_1)^2\left\{\frac{1}{(1+\eta)^3}-\frac{(1+\eta)\eta}{2+\eta}\right\}
$$

$$
\leqslant (p_1+l_1)\mu+(p_1+l_1)\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\frac{(1+\eta)\eta}{2+\eta}
$$

$$
(p_1+l_1)\left\{\frac{1}{(1+\eta)^2}-\frac{(1+\eta)\eta}{2+\eta}\right\}
$$

$$
\leqslant 2\mu+2\left(\frac{30\pi}{\omega}+1\right)\frac{(1+\eta)\eta}{2+\eta}.
$$

最后命$\eta\to 0$，则得

$$
p_1+l_1\leqslant 2\mu.
$$

但是，这与(5.69)式相矛盾．于是，定理5.14完全得证．

第六章　亚纯函数的亏值和它的反函数直接超越奇点间的关系

在第五章，我们对于整函数已经讨论了亏值和渐近值间的关系．现在，我们对于亚纯函数讨论亏值和它的反函数直接超越奇点间的关系．

§6.1.　具有亏量和等于2的亚纯函数类[43g]

定理6.1　设$w=f(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个亚纯函数，$z=g(w)$是$f(z)$的反函数．$g(w)$的判别直接超越奇点个数为l，$f(z)$的亏值个数为p，其中l'个亏值同时是$g(w)$的直接超越奇点．如果$f(z)$的亏量总和

$$\Delta(f)=\sum_{a}\delta(a,f),\ \delta(a,f)>0,$$

等于2，则有$p-l'+l\leqslant 2\mu$，其中μ是$f(z)$的下级．

证．　当$\mu=+\infty$时，定理6.1成立是显然的．于是，我们只须考虑$\mu<+\infty$时的情况．

当$\mu<+\infty$时，假设定理6.1不成立，即有

$$p_1-l'+l\geqslant[2\mu]+1,$$

则存在整数$p_1<+\infty,0\leqslant p_1\leqslant p-l'$和整数$l_1<+\infty,0\leqslant l_1\leqslant l$使得

$$p_1+l_1\geqslant[2\mu]+1. \tag{6.1}$$

根据假设$\Delta(f)=2$，必有$\rho\geqslant 2$．因此，我们可以进一步要求$p_1+l_1\geqslant 2$．另外，根据定理3.4有$\mu>0$．现在，我们选取l_1个判别直接超

越奇点$b_j(j=1,2,\cdots,l_1)$和p_1个非直接超越奇点的亏值$a_i(i=1,2,\cdots,p_1)$，其相应亏量$\delta(a_i,f)=\delta_i>0$. 不失一般性，我们可以假设$a_i(i=1,2,\cdots,p_1)$和$b_j(j=1,2,\cdots,l_1)$均为有穷值，同时$\delta(\infty,f)=0$. 否则，我们只须作一适当的分式线性变换.

(1)根据下级μ的定义，存在序列R_n:$R_n<R_{n+1}\to+\infty(n\to+\infty)$使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(R_n,f)}{\log R_n}=\mu,\quad 0<\mu<+\infty.$$

进一步应用引理2.1，置其中的$v=\mu$, $h_1=0$, 我们判定对于任意取定的数$h(h>0)$, $H(H>\mu)$, 如果置

$$K=hH,$$

$$E=E\{t\,|\,T(te^h,f)\leqslant e^K T(t,f),t\geqslant 1\}, \tag{6.2}$$

$$E[1,R_n]=E\cap[1,R_n],$$

则有

$$\lim_{R_n\to+\infty}\frac{1}{\log R_n}\int_{E[1,R_n]}\frac{dt}{t}\geqslant 1-\frac{h\mu}{K}. \tag{6.3}$$

再根据引理3.9，我们判定存在一个值r_0', $r_0'\geqslant 1$使得当$t\geqslant r_0'$和$t\in E\cap[r_0',+\infty)$时，在区间$[t,te^\sigma]\left(0<\sigma<\frac{1}{5}h\right)$中必定存在值$R$和一个相应的值$\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$集合$E_i(R)$ $(1\leqslant i\leqslant p_1)$，使得当$\theta\in E_i(R)$时，有

$$\log\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a_i|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(R,f),\ \delta=\min_{1\leqslant i\leqslant p_1}\{\delta_i\}, \tag{6.4}$$

$$\log\frac{1}{|f'(Re^{i\theta})|}\geqslant\frac{\delta}{8}T(R,f), \tag{6.5}$$

并且

$$\operatorname{mes} E_i(R) \geqslant M = M(\delta, h, H, \sigma) > 0. \tag{6.6}$$

(2) 设 $f'(z)$ 在原点 $z=0$ 的邻域内有展开式

$$f'(z) = c_s z^s + c_{s+1} z^{s+1} + \cdots, \ c_s \neq 0,$$

γ_k 表示 $f'(z)$ 的零点. 当 $t \in E \cap [r_0', +\infty)$ 时, 置

$$\pi(z) = \prod_{0<|\gamma_k|<te^{h-2\sigma}} \frac{te^{h-2\sigma}(z-\gamma_k)}{(te^{h-2\sigma})^2 - \bar{\gamma}_k z},$$

$$\alpha = \frac{c_s}{\pi(0)},$$

$$G(z) = \frac{\alpha z^s \pi(z)}{f'(z)}, \tag{6.7}$$

则 $G(z)$ 在圆 $|z| < te^{h-2\sigma}$ 内全纯, $G(0)=1$, 并且有[1)]

$$\log^+ |\alpha| \leqslant \log^+ |c_s| + N\left(te^{h-2\sigma}, \frac{1}{f'}\right)$$

$$-n(0, f'=0) \log (te^{h-2\sigma}), \tag{6.8}$$

以及

$$\log^+ \frac{1}{|\alpha|} \leqslant \log^+ \frac{1}{|c_5|}. \tag{6.9}$$

取定值 r_1', $r_1' \geqslant r_0'$ 使得当 $r \geqslant r_1'$ 时, 有

$$T\left(r, \frac{1}{f-b_j}\right) < 2T(r, f), \tag{6.10}$$

---

1) 参见 (3.92) 和 (3.93) 式.

$$T\left(r, \frac{1}{f'}\right) < 2T(r, f'),$$

$$\text{mes}\,[re^{h-\sigma}, re^{h}] \geqslant 3,$$

以及根据引理3.10, 当$r \geqslant r_1'$和$r \bar{\in} E_0$时，有

$$\left\{ \frac{1}{\sigma} \log \frac{16e^{1+h-2\sigma}}{M} \cdot \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \cdot \frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \frac{\log^+ \frac{1}{|c_s|}}{T(r, f)} + \frac{n(0, f'=0)\log r}{T(r, f)} \right\} e^{K} < \frac{\delta}{32},$$

$$\left\{ \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \cdot \frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \frac{\log^+ |c_s|}{T(r, f)} \right\} 2e^{K} < \frac{\delta}{8 \times 16}, \tag{6.11}$$

$$\frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \frac{\log^+ \frac{1}{|c_s|}}{T(r, f)} \leqslant 4, \tag{6.12}$$

其中E_0被引理3.10确定，$\text{mes}\, E_0 \leqslant 2$.

以下，作类似于证明(3.98)和(3.99)式，我们可以判定当$t \in E \cap [r_1' + \infty)$时，在集合$E_i(R)$ $(1 \leqslant i \leqslant p_1)$中存在值$\theta_{iR}$, 使得当$z_{iR} = Re^{i\theta_{iR}}$时，有

$$\log |G(z_{iR})| \geqslant \frac{\delta}{16} T(R, f), \tag{6.13}$$

以及在区间$[te^{h-\sigma}, te^{h}]$中存在值$R' \bar{\in} E_0$, 使得

$$\log M(te^{h-4\sigma}, G) \leqslant 8 \cdot \frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1} T(R', f). \tag{6.14}$$

(3)置

$$d=\min_{\substack{1<i=i'<p_1\\1<j=j'<l_1}}\{|a_i-a_{i'}|,\ |a_i-b_j|,\ |b_j-b_{j'}|\ |b_j\neq b_{j'}\}>0\ .$$

和取定值r_2', $r_2'\geqslant r_1'$使得当$t\geqslant r_2'$时，有

$$e^{\frac{\delta}{16}T(t,f)}\geqslant 16\ ,$$

$$2te^{h-4\sigma}\left\{1+\sqrt{2}\ \pi\sqrt{\frac{16}{\sigma}e^K T(t,f)}\right\}e^{-\frac{\delta}{8\cdot 16}T(t,f)}$$

$$+e^{-\frac{\delta}{2}T(t,f)}\leqslant e^{-\frac{\delta}{256}T(t,f)}<\frac{d}{4}\ . \tag{6.15}$$

当$t\in E\bigcap[r_2',+\infty)$时，对$G(z)$应用引理3.5，置其中的$R=te^{h-3\sigma}$, $r=te^{h-4\sigma}$, $z_0=z_{iR}$, $A=e^{\frac{\delta}{16}T(t,f)}\geqslant 16$，则在区间$[\sqrt[4]{A},\sqrt{A}]$中存在值$A'$，使得$G'(z)$在等位线$|G(z)|=A'$上无零点，即等位线是解析的，并且集合

$$\Omega(A')=E\{z\,|\,|G(z)|>A',\ |z|<te^{h-3\sigma}\} \tag{6.16}$$

位在圆$|z|<te^{h-4\sigma}$内部分且含有点z_{iR}的连通分支的闭包$\overline{\Omega}(z_{iR})$上的任意一点$z$，可以找到一条连接点$z$和$z_{iR}$的逐段解析曲线$L$，其长度

$$\mathrm{mes}\,L\leqslant 2te^{h-4\sigma}+2\sqrt{2}\ \pi te^{h-4\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma}T(te^{h-3\sigma},G)}\ ,$$

同时当$z\in L$时，有

$$|G(z)|\geqslant e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{\delta}{16}T(t,f)},\ |z|\leqslant te^{h-4\sigma}\ .$$

于是，根据(6.2)，(6.7)，(6.8)和(6.12)式，判定[1]

$$\operatorname{mes} L \leqslant 2te^{h-4\sigma}\left\{1+\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\frac{16}{\sigma}e^{K}T(t,f)}\right\},$$

以及当 $z\in L$ 时，根据(6.7)，(6.8)，(6.11)和(6.12)式，判定[2]

$$|f'(z)|\leqslant e^{-\frac{\delta}{8\cdot 6}T(t,f)}.$$

因此，当 $z\in\Omega(z_{iR})$ 时，根据(6.4)式有

$$\begin{aligned}|f(z)-a_i| &\leqslant |f(z)-f(z_{iR})|+|f(z_{iR})-a_i|\\ &\leqslant\int_L|f'(z)||dz|+e^{-\frac{\delta}{4}T(t,f)}\\ &\leqslant 2te^{h-4\sigma}\left\{1+\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{16}{\sigma}e^{K}T(t,f)}\right\}\\ &\quad e^{-\frac{\delta}{18\times 16}}+e^{-\frac{\delta}{4}T(t,f)}.\end{aligned}$$

进一步根据(4.15)式，我们判定

$$|f(z)-a_i|<e^{-\frac{\delta}{256}T(t,f)}<\frac{d}{4}.$$

于是，p_1 个区域 $\Omega(z_{iR})$ $(i=1,2,\cdots,p_1)$ 彼此无交.

另一方面，根据直接超越奇点的定义，存在值 $\alpha>\dfrac{4}{d}$，使得在 z 平面上相应于 $b_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 的区域 D_j 满足下述条件：

1) 当 $z\in D_j$ 时，有

---

1) 参见(3.103)式.

2) 参见(3.104)式.

$$\frac{1}{|f(z)-b_j|}>\alpha, f(z)\neq b_j,$$

2) D_j 的有限边界部分 Γ_j 是解析曲线，并且当 $z\in\Gamma_j$ 时，有

$$\frac{1}{|f(z)-b_j|}=\alpha .$$

3) 如果 $j\neq j'$, 则有 $D_j\cap D_{j'}=\Phi$.

根据假设 $\Delta(f)=2$, 必有 $p\geqslant 2$. 于是，对于每个值 $b_j(1\leqslant j\leqslant l_1)$, 均存在异于 b_j 的亏值. 因此，根据定理 4. 20, 我们判定

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\log\log M\left\{D_j\cap(|z|=r),\ \dfrac{1}{f-b_j}\right\}}{\log r}\geqslant\frac{1}{2}, j=1,2,\cdots,l_1,$$

进而判定存在值 r_3', $r_3'\geqslant r_2'$ 使得当 $r\geqslant r_3'$ 时，有

$$M\left\{D_j\cap(|z|=r),\ \frac{1}{f-b_j}\right\}>\alpha^4, \tag{6. 17}$$

同时圆周 $|z|=r$ 与 $D_j(j=1,2,\cdots l_1)$ 均有交. 明显地，$M\left\{D_j\cap(|z|=r),\ \dfrac{1}{f-b_j}\right\}(1\leqslant j\leqslant l_1)$ 是 r 的单调增函数，并且当 $r\geqslant r_3'$ 时，如果有点 z_{jr}' 使得

$$\frac{1}{|f(z_{jr}')-b_j|}=M\left\{D_j\cap(|z|=r),\ \frac{1}{f-b_j}\right\},$$

则 z_{jr}' 是 D_j 的一个内点.

当 $t\in E\cap[r_3',+\infty]$ 时，在区间 $\left[\sqrt[4]{M\left\{D_j\cap(|z|=R),\ \dfrac{1}{f-b_j}\right\}},\ \sqrt{M\left\{D_j\cap(|z|=R),\ \dfrac{1}{f-b_j}\right\}}\right]$ $(t\leqslant R\leqslant te^{\sigma}, 1\leqslant j\leqslant l_1)$ 中存在值 A'',

使得导数$\left\{\frac{1}{f(z)-b_j}\right\}'$在等位线$\frac{1}{|f(z)-b_j|}=A''$上无零点和极点，即等位线是解析的．考虑集合

$$\Omega(A')=E\left\{z\,|\,\frac{1}{|f(z)-b_j|}>A'',\ |z|<he^{h-4\sigma}\right\}. \tag{6.18}$$

记$\Omega(A')$位在圆$|z|<te^{h-4\sigma}$内部分且含有点z'_{iR}的连通分支为$\Omega(z'_{jR})$．根据(6.17)式，我们判定$\Omega(z'_{jR})\subset D_j$．另一方面，根据最大模原理，我们判定交集$\Omega(z'_{jR})\bigcap(|z|=te^{h-4\sigma})$不是空集且含有内点．明显地，$\Omega(z'_{jR})\ (j=1,2,\cdots,l_1)$彼此无交．以下，我们说明$\Omega(z_{iR})\ (1\leqslant i\leqslant p_1)$和$\Omega(z'_{jR})\ (1\leqslant j\leqslant l_1)$也彼此无交．否则，存在点$z_0\in\Omega(z_{iR})\bigcap\Omega(z'_{jR})$．类似地，根据(6.4)，(6.15)和(6.17)式判定

$$\begin{aligned}d\leqslant|a_i-b_j|&\leqslant|a_i-f(z_{iR})|+|f(z_{iR})-f(z_0)|+|f(z_0)-b_j|\\&\leqslant e^{-\frac{\delta}{4}T(R,f)}+\int_{L_i}|f'(z)|\,|dz|+\frac{1}{\alpha}\leqslant\frac{d}{2},\end{aligned}$$

从而导出矛盾．

注意到$p_1+l_1\geqslant 2$，圆周$|z|=r\ (r\geqslant R)$不能整个地位在$\Omega(z_{iR})\ (1\leqslant i\leqslant p_1)$内，以及$\Omega(z'_{jR})\ (1\leqslant j\leqslant l_1)$内．记圆周$|z|=r$位在$\Omega(z_{iR})$内的部分为$\theta_{ir}$，位在$\Omega(z'_{jR})$内的部分为$\theta'_{jr}$，$r\theta_i(r)$和$r\theta_j(r)$分别表示$\theta_{ir}$和$\theta'_{jr}$的线性测度．于是，应用定理3.1，注意到$t\leqslant R\leqslant te^{\sigma}$，根据(6.13)和(6.14)式有

$$\log|G(z_{iR})|\leqslant\frac{\delta}{2\times16}T(R,f)$$

$$+9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2R}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_i(r)}}\log M(te^{h-4\sigma}, G),$$

$$\pi\int_{2te^{\sigma}}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_i(r)}\leqslant \log T(te^h, f)-\log T(t, f)$$

$$+\log\left\{\frac{6\times 32\times 9\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right\},$$

$$i=1, 2, \cdots, p_1, \tag{6.19}$$

以及根据(6.18)式有

$$\log\frac{1}{|f(z'_{jR})-b_j|}\leqslant\frac{1}{2}\log M\left\{D_j\cap(|z|=R), \frac{1}{f-b_j}\right\}$$

$$+9\sqrt{2}\, e^{-\pi\int_{2R}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}}\frac{1}{r\theta'_j(r)}}\log M$$

$$\times\left\{D_j\cap(|z|=te^{h-4\sigma}), \frac{1}{f-b_j}\right\},$$

$$\pi\int_{2te^{\sigma}}^{\frac{1}{2}te^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta'_j(r)}\leqslant\log\log M\left\{D_j\cap(|z|=te^{h-4\sigma}), \frac{1}{f-b_j}\right\}$$

$$-\log\log M\left\{D_j\cap(|z|=t), \frac{1}{f-b_j}\right\}$$

$$+\log(18\sqrt{2}), \quad j=1, 2, \cdots, l_1. \tag{6.20}$$

(4)根据假设，存在单调趋于 ∞ 的序列 $\{r_n\}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n}=\mu.$$

根据(6.3)式，当 n 充分大时，在区间 $[r'_3, r_n]$ 上满足不等式

$$T(te^h, f)\leqslant e^K T(t, f) \tag{6.21}$$

的值非空.任意取定一个充分大的值n. 设t_1是区间$[r_3', r_n]$上满足(6.21)式的最小值,t_2是区间$[t_1', r_n]$ $(t_1'=t_1e^h)$上满足(6.21)式的最小值,t_3是区间$[t_2' r_n]$ $(t_2'=t_2e^h)$上满足(6.21)式的最小值,如此继续,经m次后有

$$t_m' \leqslant r_n < t_{m+1}' . \tag{6.22}$$

在(6.19)和(6.20)式中,取$t=t_k(k=1,2,\cdots,m)$,并记$\theta_i(r)=\theta_{ik}(r)$和$\theta_j'(r)=\theta_{jk}'(r)$,然后对$k$求和得到

$$\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_ke^\sigma}^{\frac{1}{2}t_ke^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{ik}(r)}\leqslant \log T(t_me^h, f)$$
$$+ m\log\left\{\frac{6\times 32\times 9\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^\sigma+1}{e^\sigma-1}\right\},$$
$$i=1,2,\cdots,p_1 , \tag{6.23}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_ke^\sigma}^{\frac{1}{2}t_ke^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{ik}'(r)}\leqslant \log\log M$$
$$\times\left\{D_j\cap(|z|=t_me^{h-4\sigma}),\ \frac{1}{f-b_j}\right\}$$
$$+m\log(18\sqrt{2}),\quad j=1,2,\cdots,l_1 . \tag{6.24}$$

应用引理3.8,置其中的$f(z)=\dfrac{1}{f(z)-b_j}$, $(1\leqslant j\leqslant l_1)R=t_me^{h-\sigma}$, $R'=t_me^{h-2\sigma}$, $r=t_me^{h-3\sigma}$, $H=\dfrac{e^\sigma-1}{8e}t_me^{h-4\sigma}$, 则在区间$[t_me^{h-4\sigma}, t_me^{h-3\sigma}]$中存在值$R''$,使得圆周$|z|=R''\bar{\in}(\gamma)$并且有

$$\log M\left\{D_j\cap(|z|=t_me^{h-4\sigma}),\ \frac{1}{f-b_j}\right\}$$

$$\leqslant \log M\left\{D_j\cap(|z|=R''),\ \frac{1}{f-b_j}\right\}$$

$$\leqslant\left\{\frac{t_m e^{h-2\sigma}+t_m e^{h-3\sigma}}{t_m e^{h-2\sigma}-t_m e^{h-3\sigma}}+\frac{\log\dfrac{8e2t_m e^{h-2\sigma}}{(e^{\sigma}-1)t_m e^{h-4\sigma}}}{\log\dfrac{t_m e^{h-\sigma}}{t_m e^{h-2\sigma}}}\right\}$$

$$\times\ T\left(t_m e^{h-\sigma},\ \frac{1}{f-b_j}\right).$$

进一步，根据(6. 10)式导出

$$\log M\left\{D_j\cap(|z|=t_m e^{h-4\sigma}),\ \frac{1}{f-b_j}\right\}$$

$$\leqslant 2\left\{\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}+\frac{1}{\sigma}\log\frac{16e^{2\sigma+1}}{e^{\sigma}-1}\right\}T(t_m e^h,f)\ .$$

代入(6. 24)式，我们得到

$$\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_k e^{\sigma}}^{\frac{1}{2}t_k e^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{jk}'(r)}\leqslant\log T(t_m e^h,f)+m\log(18\sqrt{2})$$

$$+\log\left\{2\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}+\frac{2}{\sigma}\log\frac{16e^{2\sigma+1}}{e^{\sigma}-1}\right\}$$

$$j=1,2,\cdots,l_1\ . \tag{6. 25}$$

根据(6. 22)，(6. 23)和(6. 25)式，当$r\in\bigcup_{k=1}^{m}\left[2t_k e^{\sigma},\ \frac{1}{2}t_k e^{h-4\sigma}\right]$时，我们有

$$(p_1+l_1)^2=\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\sqrt{\theta_{ik}(r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta_{ik}(r)}}\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{l_1}\sqrt{\theta'_{jk}(r)}\frac{1}{\sqrt{\theta'_{jk}(r)}}\Bigg\}^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{p_1}\theta_{ik}(r)+\sum_{j=1}^{l_1}\theta'_{jk}(r)\right)$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\frac{1}{\theta_{ik}(r)}+\sum_{j=1}^{l_1}\frac{1}{\theta_{jk}(r)}\right\}$$

$$\leqslant 2\pi\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\frac{1}{\theta_{ik}(r)}+\sum_{j=1}^{l_1}\frac{1}{\theta_{jk}(r)}\right\},$$

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{2t_k e^{\sigma}}^{\frac{1}{2}t_k e^{h-4\sigma}}\frac{(p_1+l_1)^2}{r}dr$$

$$\leqslant 2\left\{\sum_{i=1}^{p_1}\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_k e^{\sigma}}^{\frac{1}{2}t_k e^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta_{ik}(r)}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{l_1}\sum_{k=1}^{m}\pi\int_{2t_k e^{\sigma}}^{\frac{1}{2}t_k e^{h-4\sigma}}\frac{dr}{r\theta'_{jk}(r)}\right\}$$

$$\leqslant 2\Bigg\{p_1\log T(r_n,f)+mp_1$$

$$\times\ \log\left[\frac{6\times 32\times 9\sqrt{2}}{\delta}\cdot\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}\right]$$

$$+l_1\log T(r_n,f)+m\,l_1\log(18\sqrt{2})$$

$$+\log\left[2\frac{e^{\sigma}+1}{e^{\sigma}-1}+\frac{2}{\sigma}\log\frac{16e^{2\sigma+1}}{e^{\sigma}+1}\right]\Bigg\},$$

$$(p_1+l_1)\{mh-m(\log 4+5\sigma)\}$$

$$\leqslant 2\{\log T(r_n,f)+m\cdot O(1)\}.$$

另一方面，根据(6.3)式，和(6.22)式有

$$(m+1)h \geqslant \int_{E[r_3',r_n]} \frac{dr}{r}$$

$$mh \leqslant \log \frac{r_n}{r_3'} .$$

于是

$$(p_1+l_1)\left\{\frac{1}{\log r_n}\int_{E[r_3',r_n]}\frac{dr}{r}-\frac{1}{\log r_n}\right.$$

$$\left.-\frac{\log 4+5\sigma}{h}\cdot\frac{\log r_n-\log r_3'}{\log r_n}\right\}$$

$$\leqslant 2\left\{\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}+\frac{O(1)}{h}\cdot\frac{\log r_n-\log r_3'}{\log r_n}\right\}.$$

当 $n\to+\infty$ 时，根据(6.3)式判定

$$(p_1+l_1)\left(1-\frac{h\mu}{K}-\frac{\log 4+5\sigma}{h}\right)\leqslant 2\left(\mu+\frac{O(1)}{h}\right),$$

进一步，命 $K\to+\infty$, $h\to+\infty$, 我们得到

$$p_1+l_1\leqslant 2\mu ,$$

但是，这与(6.1)式相矛盾，从而定理6.1完全得证.

§6.2. 下级为有穷的亚纯函数类[43c]

定理6.2 设 $w=f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数，其下级 $\mu<+\infty$, $z=g(w)$ 是 $f(z)$ 的反函数. 记 $f(z)$ 的Julia方向个数为 q, $g(w)$ 的判别直接超越奇点个数为 l, $f(z)$ 的亏值个数为 p, 其

中 l' 个亏值同时是 $g(w)$ 的直接超越奇点，则有关系式

$$p-l'+l\leqslant q .$$

证． (1)首先我们考虑下述情况：$q<+\infty, p<+\infty, l<+\infty$，并且不同时有 $p=0, l=0$；或 $p=0, l=1$；或 $p=1, l=0$.

在上述情况下，或者有 $p\geqslant 2$，或者有 $l\geqslant 2$，或者有 $p\geqslant 1$ 和 $l\geqslant 1$. 于是根据定理3.4和定理4.20的系1，我们判定 $\mu>0$，但是下述情况例外：$p=1$ 和 $l=1$，并且相应的亏值 a 和直接超越奇点 b，有 $a=b$. 不过对这种例外情况，定理6.2显然成立．另一方面，根据定理2.15，我们判定 $q\geqslant 1$.

以下，我们记 $w=f(z)$ 的 p 个亏值为 $a_i(i=1, 2, \cdots, p)$，其相应亏量为 $\delta(a_i, f)=\delta_i>0$，记反函数 $z=g(w)$ 的 l 个判别直接超越奇点为 $b_j(j=1, 2, \cdots, l)$．根据不能有 $p=0, l=0$；或 $p=0, l=1$；或 $p=1, l=0$，根据引理4.11，则对每个 $b_j(1\leqslant j\leqslant l)$ 都对应一个区域 Ω_j；最后记 $f(z)$ 的 q 条Julia方向为 $\Delta(\theta_k)$ $(k=1, 2, \cdots q; 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi)$．置

$$\omega=\min_{1<k<q}\{\theta_{k+1}-\theta_k\}, \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi, \delta=\min_{1<i<p}\{\delta_i\}$$

和任意取定一个数 η，

$$0<\eta<\frac{\nu\omega}{80\pi}, \nu=\min\left\{\frac{1}{2}, \mu\right\}, \tag{6.26}$$

则根据引理2.2(置其中的 $h_1=0, h=3$)和引理3.9(置其中的 $\sigma=\log 2, H=\mu$)，必定存在两个序列 $r_n(n=1, 2, \cdots)$ 和 $t_n'(n=1, 2, \cdots,)$，使得[1)]

---

1)当 $p=0$ 时，我们不必再应用引理2.2和引理3.9，而直接考虑满足(6.27)式的一个序列 $r_n(n=1, 2, \cdots)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}=\mu, \tag{6.27}$$

$$r_n\leqslant t_n'\leqslant 2r_n, \tag{6.28}$$

以及

$$\operatorname{mes} E_i^n\geqslant K_1=K_1(\delta,\mu,p)>0, i=1,2,\cdots,p.$$

此处E_i^n表示使不等式

$$\begin{cases}\log\dfrac{1}{|f(t_n'e^{i\theta})-a_i|}\geqslant\dfrac{\delta}{4}T(t_n',f) & (a_i\neq\infty),\\ \log|f(t_n'e^{i\theta})|\geqslant\dfrac{\delta}{4}T(t_n',f) & (a=\infty)\end{cases}$$

成立的$\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$值集合.根据下级的定义,以及(6.26)和(6.28)式,当n充分大时,有

$$T(t_n',f)\geqslant T(r_n,f)\geqslant r_n^{\mu-\eta}. \tag{6.29}$$

另一方面,对$g(w)$的每个直接超越奇点$b_j(j=1,2,\cdots,l)$,根据引理4.11,当n充分大时,在区间$[r_n^{1-\eta},r_n]$中存在值t_{jn}'',使得

$$\theta(t_{jn}'')\geqslant K_2=K_2(\eta,\mu)>0, j=1,2,\cdots,l,$$

此处$\theta(t_{jn}'')$有下述意义:若用$\theta_{t_{jn}''}$表示圆周$|z|=t_{jn}''$位于Ω_j内的部分,则$t_{jn}''\theta(t_{jn}'')$表示$\theta_{t_{jn}''}$的线性测度.另外,当$z\in\theta_{t_{jn}''}$时,有

$$\begin{cases}\log\dfrac{1}{|f(z)-b_j|}\geqslant|z|^{\frac{1}{2}-\eta} & (b_j\neq\infty),\\ \log|f(z)|\geqslant|z|^{\frac{1}{2}-\eta} & (b_j=\infty).\end{cases} \tag{6.30}$$

我们再取定一个数 ε,

$$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{\omega}{4}, \frac{K}{8q}\right\}, K=\min\{K_1, K_2\}.$$

置

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{k=1}^{q}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon, \theta_{k+1}-\varepsilon),$$

则根据定理2.13和有限覆盖定理，我们判定存在三个判别值 α, β, γ，使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n(r, \overline{\Omega}, f=X)}{\log r}=0, \quad X=\alpha, \beta, \gamma.$$

并且 α, β, γ 间的相互球距均大于 d, $0<d<\frac{1}{2}$.

(2) 当 n 充分大时，每个亏值 $a_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 对应一个集合 E_i^n, $\mathrm{mes}\, E_i^n\geqslant K$. 根据 ε 的选取，在 q 个域 $\Omega(\theta_k+2\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ $(k=1, 2, \cdots, q)$ 中至少存在一个域 $\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$，使得

$$\mathrm{mes}\{E_i^n\cap[\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}.$$

按照这种方式，我们可以使每个亏值 a_i 对应一个域 $\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ $(i=1, 2, \cdots, p)$, p 个亏值 a_i $(i=1, 2, \cdots, p)$ 对应 p 个域 $\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ $(i=1, 2, \cdots, p)$. 以下，我们证明集合 $\{\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)\mid i=1, 2, \cdots, p\}$ 中任何两个域不相重合.

事实上，如果存在两个域 $\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ 和 $\Omega(\theta_{k_{i'}}+2\varepsilon, \theta_{k_{i'}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ 相重合，则有 $k_i=k_{i'}=k$，但是 $i\neq i'$. 应用引理5.1，置其中的 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k+1}-\theta_k)-\varepsilon$, $R=t_n'$,

$R_1 = r_n^{1-\eta}$, $\quad R_2 = 2r_n$, $\quad E_\alpha = E\{t_n' e^{i\varphi} \mid \varphi \in E_i^n \cap [\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon]\}$ $H = \frac{K}{2q} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha = a_i$[1], $N = \frac{\delta}{4} T(t_n', f)$ 和 $v = 0$, 则当 n 充分大时, 对位在 $\Omega(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ 上且在一些圆 (γ) 外的点 z, 有

$$\log^+ \frac{1}{|f(z) - a_i|} \geqslant A(\varepsilon, \theta) \Big\{ (\log 2r_n)^{-1} \cdot 2^{\frac{-4\pi}{\theta_{k+1} - \theta_k - 2\varepsilon}}$$

$$\times r_n^{\frac{-4\pi}{\theta_{k+1} - \theta_k - 2\varepsilon}} \frac{\delta}{4} T(t_n', f) \Big\}$$

$$- B(\varepsilon, \theta, d) \cdot 2^{\frac{4\pi}{\theta_{k+1} - \theta_k - 2\varepsilon}} r_n^{\frac{4\pi}{\theta_{k+1} - \theta_k - 2\varepsilon}}$$

$$\times \{ 2^{2^\eta} \cdot r_n^{2\eta^2} \cdot 2^\eta r_n^\eta \log(2r_n^\eta) + \log^+ |a_i| \}$$

$$\geqslant A(\varepsilon, \theta, \eta, \delta) r_n^{-\frac{8\pi\eta}{\omega} - \eta}$$

$$\times T(t_n', f) - B(\varepsilon, \theta, d, \eta) r_n^{\frac{16\pi\eta}{\omega} + \eta}.$$

根据 η 的选取, 我们有

$$-\frac{8\pi\eta}{\omega} - \eta + (v - \eta) > \frac{v}{2},$$

$$\frac{16\pi\eta}{\omega} + 4\eta + \frac{8\pi\eta}{\omega} + \eta - (v - \eta) < 0.$$

再根据 (6.29) 式, 我们判定

$$\log^+ \frac{1}{|f(z) - a_i|} \geqslant r_n^{\frac{v}{2}}$$

---

1) 当 $a_i = \infty$ 时, 我们只需考虑函数 $\frac{1}{f(z)}$.

或

$$|f(z)-a_i|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\nu}{2}}}. \tag{6.31}$$

另外 (γ) 的半径之和不超过 $\frac{\varepsilon}{4}r_n^{1-\eta}$. 于是根据条件

$$\text{mes}\{E_{i'}^n\cap[\theta_{k_{i'}}+2\varepsilon,\theta_{k_{i'}+1}-2\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}>\varepsilon,$$

我们判定在 $\Omega(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)$ 内，并且在圆 (γ) 外存在一点 z', 使得

$$\log\frac{1}{|f(z')-a_{i'}|}\geqslant\frac{\delta}{4}T(t_n',f).$$

再根据 (6.29) 式和 η 的选取，当 n 充分大时，我们得到

$$\log\frac{1}{|f(z')-a_{i'}|}\geqslant r_n^{\frac{\nu}{2}},$$

或

$$|f(z')-a_{i'}|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\nu}{2}}}. \tag{6.32}$$

因为 $i\neq i'$, 所以 $a_i\neq a_{i'}$. 但是，根据 (6.31) 和 (6.32) 式，我们有

$$|a_i-a_{i'}|\leqslant|f(z')-a_i|+|f(z')-a_{i'}|\leqslant 2e^{-r_n^{\frac{\nu}{2}}}.$$

于是，当 n 充分大时，我们将得到矛盾。

(3) 当 n 充分大时，$g(w)$ 的每个直接超越奇点 $b_j(1\leqslant j\leqslant l)$ 对应一个集合 $\theta_{t''_{jn}}$, 并且有 $\theta(t''_{jn})\geqslant K$ $(j=1,2,\cdots l)$. 根据 ε 的选取，在 q 个域 $\Omega(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)$ $(k=1,2,\cdots,q)$. 中至少存在一个域 $\Omega(\theta_{k_j}+2\varepsilon,\theta_{k_j+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)$, 使得

$$\text{mes}\{\theta_{t''_{jn}}\cap\Gamma(\theta_{k_j}+2\varepsilon,\theta_{k_j+1}-2\varepsilon;t''_{jn})\}\geqslant\frac{K}{2q}t''_{jn}.$$

按照这种方式，我们可以使每个直接超越奇点b_j对应一个域$\Omega(\theta_{k_j}+2\varepsilon, \theta_{k_j+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ $(j=1,2,\cdots,l)$，以下，我们证明集合$\{\Omega(\theta_{k_j}+2\varepsilon, \theta_{k_j+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n) \mid j=1,2,\cdots,l\}$中的任何两个域不相重合.

事实上，如果存在两个域$\Omega(\theta_{k_j}+2\varepsilon, \theta_{k_j+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$和$\Omega(\theta_{k_{j'}}+2\varepsilon, \theta_{k_{j'}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$相重合，则有$k_j=k_{j'}=k$，但是$j\neq j'$. 应用引理5.1，置其中的$\theta=\frac{1}{2}(\theta_{k+1}-\theta_k)-\varepsilon$, $R=t''_{jn}$,

$R_1=r_n^{1-\eta}$, $R_2=2r_n$, $E\alpha=\theta_{t''_{jn}}$, $H=\frac{K}{2q}>\varepsilon$, $\alpha=b_j$, $N=t''^{\frac{1}{2}-\eta}_{jn}\geqslant t''^{\nu-\eta}_{jn}$，则当$n$充分大时，对位在$\overline{\Omega}(\theta_k+2\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$上且在一些圆$(\gamma)$外的点$z$有

$$|f(z)-b_j|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\nu}{2}}},$$

其圆(γ)的半径之和不超过$\frac{\varepsilon}{4}r_n^{1-\eta}$. 于是在$\theta_{t'_{jn}}$上且在圆$(r)$外存在一点$z'_n$，使得

$$|f(z'_n)-b_j|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\nu}{2}}},$$

以及在$\theta_{t''_{jn}}$上且在圆(γ)外存在一点z''_n，使得

$$|f(z''_n)-b_j|\leqslant e^{-r_n^{\frac{\nu}{2}}}. \tag{6.33}$$

另外，根据(6.30)式又有

$$|f(z''_n)-b_{j'}|\leqslant e^{-|z''_n|^{\frac{1}{2}-\eta}}$$
$$\leqslant e^{-r_n^{(1-\eta)(\nu-\eta)}}\leqslant e^{-r_n^{\frac{\nu}{2}}}. \tag{6.34}$$

根据(6.33)和(8.34)式，我们得到

$$|b_j - b_{j'}| \leqslant |f(z_n'') - b_j| + |f(z_n'') - b_j| \leqslant 2e^{-r_n^{\frac{\varkappa}{2}}}.$$

因此，当 n 充分大时，必有 $b_j = b_j = b$. 用直线连接 z_n' 和 z_n'' 点，若遇圆 (γ) 则用圆周弧取代，于是求得一条连接点 z_n' 和 z_n'' 点的连续曲线 L_n，并且当 $z \in L_n$ 时，有

$$|f(z) - b| \leqslant e^{-r_n^{\frac{\varkappa}{2}}}.$$

注意到

$$\lim_{n \to +\infty} f(z_n') = b_j$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(z_n'') = b_{j'}$$

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ z \in L_n}} f(z) = b, b = b_j = b_{j'},$$

我们判定 b_j 和 $b_{j'}$ 是非判别的直接超越奇点，从而导出矛盾.

(4) 我们证明两个集合 $\{\Omega(\theta_{k_i} + 2\varepsilon, \theta_{k_i+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 和 $\{\Omega(\theta_{k_j} + 2\varepsilon, \theta_{k_j+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$ 之间至多有 l' 个域相重合.

事实上，如果两个集合 $\{\Omega(\theta_{k_i} + 2\varepsilon, \theta_{k_i+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 和 $\{\Omega(\theta_{k_j} + 2\varepsilon, \theta_{k_j+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$ 之间有多于 l' 个域相重合，则其中必定存在域 $\Omega(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ $(k = k_i = k_j)$ 使得 $a_i = b_j$. 另一方面，类似地应用引理 5.1，我们可以判定 $a_i = b_j$. 于是导出矛盾.

因为两个集合 $\{\Omega(\theta_{k_i} + 2\varepsilon, \theta_{k_i+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n) \mid i = 1, 2, \cdots, p\}$ 和 $\{\Omega(\theta_{k_j} + 2\varepsilon, \theta_{k_j+1} - 2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n) \mid j = 1, 2, \cdots, l\}$ 之间至多有 l' 个域相重合，所以我们判定

$$p - l' + l \leqslant q.$$

(5) 最后，我们考虑其它情况：

当 $q=+\infty$ 或 p 和 l 同时取零时，定理6.2成立是显然的.

当 $p=0, l=1$ 或 $p=1, l=0$ 时，根据定理2.15，我们判定 $q\geqslant 1$；于是定理6.2成立.

当 $q<+\infty$ 时，$p=+\infty$ 或 $l=+\infty$ 的情况不能发生. 事实上，当 $p=+\infty, l<+\infty$ 时，我们取 $p'<+\infty$，使得

$$p'-l'+l>q .$$

但是，根据最先考虑的情况(1)的证明应有

$$p'-l'+l\leqslant q ,$$

从而导出矛盾. 当 $p<+\infty, l=+\infty$ 或 $p=+\infty, l=+\infty$ 时，我们可以类似地推得矛盾. 于是定理6.2完全得证.

定理6.2有下述推论：

系 1. $l\leqslant q$.

系 2. $p\leqslant q$.

系 3. 若 $p=q$，则有 $l=l'$.

系 4. 若 $l=q$，则有 $p=l'$.

我们能否构造一个下级 μ 为有穷的亚纯函数，具有 q 条 Julia 方向，l 个相应于反函数的判别直接超越奇点，p 个亏值，其中 l' 个亏值同时是反函数的直接超越奇点，使得等式

$$p-l'+l=q$$

成立？

定理6.3 设 $w=f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数，其下级为 μ，$0<\mu<+\infty$，$z=g(w)$ 是 $f(z)$ 的反函数. 记 $f(z)$ 的 Julia 方向个数为 q，$g(w)$ 的判别直接超越奇点个数为 l，$f(z)$ 的亏值个数为 p，其中 l' 个亏值同时是 $g(w)$ 的直接超越奇点. 再假定 $q<+\infty$ 和 $p-l'+l=q$. 则 $f(z)$ 的每个亏值同时是渐近值.

证．　(1)首先，根据条件$p-l'+l=q<+\infty$，我们判定$p<+\infty$和$l<+\infty$. 其次，不妨假定$p\geqslant 1$，否则定理6.3失去意义.当$p\geqslant 1$时，根据定理6.2有$q\geqslant 1$. 另外，根据定理3.7，我们判定级$\lambda<+\infty$.

以下，我们记$w=f(z)$的p个亏值为$a_i(i=1,2,\cdots,p)$，其相应亏量为$\delta(a_i,f)=\delta_i>0$. 不失一般性，设$a_i(i=1,2,\cdots,l')$是$z=g(w)$的直接超越奇点.再记$g(w)$的l个判别直接超越奇点为$b_j(j=1,2,\cdots,l)$，应用引理4.12，则对每个$b_j(1\leqslant j\leqslant l)$都对应一个区域$\Omega_j$. 最后，记$f(z)$的$q$条Julia方向为$\Delta(\theta_k)(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi)$. 置

$$\omega=\min_{1\leq k\leq q}(\theta_{k+1}-\theta_k),\ \theta_{q+1}=\theta_1+2\pi,$$

$$\delta=\min_{1\leq i\leq p}\{\delta_i\}$$

和任意取定一个数η,

$$0<\eta<\frac{\nu\omega}{80\pi},\ \nu=\min\left\{\frac{1}{2},\mu\right\}.$$

然后，我们构造序列$r_n=2^{(1+\eta)^n}(n=1,2,\cdots)$. 根据引理2.5和引理3.9，只要$n_0$充分大，则当$n\geqslant n_0$时，在区间$[r_n^{1-\eta},2r_n]$中必定存在一个值$t_n'$，具有下述性质：以$E_i^n(i=1,2,\cdots,p)$表示使不等式

$$\begin{cases}\log\dfrac{1}{|f(t_n'e^{i\theta})-a_i|}\geqslant\dfrac{\delta}{4}T(t_n',f) & (a_i\neq\infty),\\ \log|f(t_n'e^{i\theta})|\geqslant\dfrac{\delta}{4}T(t_n',f) & (a_i=\infty)\end{cases}$$

成立的$\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$值的集合，则有

$$\operatorname{mes}E_i^n\geqslant K_1=K(\delta,\lambda,p,\eta)>0,\ i=1,2,\cdots,p.$$

另外，我们还有

$$T(t_n', f) \geqslant r_n^{(1-\eta)(\mu-\eta)} \geqslant r_n^{(1-\eta)(\nu-\eta)}.$$

另一方面，对于$g(w)$的每个直接超越奇点$b_j(1\leqslant j\leqslant l)$，根据引理4.12，只要$n_0$充分大，则当$n\geqslant n_0$时，在区间$[r_n^{1-\eta}, r_n]$中存在值$t_{jn}''$，使得

$$\theta(t_{jn}'') \geqslant K_2 = K(\eta, \lambda) > 0, j = 1, 2, \cdots, l,$$

此处$\theta(t_{jn}'')$有下述意义：若用$\theta_{t_{jn}''}$表示圆周$|z| = t_{jn}''$位在Ω_j内的部分，则$t_{jn}''\theta(t_{jn}'')$表示$\theta_{t_{jn}''}$的线性测度．另外，当$z\in\theta_{t_{jn}''}$时，有

$$\log\frac{1}{|f(z)-b_j|} \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta} \quad (b_j\neq\infty),$$

$$\log|f(z)| \geqslant |z|^{\frac{1}{2}-\eta} \quad (b_j=\infty).$$

最后，我们取定一个数ε，

$$0<\varepsilon<\min\left\{\frac{\omega}{4}, \frac{K}{8q}\right\}, \quad K=\min\{K_1, K_2\}.$$

置

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{q} \overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon, \theta_{k+1}-\varepsilon),$$

则根据定理2.13和有限覆盖定理，我们判定存在三个判别值α, β, γ，使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n(r, \overline{\Omega}, f=X)}{\log r} = 0, X=\alpha, \beta, \gamma,$$

并且α, β, γ间的相互球距均大于d，$0<d<\frac{1}{2}$.

(2)类似于定理6.2的证明，只要n_0充分大，对于每个值$n(n=n_0, n_0+1, \cdots)$，我们可以使每个亏值$a_i(1\leqslant i\leqslant p)$对应一个域$\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$. a_i对应于域$\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$表明有

$$\mathrm{mes}\{E_i^n\cap[\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q}.$$

同样地，我们可以证明集合$\{\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)\mid i=1, 2, \cdots, p\}$中的任何两个域不相重合.

类似于定理6.2的证明，只要n_0充分大，对于每个值$n(n=n_0, n_0+1, \cdots)$，我们可以使每个直接超越奇点$b_j(1\leqslant j\leqslant l)$对应一个域$\Omega(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon, \theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$. b_j对应于域$\Omega(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon, \theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$表明有

$$\mathrm{mes}\{\theta_{t''_{jn}}\cap\Gamma(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon, \theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon; t''_{jn})\}\geqslant\frac{K}{2q}\cdot t''_{jn}.$$

同样类似地，我们可以证明集合$\{\Omega(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon, \theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)\mid j=1, 2, \cdots, l\}$中的任何两个域不相重合.

最后，类似于定理6.2的证明，我们可以判定两个集合$\{\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)\mid i=1, 2, \cdots, p\}$和$\{\Omega(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon, \theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)\mid j=1, 2, \cdots, l\}$之间至多有$l'$个域相重合.于是$p-l'+l\leqslant q$.

根据假设$p-l'+l=q$，我们判定每个域$\Omega(\theta_k+2\varepsilon, \theta_{k+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ $(k=1, 2, \cdots, q)$都必定属于集合$\{\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)\mid i=1, 2, \cdots, p\}$或集合$\{\Omega(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon, \theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)\mid j=1, 2, \cdots, l\}$. 否则，应有$p-l'+l\leqslant q-1$，于是得到矛盾.

现在，我们证明每个亏值$a_i(l'+1\leqslant i\leqslant p)$只能唯一地对应一个域$\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$. 事实上，如果不然，则存在某个

亏值 $a_{i'}$ $(l'+1\leqslant i'\leqslant p)$，使得有

$$\operatorname{mes}\{E_i^n\bigcap[\theta_{k_{i'n}}+2\varepsilon,\theta_{k_{i'n}+1}-2\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q},$$

以及

$$\operatorname{mes}\{E_i^n\bigcap[\theta_{k'_{i'n}}+2\varepsilon,\theta_{k'_{i'n}+1}-2\varepsilon]\}\geqslant\frac{K}{2q},$$

并且 $k_{i'n}\neq k'_{i'n}$. 于是，我们同样可以证明集合：

$$\Omega(\theta_{k'_{i'n}}+2\varepsilon,\theta_{k'_{i'n}+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n),$$

$$\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon,\theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)\ (i=1,2,\cdots,p)$$

中的任何两个域不相重合，并且这个集合与集合 $\{\Omega(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon,\theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)\mid j=1,2,\cdots,l\}$ 之间至多有 l' 个域相重合．于是

$$(p+1)-l'+l\leqslant q.$$

但是这与假设 $p-l'+l=q$ 相矛盾．

(3) 现在，我们证明当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $k_{in}=k_{in+1}$ $(l'+1\leqslant i\leqslant p)$.

首先，注意到每个域 $\Omega(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)$ $(k=1,2,\cdots,q)$ 必属于 $\{\Omega(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon,\theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)\mid i=1,2,\cdots,p\}$ 或 $\{\Omega(\theta_{k_{jn}}+2\varepsilon,\theta_{k_{jn}+1}-2\varepsilon;r_n^{1-\eta},2r_n)\mid j=1,2,\cdots,l\}$，以及每个域 $\Omega(\theta_k+2\varepsilon,\theta_{k+1}-2\varepsilon;r_{n+1}^{1-\eta},2r_{n+1})$ $(k=1,2,\cdots,q\}$ 必属于 $\{\Omega(\theta_{k_{in+1}}+2\varepsilon,\theta_{k_{in+1}+1}-2\varepsilon;r_{n+1}^{1-\eta},2r_{n+1})\mid i=1,2,\cdots,p)$ 或 $\{\Omega(\theta_{k_{jn+1}}+2\varepsilon,\theta_{k_{jn+1}+1}-2\varepsilon;r_{n+1}^{1-\eta},2r_{n+1})\mid j=1,2,\cdots,l\}$．于是，如果对某个 $i(l'+1\leqslant i\leqslant p)$ 有 $k_{in}\neq k_{in+1}$，则必有 $k_{in}=k_{i'n+1}$ $(i'\neq i)$ 或 $k_{in}=k_{jn+1}$.

如果 $k_{in}=k_{i'n+1}$. 类似于定理6.2的证明，对位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon,$

$\theta_{k_{in}+1}-2\varepsilon; r_n^{1-\eta}, 2r_n)$ 上且在一些圆 $(\gamma)_i$ 外的点 z 有

$$|f(z)-a_i| \leqslant e^{-r_n^{\frac{\pi}{2}}},$$

其中圆 $(\gamma)_i$ 的半径之和不超过 $\frac{\varepsilon}{4}r_n^{1-\eta}$, 以及对于位在 $\overline{\Omega}(\theta_{k_{i'n+1}}+2\varepsilon, \theta_{k_{i'n+1}+1}-2\varepsilon; r_{n+1}^{1-\eta}, 2r_{n+1})$ 上且在一些圆 $(\gamma)_{i'}$ 外的点 z, 有

$$|f(z)-a_{i'}| \leqslant e^{-r_{n+1}^{\frac{\pi}{2}}},$$

其中 $(\gamma)_{i'}$ 的半径之和不超过 $\frac{\varepsilon}{4}r_{n+1}^{1-\eta}$. 注意到

$$k_{in}=k_{i'n+1}, r_{n+1}^{1-\eta}=r_n^{1-\eta^2}<r_n,$$

以及圆 $(\gamma)=(\gamma)_{i'}\bigcup(\gamma)_i$ 的半径之和不超过 $\frac{\varepsilon}{4}(r_n^{1-\eta}+r_{n+1}^{1-\eta})$ $\leqslant\frac{\varepsilon}{2}r_n$, 我们判定在 $\Gamma(\theta_{k_{in}}+2\varepsilon, \theta_{k_{in+1}}-2\varepsilon; r_n)$ 上存在一点 $z_0\overline{\in}(\gamma)$. 于是, 一方面有

$$|f(z_0)-a_i| \leqslant e^{-r_n^{\frac{\pi}{2}}},$$

另一方面有

$$|f(z_0)-a_{i'}| \leqslant e^{-r_n^{\frac{\pi}{2}}}.$$

但是, 根据 $i\neq i'$, 所以 $a_i\neq a_{i'}$. 因此只要 n_0 充分大, 我们将导出矛盾.

如果 $k_{in}=k_{jn+1}$. 注意到 $a_i\neq b_j$, 则类似地可以导出矛盾.

置 $k_i=k_{in}$ $(n=n_0, n_0+1, \cdots)$, 则在 $\Omega(\theta_{k_i}+2\varepsilon, \theta_{k_i+1}-2\varepsilon)$ 中必定存在一条伸展到 ∞ 的连续曲线 L_i, 使得

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in L_i}} f(z)=a_i, \quad l'+1\leqslant i\leqslant p,$$

即 a_i 是一个渐近值. 另外, $a_i(i=1,2,\cdots,l')$ 是 $g(w)$ 的直接超越奇点, 因此, $a_i(i=1,2,\cdots,l')$ 是 $f(z)$ 的渐近值. 于是定理6.3完全得证.

如果在定理6.2和定理6.3的证明中, 我们用引理3.13代替引理5.1, 则类似地可以证明下述结果:

定理6.4 设 $w=f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数, 其级 $\lambda<+\infty$, $z=g(w)$ 是 $f(z)$ 的反函数. 再假设存在 $q\,(1\leqslant q<+\infty)$ 条半直线 $\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi,\theta_{q+1}=\theta_1+2\pi)$, 使得对于任意数 $\varepsilon>0$, 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}}{\log r}=0,$$

$$X=0,\infty.$$

记 $g(w)$ 的判别有穷非零直接超越奇点个数为 l, $f(z)$ 的有穷非零亏值个数为 p, 其中 l' 个亏值同时是 $g(w)$ 的直接超越奇点, 则有关系式 $p-l'+l\leqslant q$.

定理6.5 设 $w=f(z)$ 是开平面 $|z|<+\infty$ 上的一个亚纯函数, 其下级为 μ, $0<\mu<+\infty$[1], $z=g(w)$ 是 $f(z)$ 的反函数. 再假设存在 $q\,(1\leqslant q<+\infty)$ 条半直线 $\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,q;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_q<2\pi,\theta_{q+1}=2\pi+\theta_1)$, 使得对于任意数 $\varepsilon>0$, 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{q}\Omega(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon;r),f=X\right\}}{\log r}=0,$$

$$X=0,\infty.$$

---

1) 当 $p=0$ 时, 定理6.5失去意义, 当 $p\geqslant 1$ 时, 根据定理3.6, 我们判定 $f(z)$ 的级 $\lambda<+\infty$.

记$g(w)$的判别有穷非零直接超越奇点个数为l,$f(z)$的有穷非零亏值个数为p,其中l'个亏值同时是$g(w)$的直接超越奇点.再假定$p - l' + l = q$,则$f(z)$的每个亏值同时是渐近值.

最后,我们作两点说明:

(1) 当$q \geqslant 2$时,根据条件$p - l' + l = q$,我们可以判定下级$\mu > 0$.于是当$q \geqslant 2$时,我们可以去掉定理6.3和定理6.5中的假设条件$\mu > 0$.

(2) 在定理6.3和定理6.5的条件下,我们可以证明$f(z)$在每个域$\Omega(\theta_k + 2\varepsilon, \theta_{k+1} - 2\varepsilon)$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$上至多除去一些测度很小的点集合外,一致地趋近于a_i或b_j.

参 考 文 献

[1] Ahlfors, L. V.

a) Beiträge der meromorphen Funktionen, 7. Congr. Math. Scand. Oslo, 1929, 84—88.

b) Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der Theorie der ganzen Funktionen, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **1** (1930), 1—40.

c) Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung, *Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys.*, **6** (1932).

d) Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.*, **65** (1935), 157—194.

e) Lectures on quasiconformal mapping, Van Nostrand, Princeton, 1966.

f) Conformal invariants

Topics in Geometric Function Theory, McGraw-Hill, 1973.

[2] Anderson, J.M., Barth, K.F. and Brannan, D.A.

a) Research problems in complex analysis, *Bull. London Math. Sos.*, **9** (1977), 129—162.

[3] Аракелян, Н. У.

a) Целые функций конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений, ДАН СССР. **170**(1966), 999—1002.

[4] Baernstein, A.

a) Proof of Edrei's spread conjecture, *Proc. London Math. Soc.*, **26** (1973), 418—434.

b) Integral means, Univalent functions and circular symmetrization, *Acta Math.*, **133** (1974), 139—169.

[5] Barth, K.F., Brannan, D.A. and Hayman, W.K.

a) The growth of plane harmonic functions along an asymptotic path, *Proc. London Math. Soc.*, **37** (1978), 363—384.

[6] Borel, E.

a) Sur les zéros des fonctions entières, *Acta Math.*, **20** (1897), 357—396.

[7] Bureau, F.

a) Mémoire sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége*, **17** (1932).

[8] Campbell, D.M., Clunie, J.G. and Hayman, W. K.

a) Research problems in complex analysis, in "Aspect of contemporary complex analysis" (Brannan, D. A. and Clunie, J. G. eds), Academic press, 1980.

[9] Cartan, H.

a) Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications, *Ann. Ec. Norm. Sup*, **45** (1928), 255—346.

b) Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **189** (1929), 521—523.

[10] 庄圻泰(Chuang Chi-tai)

a) Un théorème relatif aux directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini, *C. R. Acad. Sci.*, **204** (1937), 951—952.

b) Une généralisation d'une inégalité de Nevanlinna, *Sci, Sinica*, **13** (1964), 887—895.

c)亚纯函数的奇异方向，科学出版社，1982

[11] Denjoy, A.

a) Sur les fonctions entiéres de genre fini, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **145** (1907), 106—109.

[12] Drasin, D.

a) On asymptotic curves of functions extremal for Denjoy's conjecture, *Proc. London Math. Soc.*, **26** (1973), 142—166.

b) The inverse problem of the Nevanlinna theory, *Acta Math.*, **138** (1977), 83—151.

c) Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerning functions which have deficiency sum two (preprint).

[13] Drasin, D. and Weitsman, A.

a) Meromorphic functions with large sums of deficiencies, *Advances in Math.*, **15** (1974), 93—126.

b) On the Julia directions and Borel directions of entire functions, *Proc. London Math. Soc.*, **32** (1976), 199—212.

[14] Edrei, A.

a) Sums of deficiencies of meromorphic functions, *J. Analyse Math.*, I. **14** (1965), 79—107; II. **19** (1967), 53—74.

b) Solution of the deficiency problem for functions of small lower order, *Proc. London Math. Soc.*, **26** (1973), 435—445.

[15] Edrei, A. and Fuchs, W. H. J.

a) Valeurs déficientes et valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes, *Comment. Math. Helv.*, **33** (1959), 258—295.

b) On the growth of meromorphic functions with several deficient values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 292—328.

c) The deficiencies of meromorphic functions of order less than one, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 233—249.

d) Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1962), 315—344.

e) On meromorphic functions with regions free of poles and zeros, *Acta Math.*, **108** (1962), 113—145.

[16] Fuchs, W. H. J.

a) A Phragmén-Lindelöf theorem conjectured by D.J. Newman, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267** (1981), 285—293.

b) The development of the theory of deficient values since Nevanlinna,

Ann. Acad. Sci. Fenn., series A. I. Math., **7** (1982), 33—48.

[17] Fuchs, W. H. J. and Hayman, W. K.

a) An entire function with assigned deficiencies, Studies in mathematical analysis and related topics, Essays in honor of George Pólya, Stanford Univ. Press, 1962, 117—125.

[18] Гольдберг А. А.

a) О дефектах мероморфных функций ДАН СССР, **98**(1954), 893—895.

b) О возможной величине нижнего поряка целой функций с конечным дефектным значением НАУК СССР, **159**(1964), 968—970.

[19] Гольдберг, А. А. and Еременко, А. Э.

a) Об асимптотических кривых челых функчий конечного порядка, математический сборник, **109**(1979), 555—581.

[20] Голузин, Г. М.

a) Геометрическая теория функчий комплексного переменного, наука, 1966.

[21] Hayman, W. K.

a) Multivalent functions, Cambridge, 1958.

b) Picard values of meromorphic functions and their derivatives, *Ann. Math.*, **70** (1959), 9—42.

c) Meromorphic functions, Oxford, 1964.

d) Research problems in function theory, Athlone Press, 1967.

e) Angular value distribution of power series with gaps, *Proc. London Math. Soc.*, **24** (1972), 590—624.

f) Research problems in function theory, in "Symposium on complex analysis, Canterbury, 1973" (J.G. Clunie and W.K. Hayman, eds), Cambridge U.P., 1974.

g) On Iversen's theorem for meromorphic functions with few poles, *Acta Math.*, **141** (1978), 115—145.

[22] 熊庆来 (Hiong King- lai)

a) Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroïdes, *Mém.*

Sci. Math. Fasc., 139, Paris, 1957.

[23] Huber, A.

a) On subharmonic function and differential geometry in the large, *Comment, Math. Helv.*, **32** (1957), 13—72.

[24] Iversen, F.

a) Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse de Helsingfors, 1914.

[25] Julia, G.

a) Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes, *Ann. École Norm. Sup.*, **36** (1919), 93—125; 37 (1920), 165—218.

[26] Kennedy, P. B.

a) On a conjecture of Heins, *Proc. London Math. Soc.*, **5** (1955), 22—47.

b) A Class of integral functions bounded on certain curves, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1956), 518—547.

[27] Lewis, J., Boss, J. and Weitsman, A.

a) On the growth of subharmonic functions along paths (preprint).

[28] Lindelöf, E.

a) Sur un principle générale de l'analyse et ses applications à la théorie de la representation conforme, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **46** (1915).

[29] 吕以辇(Lü Yi-nian) 和张广厚(Zhang Guang-hou)

a) On Nevanlinna direction of a meromorphic function, *Sci. Simica*, **26** (1983), 607—617.

[30] Milloux, H.

a) Le théorème de Picard, suites de fonctions holomorphes; fonctions holomorphes et fonctions entieres, *J. de Math.*, **3** (1924), 345—401.

b) Sur une extension d'un théorème de P. Boutroux-H. Cartan, *Bull. Sos. Math. Fr.*, **65** (1937), 65—75.

c) Extension d'un théorème de M. R. Nevanlinna et applications, *Act.*

Sci. et Ind., No. 888, (1940).

d) Sur les directions de Borel des fonctions entières, de leurs dérivées et de leurs integrales, *J. Analyse Math.*, **1** (1951), 244—330.

[31] Nevanlinna, F.

a) Über eine Klasse meromorpher Funktionen, C. R. 7e congr. Math. Scand., Oslo, 1929, 81—83.

[32] Nevanlinna, R.

a) Le Théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.

b) Analytic functions, Springer, Berlin, 1970.

[33] Ostrowski, A.

a) Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes, *Math. Zeit.*, **24** (1926), 215—258.

[34] Pfluger, A.

a) Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung, *Comment. Math. Helv.*, **19** (1946), 91—104.

[35] Rauch, A.

a) Extension de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes, *J. de Math. pures et appl.*, **12** (1933), 109—171.

b) Cas où une direction de Borel d'une fonction entière f(z) d'ordre fini est aussi direction de Borel pour f'(z), *C.R.Acad. Sci.*, **199** (1934), 1014—1016.

[36] Shimizu, T.

a) On the theory of meromorphic functions, *Jap. Journ. Math.*, **6**(1929).

[37] Teichmüller, O.

a) Vermutungen und sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung, *Deutsche Math.*, **4** (1939), 163—190.

[38] Tsuji, M.

a) Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

[39] Valiron, G.

a) Lectures on the general theory of integral functions, Edouard Privat, Toulouse, 1923.

b) Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes, *Acta Math.*, **52** (1928), 67—92.

c) Sur les directions de Borel des fonctions entières, *Annali di Mat.*, **9** (1931), 273—285.

d) Directions de Borel des fonctions méromorphes, Mémor. Sci Math., fasc. 89, Paris, 1938.

e) Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 40—42.

[40] Weitsman, A.

a) Meromorphic functions with maximal deficiency Sum and a conjecture of F. Nevanlinna, *Acta Math.*, **123** (1969), 115—139.

b) A growth property of the Nevanlinna Characteristic, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1970), 65—70.

c) A theorem on Nevanlinna deficiencies, *Acta Math.*, **128**(1972), 41—52.

[41] Wiman, A.

a) Sur une extension d'un théorème de M. Hadàmard, *Arkiv f. Math. Ast. Phys.*, **2** (1905).

[42] 杨乐(Yang Lo) 和张广厚(Zhang Guang-hou)

a) Sur la distribution des directions de Borel des fonctions méromorphes, *Sci. Sinica*, **16** (1973), 465—482.

b)关于整函数的亏值总数，数学学报，**18**(1975),35—53.

c) Recherches sur le nombre des valeurs déficientes et le nombre des directions de Borel des fonctions méromorphes, *Sci. Sinica*, **18** (1975), 23—37.

d) Sur la construction des fonctions méromorphes ayant des directions singulières données, *Sci. Sinica*, **19** (1976). 445—459.

[43] 张广厚(Zhang Guang-hou)

a) 关于亚纯函数与其各级导数或积分的公共波莱耳方向的研究，数学学报，**20** (1977), (I) 73—98; (II) 157—177; (III) 237—247.

b) A symptotic values of entire and meromorphic functions, *Sci. Sinica*, **20** (1977), 720—739.

c) 整函数与亚纯函数的亏值、渐近值和茹利雅方向的关系的研究，中国科学，增刊**1** (1978), 1—80.

d) The length of an asymptotic path of an entire function, *Sci.Sinica*, **22** (1979), 991—999.

e) On entire function extremal for Denjoy's conjecture, *Sci. Sinica*, (I). **24** (1981), 885—898; (II). **11** (1982), 981—994.

f) Direct transcendental singularities for inverse functions of meromorphic functions and of their derivatives, *Sci. Sinica*, **25** (1982), 797—807.

g) 具有极值亏量和的亚纯函数，中国科学，**4** (1983), 293—305.

h) 具有有穷条Julia 方向的整函数，中国科学，**9** (1983), 775—786.

i) 关于亚纯函数的一般性定理及其应用(尚未发表)。

j) 零点分布在有穷条半直线上的整函数(尚未发表)。

[44]张广厚(Zhang Guang-hou)和伍鹏程(Wu Peng-cheng)

a)亚纯函数的级，中国科学，**5**(1985).